

На правах рукописи



Ахунов Роман Раисович

**Алгоритмы и комплекс программ
для итерационного решения
систем линейных алгебраических уравнений
при анализе полосковых структур методом моментов**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Томск–2018

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (ТУСУР).

Научный руководитель — кандидат технических наук
Куксенко Сергей Петрович.

Официальные оппоненты: **Жданов Александр Иванович**
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры высшей
математики и прикладной информатики
Самарского государственного
технического университета;

Стукач Олег Владимирович
доктор технических наук, доцент,
профессор инженерной школы
информационных технологий и
робототехники Национального
исследовательского Томского
политехнического университета.

Ведущая организация: Федеральное государственное унитарное
предприятие «Ордена Трудового Красного
Знамени научно-исследовательский
институт радио», г. Москва.

Защита состоится 27 декабря в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.268.02 при Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.

С диссертацией можно ознакомиться на сайте <https://postgraduate.tusur.ru/urls/9nblx78g> и в библиотеке Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники по адресу: 634045, г. Томск, ул. Красноармейская, 146.

Автореферат разослан «_____» _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Зайченко Татьяна Николаевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. С ростом сложности создаваемых устройств и протекающих в них процессов всё большую роль играет использование математического моделирования, поскольку натурный эксперимент часто оказывается невозможным или очень затратным. Ярким примером являются широко проникающие во все сферы жизни общества современные радиоэлектронные устройства (РЭУ), для которых создание, оперативная модернизация и удешевление по запросам рынка требуют особенно тщательного математического моделирования посредством соответствующих программных продуктов. В общем случае, в основе математического моделирования РЭУ лежит численный анализ, требующий построения математической модели исследуемого объекта с помощью решения уравнений Максвелла или, в частном случае, Пуассона/Лапласа. Такой анализ часто выполняется методом моментов, сводящимся к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), на которое приходится значительная часть вычислительных затрат. Моделирование в диапазоне параметров требует многократного решения СЛАУ, а значит роста вычислительных затрат, что является серьезной преградой для эффективного моделирования.

В развитие методов решения СЛАУ сделали большой вклад такие отечественные и зарубежные ученые, как В.В. Воеводин, С.К. Годунов, В.П. Ильин, Л.Ю. Колотилина, Г.И. Марчук, В.В. Радченко, А.А. Самарский, Е.Е. Тыртышников, M. Bebendorf, S Borm, C. Calgano, J. Dongarra, D. Golub, W. Hackbusch, S. Karimi, Q. He, S. Rjasanow, Y. Saad, T. Topa, I. Tsukerman, H.A. van der Vorst и др. Известен ряд математических библиотек для решения СЛАУ. В развитие метода моментов большой вклад внесли R. Harrington, T. Sarkar, A. Djordjevic. Метод широко используется в ряде программных продуктов. Однако не использован ряд алгоритмических ресурсов, позволяющих уменьшить вычислительные затраты на решение СЛАУ, в частности итерационными методами. Кроме того, для уменьшения этих затрат может быть использована специфика итерационного решения, а также изменений матрицы при многократном решении СЛАУ. Между тем с неуклонным ростом порядка и числа решаемых СЛАУ, из-за сложности задач моделирования, использование этих ресурсов весьма актуально.

Цель работы – разработка алгоритмов и комплекса программ для итерационного решения СЛАУ при анализе полосковых структур методом моментов. Для её достижения необходимо решить следующие задачи:

1. Выполнить обзор способов уменьшения вычислительных затрат при математическом моделировании методом моментов.

2. Разработать алгоритмы и программы для однократного решения СЛАУ с уменьшенными вычислительными затратами за счет использования форматов хранения разреженных матриц.

3. Разработать алгоритмы и программы для многократного решения СЛАУ с уменьшенными вычислительными затратами за счет использования специфики итерационного решения СЛАУ.

4. Апробировать разработанные алгоритмы и комплекс программ.

Научная новизна

1. Предложена математическая модель с дополнительными параметрами (выбором очередности решения и матрицы предобусловливания), позволяющая уменьшить время моделирования полосковых структур методом моментов в диапазоне геометрических и электрофизических параметров структуры. (Математическое моделирование).

2. Разработаны алгоритмы, использующие разреженный строчный формат хранения матрицы и уменьшающие время $LU(0)$ -разложения. Разработаны алгоритмы многократного решения СЛАУ итерационным методом, отличающиеся адаптивным переформированием предобусловливателя на основании оценок средних арифметических значений времени и сложности решения. (Численные методы).

3. Разработан комплекс программ, отличающийся наличием программных модулей для однократного и многократного решения СЛАУ (стабилизированным методом бисопряженных градиентов и квадратичным методом сопряженных градиентов). (Комплекс программ).

Теоретическая значимость

1. Получены оценки максимального значения коэффициента сжатия для форматов хранения разреженных матриц.

2. Получены аналитические оценки максимально возможного ускорения многократного решения СЛАУ итерационным методом с предобусловливанием относительно метода исключения Гаусса.

3. Получены формулы для аналитической оценки усредненного ускорения многократного решения СЛАУ итерационным методом с предобусловливанием относительно прямого метода.

4. Сформулированы и доказаны теоремы об условиях существования минимума и убывания зависимости среднеарифметического времени решения ряда СЛАУ от их числа.

5. Получены формулы для оценки арифметической сложности LU -разложения, стабилизированного метода бисопряженных градиентов и квадратичного метода сопряженных градиентов с учетом программной реализации.

6. Получены формулы для оценки арифметической сложности LU -разложения, стабилизированного метода бисопряженных градиентов и квадратичного метода сопряженных градиентов с учетом программной реализации.

Практическая значимость

1. Показана перспективность использования итерационных методов с предобусловливанием для многократного решения СЛАУ.

2. Программно реализованы усовершенствованные алгоритмы $LU(0)$ -разложения и многократного решения СЛАУ итерационными методами с адаптивным переформированием предобусловливателя.

3. Использование разработанных комплексов программ программ позволило уменьшить вычислительные затраты на моделирование реальных полосковых структур методом моментов.

4. Оценена арифметическая сложность алгоритмов LU-разложения, стабилизированного метода бисопряженных градиентов и квадратичного метода сопряженных градиентов с учетом программной реализации.

5. Полученные оценки возможного ускорения многократного решения СЛАУ итерационными методами с предобусловливанием относительно прямого метода позволяют априорно выбрать наиболее подходящий метод.

Методология и методы исследования. В работе применены математическое моделирование, квазистатический подход, метод моментов, LU-разложение, метод Гаусса, ILU(0)-разложение, стабилизированный метод бисопряженных градиентов, квадратичный метод сопряженных градиентов, оценки вычислительной сложности.

Положения, выносимые на защиту

1. При математическом моделировании полосковых структур в диапазоне параметров методом моментов выбор очередности (прямой или обратной) при итерационном решении последовательности СЛАУ с предобусловливателем из СЛАУ, решаемой 1-й, позволяет ускорить решение 100 СЛАУ до 1,84 раза, а из 50-й – до 2,21 раза. (Математическое моделирование)

2. При решении СЛАУ итерационным методом хранение предобусловливателя в разреженном строчном формате позволяет уменьшать затраты не только оперативной памяти, но и времени, а переформирование предобусловливателя по адаптивным условиям минимизирует время решения последовательности СЛАУ. (Численные методы)

3. Разработанный комплекс программ позволяет уменьшение вычислительных затрат при решении СЛАУ (стабилизированным методом бисопряженных градиентов и квадратичным методом сопряженных градиентов):

- однократном, за счет ILU(0)-разложения и использования разреженного строчного формата с двумя временными векторами (для хранения статуса наличия ненулевых элементов строк и адреса столбцов этих элементов);
- многократном, за счет адаптивного переформирования предобусловливателя на основании оценок средних арифметических значений времени и сложности, а также выбора матрицы предобусловливания и очередности решения СЛАУ. (Комплекс программ)

Достоверность результатов подтверждена сравнением полученных результатов с результатами других авторов, использованием проверенных алгоритмов и численных методов, согласованностью результатов теоретических оценок и вычислительного эксперимента, а также использованием результатов на практике.

Использование результатов

1. ОКР «Разработка комплекса программных и технических средств для контроля информационных магистралей, обеспечения электромагнитной совместимости и исследования надёжности унифицированного ряда электронных модулей на основе технологии «система-на-кристалле» для систем управления и электропитания космических аппаратов связи, навигации и дистанционного зондирования Земли с длительным сроком

активного существования», тема «УЭМ-ТУСУР», хоздоговор 95/10 от 24.11.2010 в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2011–2013 гг.

2. ОКР «Разработка принципов построения и элементов системы автономной навигации с применением отечественной специализированной элементной базы на основе наногетероструктурной технологии для космических аппаратов всех типов орбит», тема «САН», хоздоговор 96/12 от 16.11.2012 в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2013–2015 гг. (акт внедрения).

3. НИР «Выявление, исследование и реализация новых возможностей уменьшения времени многократного решения СЛАУ с частично изменяющейся матрицей в задачах вычисления емкостной матрицы произвольной системы проводников и диэлектриков», грант РФФИ 14-07-31267 мол_а, 2014–2015 гг. (акт внедрения).

4. НИР «Комплексные исследования по разработке алгоритмов, математического обеспечения и средств проектирования для создания новых элементов защиты и контроля вычислительных систем на основе модальных явлений», грант РФФИ 14-29-09254, 2014–2016 гг.

5. НИР «Комплексное обоснование возможностей создания модальной технологии помехозащиты критичной радиоэлектронной аппаратуры и совершенствования существующих и разработки новых помехозащитных устройств на её основе», грант РФФИ 14-19-01232, 2014–2016 гг.

6. НИР «Разработка новых программных и аппаратных средств для моделирования и обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронной аппаратуры» в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности 8.1802.2014/К, 2014–2016 гг.

7. НИР «Выявление новых подходов к совершенствованию обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронной аппаратуры и моделирования систем активного зрения роботов» в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности 8.9562.2017/БЧ, 2017–2019 гг.

8. ПНИ «Теоретические и экспериментальные исследования по синтезу оптимальной сети высоковольтного электропитания для космических аппаратов» в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение №14.574.21.0172 от 26.09.2017, 2017–2019 гг.

9. Учебный процесс Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники (акт внедрения).

10. Учебный процесс Национального исследовательского томского государственного университета (акт внедрения).

Апробация результатов

Подготовка заявок и победа в конкурсах: темы «УЭМ-ТУСУР» и «САН» по Постановлению 218 Правительства РФ; грант РФФИ 14-07-31267 мол_а; грант РФФИ 14-29-09254; грант РФФИ 14-19-01232; проектная часть госзадания 8.1802.2014/К, базовая часть госзадания 8.9562.2017/БЧ, ФЦП ИР, соглашение №14.574.21.0172.

Результаты представлялись в материалах конференций: Всерос. научно-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2010», г. Томск, 2010, 2017 гг.; Межд. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии, г. Санкт-Петербург, 2011 г.; Межд. конф. по численному электромагнитному моделированию и оптимизации для ВЧ, СВЧ и терагерцовых приложений, Италия, 2014 г.; Межд. конф. «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015», г. Новосибирск, 2015 г.; Межд. конф. по прикладной физике, моделированию и компьютерам, Австрия, 2015 г.; Межд. конф. по численному анализу и прикладной математике, Греция, 2015 г.; Межд. конф. по моделированию и прикладной математике, Таиланд, 2015 г.; Межд. научно-практ. конф. «Электронные средства и системы управления», г. Томск, 2015 г.

Публикации: 37 работ, в т.ч. 1 монография, 3 статьи в журналах из перечня ВАК, 6 статей в журналах из перечня ВАК, индексируемых в Scopus, 2 публикации в зарубежных журналах, 2 статьи в отечественных журналах, 4 доклада в трудах зарубежных конференций, 4 – в отечественных, 15 свидетельств о регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объём диссертации. В состав входят введение, 4 главы, заключение, список литературы из 164 наим., приложения на 53 с., в т.ч. 3 табл. Объём без приложений – 146 с., в т.ч. 64 рис. и 22 табл.

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично или при непосредственном его участии. Разработка исходных кодов программ, получение аналитических оценок и обработка результатов выполнены лично автором. Разработка алгоритмов, их исследование, анализ и обобщение полученных результатов выполнены совместно с С.П. Куксенко. Часть результатов получена совместно с соавторами публикаций.

Краткое содержание работы. Во Введении представлена краткая характеристика работы. В главе 1 выполнен обзор актуальных задач. В главах 2–4 описано решение задач работы. Далее приведен список литературы. В Заключении подведены итоги. В Приложении А приведены исходные тексты программ. В Приложении Б приведены расчеты сложности алгоритмов LU-разложения, стабилизированного метода бисопряженных градиентов и квадратичного метода сопряженных градиентов. В Приложении В представлены копии свидетельств о регистрации программы для ЭВМ, а в Приложении Г – актов использования результатов.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении приведена общая характеристика работы.

1 ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ

Представлено обоснование актуальности математического моделирования методом моментов при анализе полосковых структур. Приведен порядок расчета ёмкостной матрицы методом моментов для произвольной двумерной структуры. Сделан краткий обзор методов решения СЛАУ. Рассмотрены форматы хранения разреженных матриц и существующие варианты многократного решения СЛАУ. Сформулированы цель и задачи работы.

2 ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО СТРОЧНОГО ФОРМАТА ХРАНЕНИЯ МАТРИЦЫ ДЛЯ УСКОРЕНИЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Представлены результаты анализа эффективности сжатия для различных форматов хранения разреженных матриц. Приведены аналитические оценки границы эффективности и максимального коэффициента сжатия форматов двух векторов, Кнута, Рейнболдта и Местеньи, Ларкума, Шермана, CSR, JDS и CDS. Показано, что максимальный коэффициент сжатия, который равен $1/(2q)$, где q – плотность матрицы, рассчитанная как отношение числа ненулевых элементов матрицы к N^2 (N – порядок матрицы), обеспечивают форматы двух векторов, CSR и JDS. Однако, при выборе формата хранения надо учитывать не только эффективность его сжатия, но и его применимость в алгоритмах. Для форматов рассмотрена граница эффективности, т.е. значение q , выше которого сжатия нет. Она оценена аналитически (раздел 2.1 диссертации). Установлено, что формат CSR экономит оперативную память компьютера при $q < 50\%$ для всех исследуемых далее матриц. Так, он уменьшает затраты оперативной памяти до 2 раз, а время решения СЛАУ – до 2,5 раза.

Рассмотрено ускорение решения СЛАУ с плотной матрицей итерационными методами с неявным предобуславливанием, которое преобразует исходную систему $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ к виду $\mathbf{MAx} = \mathbf{Mb}$, где матрица \mathbf{M} формируется с помощью ILU(0)-разложения. Для реализации ILU(0)-разложения выбран алгоритм *ikj*-версии, где элементы матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} вычисляются по строкам и поэтому возможно использование цикла по ненулевым элементам в формате CSR. Тогда вычисления будут только с элементами строк i и k , у которых равны индексы столбцов. В результате разработан алгоритм ILU(0)-разложения с использованием формата CSR. Выявлено, что поиск диагональных элементов в алгоритме увеличивает время его работы, поэтому введен вектор **Diag**, хранящий указатели на эти элементы.

Оценены временные затраты для трёх СЛАУ ($N=4800, 6000, 8000$), матрицы которых получены в системе TALGAT учащением сегментации границ проводник-диэлектрик и диэлектрик-диэлектрик при вычислении ёмкости двух полосок на диэлектрическом слое над плоскостью земли (рисунок 2.1a). При помощи предфильтрации менялась плотность матрицы \mathbf{M} . Итерации продолжались, пока относительная норма вектора невязки не становилась меньше 10^{-6} . Сравнение проводилось для двух вариантов алгоритма BiCGStab: без формата хранения разреженных матриц (T) и с форматом CSR и вектором **Diag** (T_{csrd}) (таблица 2.1).

Далее был исключены поиск ненулевых элементов в алгоритме, а затем использованы временные векторы. Оценено ускорение для конфигураций из рисунка 2.1 как отношение времени решения СЛАУ по усовершенствованным алгоритмам (без поиска ненулевых элементов (T_s) и с использованием временных векторов (T_r)) ко времени алгоритма без этих усовершенствований (T). Зависимости ускорения решения СЛАУ от плотности (q) матрицы \mathbf{M} для $N = 4800$ приведены на рисунке 2.2a. Ускорение достигает 2,5 раза, но при малых q падает. Это объясняется тем, что оптимизировался только этап ILU(0)-разложения, т.е. одна из трех частей общего времени: предфильтра-

ции (T_p), ILU(0)-разложения (T_{lu}) и итераций (T_i). На рисунке 2.2б приведено ускорение ILU(0)-разложения для $N = 4800$ при использовании алгоритмов: без поисков ненулевых элементов (T_{lus}) и с использованием временных векторов (T_{lur}) относительно алгоритма без этих усовершенствований (T_{lu}). Видно, что ускорение возрастает с уменьшением q в отличие от рисунка 2.2а.

Зависимость соотношения времени этапов решения СЛАУ от q для $N = 4800$ изображена на рисунке 2.3. При уменьшении, – времена итераций увеличивается, а ILU(0)-разложения (за счет которого получено ускорение) – уменьшается, что уменьшает ускорение решения СЛАУ. Между тем его уменьшение при малой плотности матрицы не уменьшает значимости усовершенствования алгоритма. Действительно, на практике решение СЛАУ ускоряют за счет оптимизации допуска обнуления при предфильтрации. При этом время ILU(0)-разложения примерно равно времени на итерации. Поэтому ускорение ILU(0)-разложения важно.

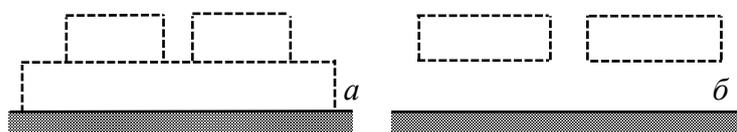


Рисунок 2.1 – Поперечные сечения исследуемых структур: два проводника с диэлектриком (а) и без диэлектрика (б) над плоскостью земли

Таблица 2.1 – Сравнение времени решения СЛАУ

N	T , с	T_{csrd} , с	T/T_{csrd}
4800	164	101	1,6
6000	335	206	1,6
8000	216	140	1,5

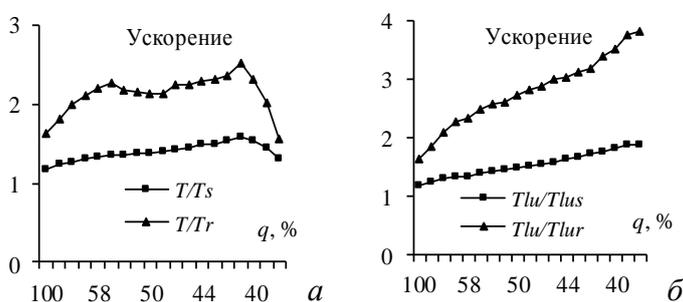


Рисунок 2.2 – Ускорения решения СЛАУ (а) и ILU(0)-разложения (б) для рисунка 2.1а

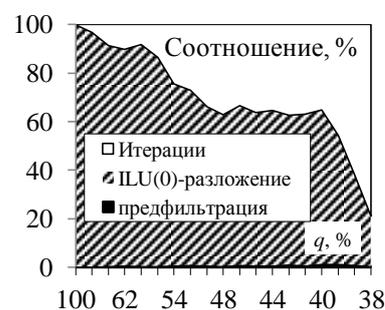


Рисунок 2.3 – Зависимость соотношения времени этапов решения СЛАУ для $N = 4800$

Алгоритм с использованием формата CSR с предложенными усовершенствованиями ускорил решение СЛАУ итерационным методом BiCGStab до 1,6 раза по сравнению с алгоритмом без формата CSR. Алгоритм, использующий два дополнительных вектора, показал дополнительное ускорение до 1,7 относительно алгоритма без них. Полученные результаты сравнены с результатами других авторов. Показано, что они, в целом, согласуются. Отличие объяснимо различием используемых тестовых функций.

Таким образом, при одновариантном анализе полосковых структур методом моментов использование разреженного строчного формата позволяет уменьшить не только затраты оперативной памяти, но и время решения СЛАУ итерационным методом с неявным предобуславливанием.

3 УСКОРЕНИЕ МНОГОКРАТНОГО РЕШЕНИЯ СЛАУ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Если время решения отдельных СЛАУ, в среднем, равно T_A , то максимальное ускорение от применения итерационного метода, через отношение общего времени решения m СЛАУ прямым методом (T_D) ко времени решения итерационным с предобусловливанием,

$$\beta_A^{\max} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m \cdot T_D}{T_{PR} + m \cdot T_A} \right) = \frac{T_D}{T_A}, \quad (3.1)$$

где T_{PR} – время формирования \mathbf{M} . Из этого вытекают 2 важных следствия:

Следствие 1. Чем больше число решаемых СЛАУ, тем меньше ускорение зависит от времени построения предобусловливателя, а значит, от выбора вида предобусловливания, способа предфильтрации и оптимального значения допуска обнуления.

Следствие 2. Поскольку максимальное усредненное ускорение обратно пропорционально среднему времени итерационного процесса, то актуально уменьшение времени одной итерации и числа итераций.

На время итерационного процесса влияет начальное приближение. Чем оно ближе к решению, тем меньше итераций надо для его уточнения. Пример зависимости изменения значения диагонального элемента матрицы СЛАУ (Δa) от её номера (k) для рисунка 3.1 приведен на рисунке 3.2. Значение Δa с ростом k изменяется все меньше и не превышает 12%. Таким образом, для данной задачи целесообразно использовать вектор решения предыдущей СЛАУ в качестве начального приближения текущей.

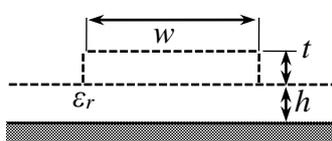


Рисунок 3.1 – Сечение микрополосковой линии

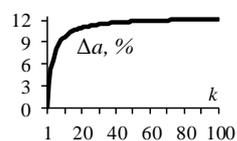


Рисунок 3.2 – Зависимость $\Delta a(k)$

Таблица 3.1 – Ускорение решения 100 СЛАУ

Изменяемый параметр	Вариант			
	1	2	3	4
h	0,48	1,32	6,49	11,77
w	0,31	1,15	5,87	10,98
t	0,37	1,28	2,87	4,92

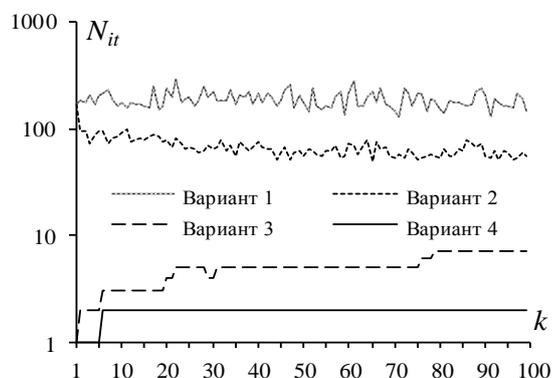


Рисунок 3.3 – Число итераций при решении k -й СЛАУ методом BiCGStab в зависимости от k для вариантов 1–4

Исследованы варианты: 1 – ускорение не использовано; 2 – начальное приближение – вектор решения предыдущей СЛАУ; 3 – матрица \mathbf{M} из матрицы первой СЛАУ; 4 – оба способа ускорения. На рисунке 3.3 приведено изменение N_{it} с ростом k при изменении h из рисунка 3.1, для каждого из вариантов. Отношения общего времени решения методом Гаусса ко времени решения методом BiCGStab для 100 СЛАУ при изменении h, w, t из рисунка 3.1 приведены в таблице 3.1. В варианте 4 число итераций минимально, что снижает общее время решения всех СЛАУ и доказывает эффективность совместного использования способов ускорения.

Сравнивались два варианта начального приближения: фиксированное (все элементы вектора равны 1) при решении каждой СЛАУ; вектор решения предыдущей СЛАУ. Оценено ускорение решения методом BiCGStab относительно метода Гаусса на структуре из рисунка 2.1а. Изменением сегментации границ проводников и диэлектрика получены СЛАУ с $N = 708, 1416, 3540, 4425$. Ускорения решения m СЛАУ сведены в таблицу 3.2.

С ростом m ускорение растет, достигая 49 при $m = 1000$ и $N = 4425$. В последней строке таблицы 3.2 приведены значения, полученные по (3.1). К ним сходятся значения предыдущих строк, подтверждая возможность аналитических оценок ускорения по (3.1) без вычислительного эксперимента. Начальное приближение, равное вектору решения предыдущей СЛАУ, дает большее ускорение, чем фиксированное (в 1,4 раза при $N = 4425$).

Таблица 3.2 – Ускорение (к методу Гаусса) решения m СЛАУ методом BiCGStab

m	Фиксированное начальное приближение				Начальное приближение равно вектору решения предыдущей СЛАУ			
	$N = 708$	$N = 1416$	$N = 3540$	$N = 4425$	$N = 708$	$N = 1416$	$N = 3540$	$N = 4425$
1	0,36	0,51	0,52	0,31	0,36	0,51	0,52	0,31
5	1,37	2,15	2,43	1,52	1,53	2,27	2,49	1,53
10	2,12	3,65	4,53	2,93	2,52	4,00	4,74	2,98
100	4,12	9,58	20,53	18,09	5,70	12,74	24,82	20,42
1000	4,55	11,43	31,71	37,36	6,59	16,32	43,09	49,3
∞	4,61	11,69	33,78	42,43	6,71	16,86	46,96	58,59

Рассмотрены различные условия переформирования \mathbf{M} , ускоряющего многократное решение СЛАУ с изменяющейся матрицей. На примере микрополосковых линий (раздел 3.1.2 диссертации) показано, что эффективность многократного решения СЛАУ снижается с ростом разницы между первой и текущей матрицами СЛАУ, что ведет к росту числа итераций и замедляет решение. Предложено переформировывать матрицу \mathbf{M} для ускорения, когда при решении текущей СЛАУ нет быстрой сходимости.

Сначала использовано переформирование, когда текущее число итераций N_{it} становится выше заданного порога N_{it}^{MAX} . При изменении t на рисунке 3.1, показано (раздел 3.2.2 диссертации), что существует оптимум, при котором ускорение максимально. На рисунке 3.4 приведены изменения N_{it} при

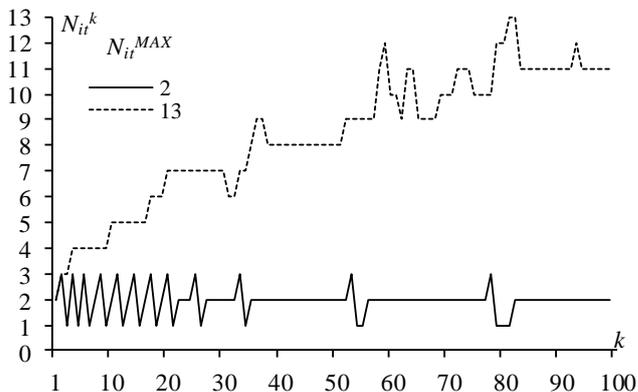


Рисунок 3.4 – Зависимости числа итераций при решении k -й СЛАУ от k

минимальном и максимальном значениях порога. При $N_{it}^{MAX} = 2$ частые переформирования увеличивают общее время решения, поскольку время одного переформирования значительно. При $N_{it}^{MAX} = 13$ переформирований нет, и общие затраты времени определяются затратами на итерации. Но при этом подходе определить значение оптимального порога до начала решения невозможно.

Эффективность итерационного метода при многократном решении СЛАУ определяется суммарным временем решения всех СЛАУ (T_{Σ}):

$$T_{\Sigma} = T_{PR} + \sum_{k=1}^m T_k, \quad (3.2)$$

где T_{PR} – время формирования матрицы \mathbf{M} из матрицы первой СЛАУ, T_k – время решения k -й СЛАУ, m – количество СЛАУ. Используя (3.2), рассмотрим изменение среднего арифметического времени решения k СЛАУ:

$$\bar{T}(k) = \frac{T_{\Sigma}(k)}{k} = \frac{1}{k} \left(T_{PR} + \sum_{j=1}^k T_j \right).$$

Для удобства введем дополнительную величину $s_k = kT_{k+1} - \sum_{j=1}^k T_j$.

Теорема 1. Если s_k монотонно возрастает при $k = 1, 2, \dots, k_*, \dots$ и выполнены условия $s_1 < T_{PR}$ и $s_{k_*} < T_{PR} \leq s_{k_*+1}$ для некоторого $k_* \geq 1$, то для этого k_* достигается единственный минимум функции $\bar{T}(k)$.

Теорема 2. Если при $k = 1, 2, \dots$ выполняются условия $T_k = t$ и $t < T_{PR}$, то функция $\bar{T}(k)$ убывает и стремится к t .

Условия, указанные в теореме 1, выполняются при многократном решении СЛАУ, т.е. для монотонного увеличения s_k достаточно увеличения времени решения k -й СЛАУ (T_k). Как правило, решение первой СЛАУ происходит значительно быстрее, чем время формирования матрицы \mathbf{M} , т.е. выполняется условие $s_1 < T_{PR}$. Из этого следует существование единственного минимума функции $\bar{T}(k)$, что позволяет использовать его для переформирования \mathbf{M} . Для подтверждения вычислена ёмкость для рисунка 3.5а. Из зависимостей T_k и $\bar{T}(k)$ рисунка 3.6 виден минимум среднего арифметического (при $k = 52$), подтверждающий сделанное предположение.

При использовании среднего арифметического времени решения трудно точно измерить время. Поэтому предложено перейти от измерения времени к оценке сложности алгоритмов: арифметической и O -нотации. Для верификации оценок проведен вычислительный эксперимент. В системе TALGAT сформированы по 100 матриц для трех структур: 1 (рисунок 3.5а) – $N = 1600$ для $t = 6, 7, \dots, 105$ мкм; 2 (рисунок 3.5б) – $N = 2001$ для $s = 100, 101, \dots, 199$ мкм; 3 (рисунок 3.5в) – $N = 1709$ для $s = 16,9; 16,8; \dots; 7,1$ мкм. Учащая сегментацию, получены матрицы с $N = 3200, 3001$ и 3109 .

Ускорения решения 100 СЛАУ для структур 1, 2 и 3 по отношению к алгоритму без переформирования \mathbf{M} сведены в таблицу 3.3. Также приведены результаты для заданного оптимального порога числа итераций. На рисунке 3.7 показано N_{it} при решении k -й СЛАУ методом BiCGStab для структуры 2 при $N = 3001$. Другой ресурс ускорения – очередность решения СЛАУ. Обычно она задается изменением параметра структуры. Но если общее время решения всех СЛАУ зависит от того, какая именно СЛАУ решается первой, какая – второй и т.д., то существует оптимальная очередность, минимизирующая время решения. Эта зависимость следует из самой сути

многократного решения СЛАУ итерационным методом с предобуславливанием. Она определяется выбором матрицы для вычисления \mathbf{M} (то, какая из матриц выбрана, влияет на N_{it} для решения последующих СЛАУ) и использованием решения предыдущей СЛАУ в качестве начального приближения текущей (чем ближе начальное приближение к решению, тем меньше N_{it}). Рассмотрено линейное изменение параметра, сводящее к тривиальному выбору порядка решения: по возрастанию параметра (прямой порядок) или его убыванию (обратный порядок). В таблицу 3.3 сведены полученные ускорения при обратном порядке решения СЛАУ относительно прямого. Для всех структур есть ускорение, причем для всех N и обоих методов. Оно достигается разницей в N_{it} при решении СЛАУ в прямом (N_{it}^+) и обратном (N_{it}^-) порядках, по площади фигуры, между этими кривыми (рисунок 3.8а, для метода BiCGStab).

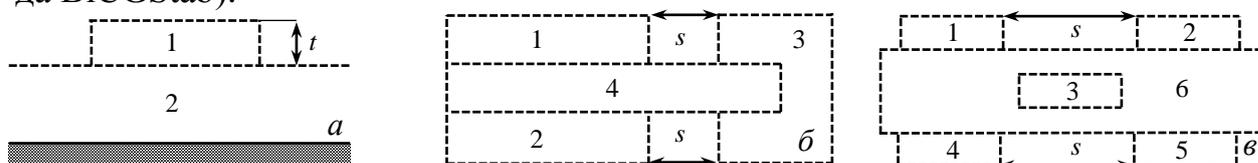


Рисунок 3.5 – Вид поперечного сечения исследуемых структур: 1 – проводник (1) на диэлектрической подложке (2) над идеально проводящей плоскостью (а); 2 – симметричный модальный фильтр с лицевой связью (1–3 – проводники, 4 – диэлектрик) (б); 3 – зеркальный симметричный модальный фильтр (1–5 – проводники, 6 – диэлектрик) (в)

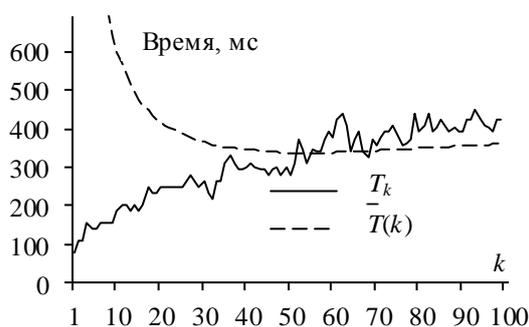


Рисунок 3.6 – Зависимости от k времени: решения k -й СЛАУ (T_k) и среднего арифметического ($\bar{T}(k)$)

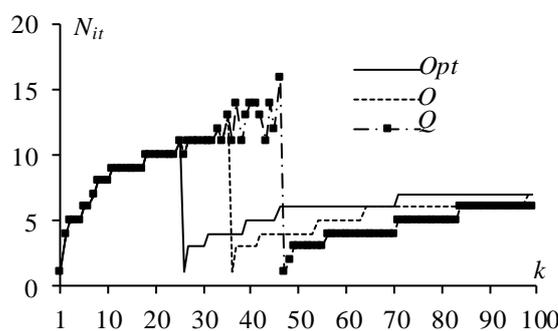


Рисунок 3.7 – Число итераций при перестроении по O -нотации (O), арифметической сложности (Q) и оптимальному порогу числа итераций (Opt)

Таблица 3.3 – Ускорение решения 100 СЛАУ методами BiCGStab и CGS с перестроением \mathbf{M} по разным условиям и с обратным порядком решения СЛАУ

Стр-ра	N	Оптимальный порог N_{it} (указан в скобках)		O -нотация		Средняя арифметическая сложность		Обратный порядок относительно прямого	
		BiCGStab	CGS	BiCGStab	CGS	BiCGStab	CGS	BiCGStab	CGS
		1	1600	1,42 (8)	1,34 (7)	1,12	1,40	1,20	1,52
	3200	1,16 (8)	1,35 (7)	0,86	1,01	0,92	1,27	1,63	1,66
2	2001	1,62 (10)	1,44 (8)	1,52	1,05	1,60	0,94	1,71	1,58
	3001	1,58 (10)	1,31 (9)	1,44	0,95	1,55	0,87	1,84	1,53
3	1709	1,12 (9)	1,18 (8)	1,55	1,57	1,55	1,57	1,82	1,59
	3109	1,03 (10)	1,00(16)	1,59	1,33	1,59	1,33	1,83	1,32

Таким образом, выбор очередности решения СЛАУ позволяет ускорить многовариантный анализ полосковых структур методом моментов: на рассмотренных примерах до 1,84 раза.

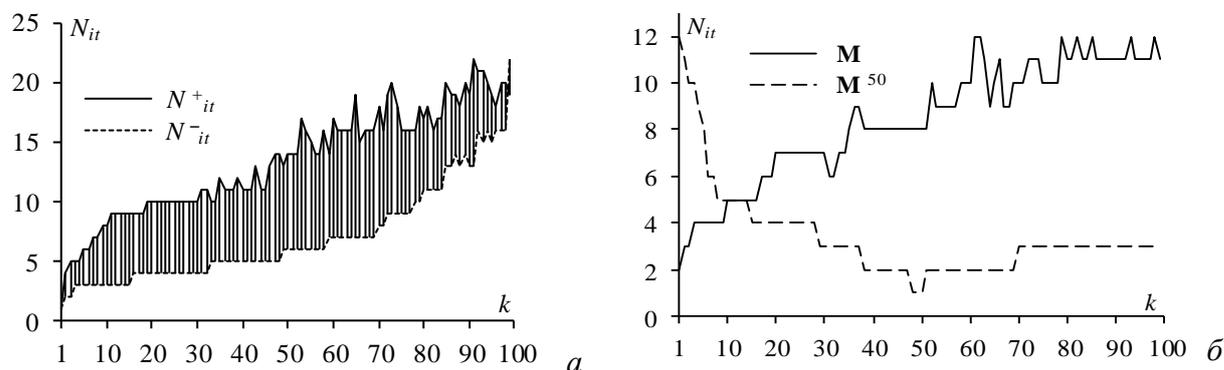


Рисунок 3.8 – Число итераций при решении k -й СЛАУ методом BiCGStab: в прямом (N_{it}^+) и обратном (N_{it}^-) порядках (а); для предобусловливателя, полученного из первой (\mathbf{M}^1) и 50-й (\mathbf{M}^{50}) матриц СЛАУ (б)

Еще один ресурс – выбор номера матрицы СЛАУ для \mathbf{M} . Проведен вычислительный эксперимент с выбором 50-й матрицы для \mathbf{M} при порядке решения с 1-й по 100-ю СЛАУ. В таблице 3.4 приведены ускорения относительно выбора 1-й матрицы для \mathbf{M} . Для всех структур и N есть ускорение (до 2,21 для структуры 1 при $N = 3200$), за счет снижения общего числа итераций. На рисунке 3.8б приведено N_{it} при решении k -й СЛАУ для случаев с предобусловливателем, полученным из первой (\mathbf{M}^1) и из 50-й (\mathbf{M}^{50}) матриц СЛАУ. Видно, что N_{it} для \mathbf{M}^{50} значительно меньше, чем для \mathbf{M}^1 , эта разница и объясняет ускорение.

Таблица 3.4 – Ускорение решения 100 СЛАУ для \mathbf{M}^{50}

Стр-ра	N	BiCGStab
1	1600	2,07
	3200	2,21
2	2001	2,14
	3001	1,94
3	1709	1,81
	3109	1,86

Таким образом, при многовариантном анализе полосковых структур методом моментов выбор 50-й матрицы для формирования предобусловливателя позволяет уменьшить время решения 100 СЛАУ стабилизированным методом бисопряженных градиентов до 2,21 раза.

Исходная математическая модель многократного вычисления ёмкостных матриц методом моментов в диапазоне изменения параметра, с использованием итерационного метода с предобусловливателем, полученным из первой СЛАУ, может быть представлена как $\mathbf{C}_i = F(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, t$, где \mathbf{C}_i – ёмкостная матрица, соответствующая значению x_i , x_i – значение изменяющегося параметра, t – число изменений.

Исходя из результатов разделов 3.3 и 3.4, предложена математическая модель с дополнительными параметрами, позволяющая уменьшить время моделирования: $\mathbf{C}_i = F(x_i, O, N_M)$, где O – параметр, задающий порядок (прямой или обратный), N_M – номер матрицы СЛАУ для вычисления предобусловливателя \mathbf{M} . Добавленные параметры не изменяют итерационный метод и метод вычисления ёмкостной матрицы, не оказывая существенного влияния на точность вычислений, поскольку она контролируется задаваемым значением Tol .

4 КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ СЛАУ

Программная реализация алгоритмов многократного решения СЛАУ выполнена с помощью консольных приложений, в среде Microsoft Visual C++. Исходные коды приведены в Приложении А к диссертации. Функциональная схема программного комплекса приведена на рисунке 4.1.

Таким образом, разработан программный комплекс для решения СЛАУ итерационными методами *BiCGStab* и *CGS*. В нём реализованы разработанные алгоритмы для ускорения как однократного решения СЛАУ, за счет модифицированного разреженного строчного формата хранения матриц (гл. 2), так и многократного, за счет ряда усовершенствований (гл. 3).

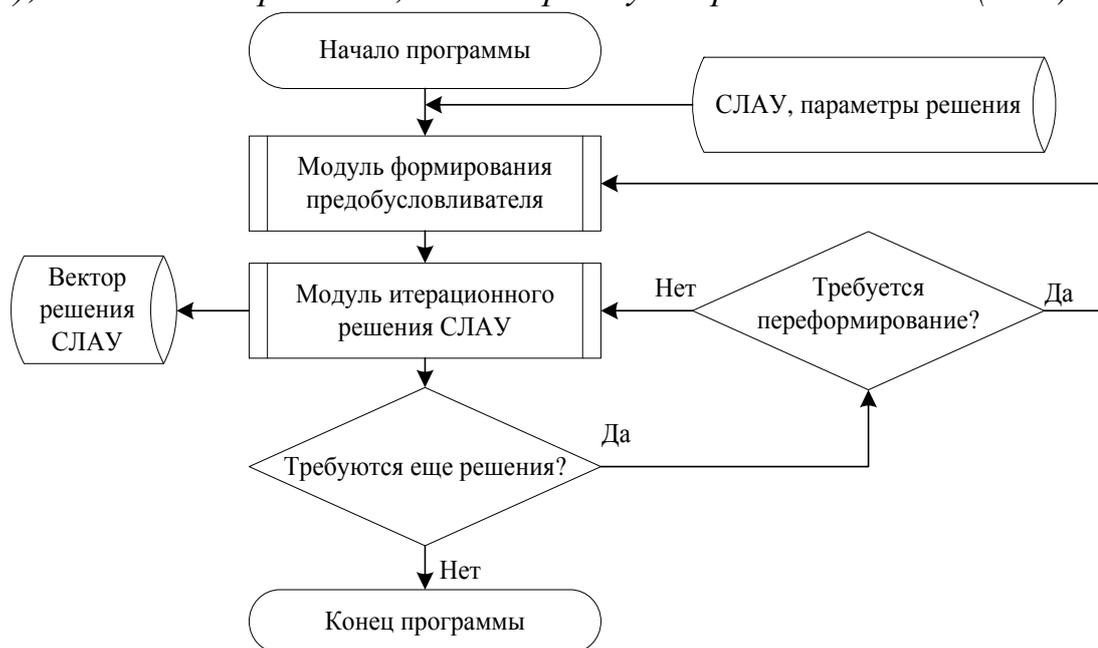


Рисунок 4.1 – Функциональная схема комплекса программ

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ЗаклЮчении диссертации перечислены её основные результаты, показывающие, что цель работы достигнута, а полученные результаты имеют значение для технических наук в областях исследования №3, 4, 5 паспорта специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

ПУБЛИКАЦИИ ПО МАТЕРИАЛАМ ДИССЕРТАЦИИ

Монография

1. Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р., Орлов П.Е. Многократное решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами с предобусловливанием в задачах электромагнитной совместимости. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2015. – 152 с.

Статьи в журналах из перечня ВАК

2. Лежнин Е.В. Алгоритм $ILU(0)$ -разложения с использованием OpenMP / Е.В. Лежнин, Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко // Докл. Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники. – 2015. – № 3(37). – С. 181–183.

3. Ахунов Р.Р. Простой способ ускорения вычисления емкостных матриц полосковой структуры при изменении её геометрического параметра / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Докл. Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники. – 2015. – № 4. – С. 144–148.

4. Ахунов Р.Р. Анализ полосковых структур радиоэлектронных устройств с уменьшенными вычислительными затратами // Докл. Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники. – 2017. – № 2 (20). – С. 96–99.

Статьи в журналах из перечня ВАК, индексируемых в Scopus

5. Akhunov R.R. Sparse matrix storage formats and acceleration of iterative solution of linear algebraic systems with dense matrices / R.R. Akhunov, S.P. Kuksenko, V.K. Salov, T.R. Gazizov // Journal of mathematical sciences. – 2013. – V. 191 (№ 1). – P. 10–18.

6. Akhunov R.R. Optimization of the ILU(0) factorization algorithm with the use of compressed sparse row format / R.R. Akhunov, S.P. Kuksenko, V.K. Salov, T.R. Gazizov // Journal of mathematical sciences. – 2013. – V. 191 (№1). – P. 19–27.

7. Akhunov R.R. Multiple iterative solution of linear algebraic systems with a partially varying matrix / R.R. Akhunov, S.P. Kuksenko, V.K. Salov, T.R. Gazizov // Journal of mathematical sciences. – 2014. – V. 199 (№4). – P. 381–385.

8. Akhunov R.R. Acceleration of multiple iterative solution of linear algebraic systems in computing the capacitance of a microstrip line in wide ranges of its sizes / R.R. Akhunov, S.P. Kuksenko, T.R. Gazizov // Journal of mathematical sciences. – 2015. – V. 207 (№ 5). – P. 686–692.

9. Akhunov R.R. Multiple solution of systems of linear algebraic equations by an iterative method with recomputed preconditioners / R.R. Akhunov, S.P. Kuksenko, T.R. Gazizov // Journal of mathematical sciences. – 2015. – V. 207 (№ 5). – P. 693–697.

10. Ahunov R.R. Multiple solution of systems of linear algebraic equations by an iterative method with the adaptive recalculation of the preconditioner / Ahunov R.R., Kuksenko S.P., Gazizov T.R. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2016. – V. 56 (№ 8). – P. 1382–1387.

Публикации в зарубежных журналах

11. Gazizov T.R. Acceleration of multiple solution of linear systems for analyses of microstrip structures /T.R. Gazizov, S.P. Kuksenko, R.R. Akhunov// International journal of mathematical models and methods in applied sciences. – 2015. Vol. 9. – P. 721–726.

12. Kuksenko S.P. Choosing order of operations to accelerate strip structure analysis in parameter range / S.P. Kuksenko, R.R. Ahunov, T.R. Gazizov // Journal of Physics: Conf. Series. – 2018. Vol. 1015 (3). – P. 032076.

Статьи в отечественных журналах

13. Ахунов Р.Р. Вычисление матрицы емкостей произвольной системы проводников и диэлектриков методом моментов: оценка использования разреженного строчного формата при решении СЛАУ методом BiCGstab / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2012. – Т. 55 (7/2). – С. 27–30.

14. Газизов Т.Р. Пути решения актуальных проблем проектирования радиоэлектронных средств с учетом электромагнитной совместимости / Т.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий, А.О. Мелкозеров, С.П. Куксенко, П.Е. Орлов, В.К. Салов, И.Ф. Калимулин, Р.Р. Аширбакиев, Р.Р. Ахунов, Р.С. Суровцев, М.Е. Комнатнов // Техника радиосвязи. – 2014. – № 2 (22). – С. 11–22.

Доклады в материалах зарубежных конференций

15. New results on EMC simulation for space projects of TUSUR University / T. Gazizov, A. Melkozerov, P. Orlov, V. Salov, R. Ashirbakiev, R. Akhunov, S. Kuksenko, I. Kalimulin // IEEE Int. Conf. on Numerical Electromagnetic Modeling and Optimization for RF, Microwave, and Terahertz Applications. May 14–16, 2014, Pavia, Italy. – P. 1–4.

16. T. Gazizov, A. Melkozerov, A. Zabolotsky, S. Kuksenko, P. Orlov, V. Salov, R. Akhunov, I. Kalimulin, R. Surovtsev, M. Komnatnov, A. Gazizov. Ensurance and simulation of electromagnetic compatibility: recent results in TUSUR University. Int. Conf. on Applied Physics, Simulation and Computers, Vienna, Austria, 15–17 March 2015. – P. 152–161.

17. S.P. Kuksenko, T.R. Gazizov, A.M. Zabolotsky, R.R. Ahunov, R.S. Surovtsev, V.K. Salov, Eg.V. Lezhnin. New developments for improved simulation of interconnects based on method of moments. Advances in Intelligent Systems Research. Proc. of the 2015 Int. Conf. on Modelling, Simulation and Applied Mathematics. August 23–24, 2015, Phuket, Thailand. – P. 1–8.

18. R.R. Ahunov, S.P. Kuksenko, T.R. Gazizov. Multiple solution of linear algebraic systems by an iterative method with recomputed preconditioner in the analysis of microstrip structures. Proc. of the 13th Int. Conf. of Numerical Analysis and Applied Mathematics. Sept. 23–29, 2015, Rhodes, Greece. – P. 1–4.

Доклады в материалах отечественных конференций

19. Лемешко К.А. Оценка эффективности алгоритма многократного вычисления емкостной матрицы полосковых структур на основе блочного LU-разложения/ К.А. Лемешко, Р.Р. Ахунов, М.С. Танаева, О.К. Шпякина // Межд. науч.-техн. конф. студ., асп. и молодых учёных «Научная сессия ТУСУР-2017». – Томск. – 2017. – С. 64–67.

20. Ахунов Р.Р. Обзор форматов хранения разряженных матриц // Научная сессия ТУСУР-2010: Материалы докладов Всерос. научно-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Томск, 4–7 мая 2010 г. – Томск: В-Спектр, 2010. – В пяти частях. Ч. 1. – С. 137–139.

21. Салов В.К., Куксенко С.П., Комнатнов М.Е., Ахунов Р.Р., Мелкозеров А.О., Аширбакиев Р.И. Газизов Т.Р. Ускорение вычислений в задачах моделирования ЭМС. Труды 9-го Межд. Симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии, г. Санкт-Петербург, 13–16 сентября 2011 г. – С. 269–272.

22. Ахунов Р.Р. Ускорение многократного решения СЛАУ с изменяющейся матрицей / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко. – Межд. конф. «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015», посвященная 90-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука, Новосибирск, 19–23 октября. – 2015. – С. 84–90.

Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

23. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013619615. TALGAT 2012. Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П., Заболоцкий А.М. и др. Всего 15 чел. Заявка №2013617773. Дата поступления 29 августа 2013 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11 октября 2013 г.

24. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №20156143. TALGAT 2013. Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П., Заболоцкий А.М. и др. Всего 15 чел. Заявка № 2015611288. Дата поступления 03 марта 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16 апреля 2015 г.

25. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617550. TALGAT 2014. Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П., Заболоцкий А.М. и др. Всего 17 чел. Заявка №2015614488. Дата поступления 27 мая 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 17 июля 2015 г.

26. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015660487. TALGAT 2015. Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П., Заболоцкий А.М., и др. Всего 16 чел. Заявка №2015617580. Дата поступления 17 августа 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 01 октября 2015 г.

27. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016662520. TALGAT 2016. Заявка №20166619296. Дата поступления 01 сентября 2016 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 14 ноября 2016 г. Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П., Заболоцкий А.М., Газизов Русл.Р., и др. Всего 24 чел. Заявка №20166619296. Дата поступления 01 сентября 2016 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 14 ноября 2016 г.

28. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615835. ILU(0)-разложение матрицы, хранимой в разреженном строчном формате, с последовательным перебором элементов. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612781. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.

29. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615730. Организация хранения плотной матрицы в модифицированном строчном разреженном формате после предфильтрации, основанной на максимальном элементе матрицы. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612891. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22 мая 2015 г.

30. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616205. ILU(0)-разложение матрицы, хранимой в модифицированном разреженном строчном формате. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612783. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 03 июня 2015 г.

31. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616124. ILU(0)-разложение матрицы, хранимой в модифицированном разреженном строчном формате, с использованием вспомогательного вектора. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612895. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 01 июня 2015 г.

32. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616321. Решение СЛАУ с матрицей, полученной с помощью ILU(0)-разложения и хранимой в модифицированном разреженном строчном формате. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612893. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05 июня 2015 г.

33. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616322. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGstab с использованием при решении текущей системы вектора решения предыдущей. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612894. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05 июня 2015 г.

34. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616320. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGStab с использованием матрицы предобусловливания, полученной при решении первой системы. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612892. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05 июня 2015 г.

35. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615837. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGStab с использованием переформирования матрицы предобусловливания по заданному порогу числа итераций. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612782. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.

36. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615729. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGStab с переформированием матрицы предобусловливания при превышении среднего времени решения одной системы. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612890. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22 мая 2015 г.

37. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018611481. TALGAT 2017. Заявка №2017663209. Дата поступления 13 декабря 2017 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02 февраля 2018 г. Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П., Заболоцкий А.М., и др. Всего 23 чел. Заявка №2017663209. Дата поступления 13 декабря 2017 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02 февраля 2018 г.