

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

«Томский государственный университет

систем управления и радиоэлектроники» (ТУСУР)

На правах рукописи



Куксенко Сергей Петрович

Методы оптимального проектирования линейных антенн и полосковых структур
с учетом электромагнитной совместимости

Специальность 05.12.07

Антенны, СВЧ-устройства и их технологии

Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук

Научный консультант

д.т.н., доцент Газизов Тальгат Рашитович

Томск – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ С УЧЁТОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СОВМЕСТИМОСТИ	18
1.1 Актуальность совершенствования проектирования радиоэлектронных средств	18
1.2 Моделирование радиоэлектронных средств	22
1.3 Численные методы	24
1.3.1 Метод моментов.....	25
1.3.2 Другие численные методы	48
1.4 Программы для моделирования радиоэлектронных средств	56
1.4.1 Схемотехническое и квазистатическое моделирование.....	57
1.4.2 Электродинамическое моделирование	59
1.5 Методы построения сетки	71
1.6 Методы решения СЛАУ	73
1.6.1 Форматы хранения матриц	75
1.6.2 Прямые методы	76
1.6.3 Итерационные методы	79
1.7 Цель и задачи работы	95
2 ПРЕДЛОЖЕННЫЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ НА ОДНОВАРИАНТНЫЙ АНАЛИЗ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ.....	97
2.1 Совершенствование алгебраической предфильтрации	97
2.2 Уменьшение вычислительных затрат за счёт оптимального выбора сетки.....	99
2.3 Ускорение заполнения матрицы СЛАУ	106
2.4 Совершенствование $ILU(0)$ -разложения	107
2.5 Основные результаты раздела	124
3 ПРЕДЛОЖЕННЫЕ МЕТОДЫ УСКОРЕНИЯ МНОГОВАРИАНТНОГО АНАЛИЗА РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ.....	125
3.1 Общие замечания.....	125
3.2 Методы ускорения итерационного решения СЛАУ при изменении параметров структуры	126
3.2.1 Выбор начального приближения	127

3.2.2	Переформирование предобусловливателя	129
3.2.3	Выбор очередности решения	134
3.2.4	Выбор матрицы для вычисления предобусловливателя.....	135
3.3	Использование метода блочного LU-разложения для ускорения решения СЛАУ при изменении параметров структуры	136
3.3.1	Изменение диэлектрической проницаемости диэлектрика.....	136
3.3.2	Изменение высоты диэлектрика.....	152
3.3.3	Произвольное изменение геометрических параметров	156
3.4	Гибридизация прямого и итерационного методов	159
3.5	Математические модели для многократного вычисления ёмкостной матрицы проводных и полосковых структур методом моментов	159
3.6	Основные результаты раздела.....	160
4	СОЗДАНИЕ ПРОГРАММ ДЛЯ АНАЛИЗА РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ С УМЕНЬШЕННЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ ЗАТРАТАМИ	162
4.1	Программы для итерационного решения СЛАУ	162
4.2	Система TALGAT.....	168
4.2.1	Функциональные возможности.....	168
4.2.2	Модуль матричных операций.....	169
4.2.3	Усовершенствованные вычислительные модули.....	177
4.2.4	Модуль вычислений на графическом процессоре	184
4.2.5	Модуль вычисления эффективности экранирования корпуса.....	184
4.2.6	Вспомогательный инструментарий	186
4.3	Основные результаты раздела.....	187
5	УМЕНЬШЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ НА ОДНОВАРИАНТНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН И ПОЛОСКОВЫХ СТРУКТУР	188
5.1	Итерационное решение СЛАУ при анализе линейных антенн	188
5.1.1	Сравнение итерационных методов с учётом предобусловливания	188
5.1.2	Оптимизация допуска обнуления.....	194
5.1.3	Ускорение анализа за счет снижения его точности	198
5.1.4	Сравнение способов предфильтрации	200
5.1.5	Влияние утаивания сетки на оптимальное значение параметров предфильтрации.....	211

5.1.6	Дополнительное сравнение способов предфильтрации.....	215
5.1.7	Рекомендации для анализа линейных антенн	219
5.2	Построение сетки, формирование матрицы и решение СЛАУ при анализе полосковых структур.....	221
5.2.1	Построение сетки	221
5.2.2	Формирование матрицы СЛАУ	225
5.2.3	Итерационное решение СЛАУ	226
5.2.4	Рекомендации для анализа полосковых структур.....	235
5.3	Основные результаты раздела	235
6	УСКОРЕНИЕ МНОГОВАРИАНТНОГО АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ ПРОВОДНЫХ И ПОЛОСКОВЫХ СТРУКТУР	237
6.1	Ускорение за счёт совершенствования итерационного решения СЛАУ	237
6.1.1	Выбор начального приближения	237
6.1.2	Переформирование предобусловливателя	244
6.1.3	Выбор оптимальной очередности решения	256
6.1.4	Выбор оптимальной матрицы для вычисления предобусловливателя.....	260
6.2	Ускорение за счёт использования блочного LU-разложения при решении СЛАУ	267
6.2.1	Изменение диэлектрической проницаемости диэлектрика	267
6.2.2	Изменение высоты диэлектрика.....	284
6.2.3	Произвольное изменение геометрических параметров	286
6.3	Ускорение за счёт использования гибридного метода решения СЛАУ	289
6.4	Рекомендации для многовариантного анализа и оптимизации полосковых структур.....	293
6.5	Основные результаты раздела.....	294
7	ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ	298
7.1	Организации	298
7.1.1	АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнёва».....	298
7.1.2	ОАО «НПЦ «Полус».....	299
7.1.3	ФГУП «ЦентрИнформ».....	299
7.1.4	ООО «Эремекс».....	300
7.1.5	Главное управление МЧС по Томской области.....	300
7.2	ФЦП ИР	301

7.2.1 ОКР по теме «УЭМ-ТУСУР».....	301
7.2.2 ОКР по теме «САН».....	303
7.2.3 ОКР по теме «Модули ЭПК-100».....	304
7.2.4 ПНИ RFMEFI57417X0172	306
7.3 Государственные задания	309
7.3.1 НИР по проектной части	309
7.3.2 НИР по базовой части	310
7.3.3 Инновационная программа ТУСУРа	311
7.4 Гранты РФФИ и РНФ	311
7.4.1 НИР по гранту РФФИ а	311
7.4.2 НИР по гранту РФФИ мол_а.....	311
7.4.3 НИР гранту РФФИ офи_м	315
7.4.4 НИР по гранту РНФ	316
7.5 Результаты интеллектуальной деятельности	317
7.5.1 Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.....	317
7.5.2 Патенты на полезную модель	318
7.5.3 Патенты на изобретения	318
7.6 Учебный процесс.....	318
7.6.1 ТУСУР.....	318
7.6.2 НИ ТГУ.....	319
7.7 Основные результаты раздела.....	319
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	321
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	326
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	329
ПРИЛОЖЕНИЕ А (ОБЯЗАТЕЛЬНОЕ) КОПИИ ДОКУМЕНТОВ.....	376

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

С конца XIX века началось, продолжающееся до сих пор, активное проникновение во все сферы современного общества различных радиоэлектронных средств (РЭС). Достижения в области радиотехники и электроники, а также в вычислительных, информационных, телекоммуникационных и других технологиях, очень способствуют этому. При этом основными элементами РЭС являются антенны и сверхвысокочастотные (СВЧ) устройства. Так, например, линейные (проволочные) антенны являются основой сетей ведомственной дальней связи различных силовых структур и ведомств, а основу СВЧ-устройств составляют полосковые структуры. Однако общая тенденция развития РЭС обостряет проблему электромагнитной совместимости (ЭМС), появившуюся со времен первых радиопередатчиков.

Производство РЭС требует регулярного и быстрого появления с минимальными затратами всё более совершенных их видов. При этом конструктивное усложнение РЭС и ужесточение требований ЭМС, обусловленное ростом верхних частот полезных и помеховых сигналов, плотности монтажа, а также возможностей генераторов преднамеренных электромагнитных воздействий, в совокупности с необходимостью учёта межэлементных, межблочных и межсистемных взаимовлияний, требует всё более тщательного проектирования РЭС. Однако это становится невозможным без компьютерного моделирования, позволяющего экономить требуемые для разработки временные и финансовые ресурсы, а также оценить правильность принятых технических решений.

В ходе проектирования, как правило, выполняется многовариантный анализ или оптимизация изделия. При этом используются методы вычислительной электродинамики (одним из которых является метод моментов). В их основе лежит замена непрерывных функций их дискретными аналогами (построение сетки), что сводит задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Учет требований ЭМС приводит к очень большому порядку (определяемому сложностью моделируемого объекта и окружающего его пространства) и количеству (определяемому верхней частотой помехового сигнала, количеством и диапазоном оптимизируемых параметров) решаемых систем. Это резко увеличивает вычислительные затраты, что становится главной преградой для оптимального проектирования, так что уменьшение вычислительных затрат на анализ и оптимизацию элементов РЭС (в частности, линейных антенн и полосковых структур) при их проектировании с учётом ЭМС является актуальной научной проблемой.

Разработанность темы

Разработке научных основ проектирования новых РЭС посвятили свои работы Баланис К., Воскресенский Д.И., Неганов В.А., Нефедов Е.И., Никольский В.В., Малютин Н.Д. и др. В решение задач ЭМС РЭС большой вклад внесли Кечиев Л.Н., Князев А.Д., Отт Г., Пауль К. и др., а в разработку теории метода моментов – Джорджевич А., Кравчук М.Ф., Крылов Н.М., Митра Р., Саркар Т., Харрингтон Р. и др.

Разработке, систематизации и применению методов решения СЛАУ посвятили свои работы Аксельсон О., Бензи М., Воеводин В.В., Ван дер Ворст Х., Голуб Дж., Дафф И.С., Деммель Дж., Донгарра Дж., Ильин В.П., Колотилина Л.Ю., Марчук Г.И., Ван Лоун Ч., Саад Ю., Самарский А.А., Тихонов А.Н., Тума М., Тыртышников Е.Е., Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н., Хакбуш В., Хигхам Н. и др.

Цель работы – разработать методы уменьшения вычислительных затрат на проектирование линейных антенн и полосковых структур с учетом электромагнитной совместимости.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести обзор существующих методов и подходов в области проектирования РЭС и уменьшения вычислительных затрат на проектирование.
2. Разработать методы уменьшения вычислительных затрат на одновариантный анализ.
3. Разработать методы ускорения многовариантного анализа.
4. Реализовать разработанные методы в программах для анализа РЭС.
5. Выполнить апробацию разработанных методов на конкретных задачах анализа и оптимизации.

Научная новизна (оригинальные результаты в соответствии с паспортом специальности 05.12.07 Антенны, СВЧ-устройства и их технологии: область исследований, п. 9 – разработка методов проектирования и оптимизации антенных систем и СВЧ-устройств широкого применения)

1. Предложено совершенствование электродинамического анализа линейных антенн методом моментов, отличающееся использованием итерационного решения системы линейных алгебраических уравнений с вычислением предобусловливателя на основе алгебраической предфильтрации по евклидовой норме строк матрицы системы.

2. Разработаны два метода квазистатического анализа полосковых структур, отличающихся использованием модифицированного адаптивного итерационного выбора оптимальной

сегментации и итерационного решения системы линейных алгебраических уравнений с неполным LU-разложением и модифицированным разреженным строчным форматом хранения предобусловливателя.

3. Предложено совершенствование квазистатического анализа полосковых структур в диапазоне параметров методом моментов, отличающееся адаптивным переформированием предобусловливателя по средним арифметическим значениям времени и сложности итерационного решения последовательности систем линейных алгебраических уравнений.

4. Доказано, что время квазистатического анализа полосковых структур в диапазоне параметров методом моментов может зависеть от выбора очередности (с начала, конца или середины диапазона) решения полученной последовательности систем линейных алгебраических уравнений.

5. Разработан метод квазистатического анализа полосковых и проводных структур в диапазоне параметров, отличающийся решением последовательности систем линейных алгебраических уравнений на основе блочного LU-разложения или его гибридизации с итерационным методом.

Теоретическая значимость

1. Доказаны две теоремы об условиях существования минимума и убывания зависимости среднеарифметического времени решения последовательности систем линейных алгебраических уравнений от их числа при квазистатическом анализе полосковых структур в диапазоне параметров методом моментов.

2. Применительно к анализу методом моментов и оптимизации линейных и полосковых структур результативно использованы численные методы вычислительной линейной алгебры.

3. Изложены доказательства существования, при электродинамическом анализе линейных антенн методом моментов с предложенными способами алгебраической предфильтрации, оптимального значения допуска обнуления по критерию минимального времени решения системы линейных алгебраических уравнений, а также влияния, при квазистатическом анализе полосковых структур в диапазоне параметров методом моментов, выбора очередности итерационного решения системы линейных алгебраических уравнений на время анализа.

4. Изучены причинно-следственные связи, возникающие при анализе линейных антенн и полосковых и линейных структур методом моментов: установлено как изменения параметров исследуемой структуры изменяют матрицу системы линейных алгебраических уравнений и то, как эти изменения можно использовать для ускорения анализа.

5. Проведена модернизация математических моделей, численных методов и алгоритмов для анализа полосковых структур и линейных антенн методом моментов, обеспечивающих уменьшение вычислительных затрат на их проектирование с учётом электромагнитной совместимости.

6. Получены аналитические оценки для квазистатического анализа полосковых структур: коэффициента сжатия форматов хранения разреженных матриц; арифметической сложности блочного LU-разложения; максимально возможного ускорения решения системы линейных алгебраических уравнений (относительно метода исключения Гаусса) за счёт использования итерационного метода с предобуславливанием и блочного LU-разложения.

Практическая значимость

1. Разработаны и внедрены методы уменьшения вычислительных затрат на анализ и оптимизацию элементов радиоэлектронных средств в организациях: АО «ИСС», г. Железногорск (создание космических аппаратов Экспресс-АТ1, Экспресс-АТ2, Экспресс-80, Экспресс-103, Экспресс-АМУ3, Экспресс-АМУ7 и Экспресс-АМ8); АО «НПЦ «Полюс», г. Томск (анализ печатных плат и кабелей); МЧС России по Томской области, г. Томск (моделирование сети ведомственной связи и защита сетевого оборудования Fast Ethernet); ООО «Эремекс», г. Санкт-Петербург (разработка математических моделей для вычисления задержек в меандровых линиях задержки печатных плат); НИ ТГУ и ТУСУР, г. Томск (подготовка бакалавров, магистров и аспирантов).

2. Определены пределы и перспективы применения: в электродинамическом анализе линейных антенн методом моментов с изменением частоты сигнала и сегментации – оптимального (по критерию минимального времени анализа) значения порога/допуска обнуления при алгебраической предфильтрации; в квазистатическом анализе полосковых структур методом моментов – итерационного уращения сетки, модифицированного разреженного формата хранения матрицы при неполном LU-разложении, а также блочного LU-разложения и его гибридизации с итерационным методом при многократном решении системы линейных алгебраических уравнений.

3. Создана система практических рекомендаций по уменьшению вычислительных затрат на электродинамический анализ линейных антенн и квазистатический анализ полосковых и проводных структур за счёт усовершенствования построения сетки, формирования матрицы и решения системы линейных алгебраических уравнений.

4. Созданы программы, позволяющие моделирование с уменьшенными вычислительными затратами новых радиоэлектронных средств и их элементов, включая печатные платы, соединители, модальные фильтры, одиночные и связанные микрополосковые линии передачи, линейные антенны и отводы силовой шины электропитания, за счёт использования при решении системы линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей прямых и итерационных методов, трёх модификаций $LU(0)$ -разложения, выбора очередности решения и матрицы для вычисления предобусловливателя и трёх критериев переформирования предобусловливателя.

Методология и методы исследования. В работе применялись квазистатический и электродинамический анализ, метод моментов, теория линий передачи, теория антенн, теория матриц, прямые и итерационные методы решения СЛАУ, компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент, оценка вычислительной сложности, объектно-ориентированное программирование.

Положения, выносимые на защиту

1. Электродинамический анализ линейных антенн методом моментов с ускорением итерационного решения системы линейных алгебраических уравнений, за счёт использования предобусловливания и алгебраической предфильтрации на основе евклидовой нормы строк матрицы системы, характеризуется стабильностью оптимального (по критерию минимального времени решения) значения допуска обнуления при изменении частоты сигнала.

2. При квазистатическом анализе полосковых структур методом моментов использование модифицированного адаптивного итерационного выбора оптимальной сегментации и неполного LU -разложения, в сочетании с модифицированным разреженным строчным форматом хранения матрицы для вычисления предобусловливателя при итерационном решении системы линейных алгебраических уравнений, уменьшает вычислительные затраты (памяти до 2-х раз, а времени до 4-х раз, при вычислении ёмкостной матрицы).

3. При квазистатическом анализе полосковых структур в диапазоне параметров методом моментов использование итерационного решения последовательности систем линейных алгебраических уравнений с переформированием предобусловливателя по средним арифметическим значениям времени и сложности решения позволяет адаптивно и без участия пользователя минимизировать время решения (ускорение до 1,6 раза при вычислении 100 ёмкостных матриц относительно случая без переформирования).

4. Квазистатический анализ полосковых структур в диапазоне параметров методом моментов ускоряется за счёт оптимального (по критерию минимального времени анализа) выбора очередности итерационного решения полученной последовательности систем линейных алгебраических уравнений (до 2,2 раза для вычисления 100 ёмкостных матриц).

5. Квазистатический анализ методом моментов и оптимизация полосковых и проводных структур в диапазоне параметров ускоряются за счёт решения последовательности систем линейных алгебраических уравнений с использованием блочного LU-разложения или его гибридизации с итерационным методом (до 25 раз для вычисления ёмкостных матриц, при точности в 1%).

Достоверность результатов подтверждена использованием теории, построенной на проверенных математических моделях и численных методах; анализом практики решения разреженных СЛАУ, формируемых другими численными методами; качественным и количественным совпадением полученных результатов с результатами теоретических оценок и вычислительного эксперимента; достижимостью технического результата, указанного в полученных патентах; использованием результатов на практике и другими авторами в своих научных работах; контролем сходимости итерационного процесса; использованием нескольких программных продуктов; согласованностью результатов, полученных несколькими методами.

Использование результатов исследования

1. Результаты интеллектуальной деятельности: получено 25 свидетельств о регистрации программы для ЭВМ, 16 патентов на изобретение и 4 патента на полезную модель.

2. Разработанные программы использованы при анализе печатных плат и кабелей в ОАО «НПЦ «Полюс».

3. Разработанные программы использованы при анализе линейных антенн сети ведомственной связи, а полосковые модальные фильтры – для защиты оборудования сети Fast Ethernet главного управления МЧС России по Томской области.

4. Разработанные алгоритмы и программы использованы в проекте «Разработка системы компьютерного моделирования электромагнитной совместимости». (Заключительный отчет ВТК-15 по мероприятию 3.1.3а инновационной программы ТУСУР, 2006 г. и свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 8376).

5. Алгоритмы итерационного решения СЛАУ использованы в НИР «Исследование новых модальных явлений в структурах многопроводных линий передачи с неоднородным диэлектрическим заполнением», грант РФФИ 06-08-01242, 2006 г.

6. Обзор численных методов и программного обеспечения для моделирования радиоэлектронных средств, а также разработанная система компьютерного моделирования, использованы в ОКР «Разработка и поставка аппаратно-программного комплекса для проведения анализа взаимовлияний электрических сигналов бортовой аппаратуры», хоздоговор 28/08 от 14.04.2008, шифр «АПК–ТУСУР», 2008–2009 гг.

7. Многовариантный анализ погонных параметров модальных фильтров использован в НИОКТР «Модальный фильтр», хоздоговор НИИЦ/НИР/10-01 от 15.01.2010 с ФГУП «ЦентрИнформ», г. Санкт-Петербург, 2010 г.

8. Разработанные модификации LU(0)-разложения и алгоритм вычисления ёмкостных матриц с помощью блочного LU-разложения использованы в ОКР «Разработка комплекса программных и технических средств для контроля информационных магистралей, обеспечения ЭМС и исследования надёжности унифицированного ряда электронных модулей на основе технологии «система-на-кристалле» для систем управления и электропитания КА связи, навигации и дистанционного зондирования Земли с длительным сроком активного существования», тема «УЭМ-ТУСУР», хоздоговор 95/10 от 24.11.2010 в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2010–2012 гг.

9. Разработанное программное обеспечение использовано при моделировании электрических принципиальных схем и элементов печатных плат в ОКР «Разработка принципов построения и элементов системы автономной навигации с применением отечественной специализированной элементной базы на основе наногетероструктурной технологии для космических аппаратов всех типов орбит», тема «САН», хоздоговор 96/12 от 16.11.2012 в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2012–2015 гг.

10. Аналитический обзор научных и информационных источников использован в ОКР «Разработка цифрового управляющего и силовых модулей энергопреобразующего комплекса для высоковольтных систем электропитания космических аппаратов», тема «Модули ЭПК-100», договор № 18/15 от 29.07.2015 г. в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2016–2018 гг.

11. Разработанное программное обеспечение использовано при моделировании меандровых линий задержки в НИР «Разработка математических моделей для трассировки меандровых линий задержки с оптимальными параметрами», шифр НИР «Змейки», договор № Р-20130122 от 18.01.2013.

12. Разработанные программы использованы для предварительного анализа ЭМС аппаратуры станции при разработке материалов эскизного проекта ОКР «Развитие наземного сегмента космического комплекса системы ГЛОНАСС» в части создания составных частей сети наземных станций контроля и управления БАМИ (договор № 24/13 от 9.01.2013), 2013–2015 гг.

13. Исследование по уменьшению затрат времени на многократное решение СЛАУ прямыми и итерационными методами ипользовано в НИР «Выявление, исследование и реализация новых возможностей уменьшения времени многократного решения СЛАУ с частично изменяющейся матрицей в задачах вычисления ёмкостной матрицы произвольной системы проводников и диэлектриков», грант РФФИ 14-07-31267, 2014–2015 гг.

14. Разработанные алгоритмы для многократного решения СЛАУ с уменьшенными вычислительными затратами и программное обеспечение использованы в НИР «Разработка новых программных и аппаратных средств для моделирования и обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронной аппаратуры» в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности 8.1802.2014/К, 2014–2016 гг.

15. Обзор и сравнительный анализ численных методов и способов сокращения затрат на моделирование, разработанные методы построения сетки и полученные аналитические и вычислительные оценки применимости алгоритмов, основанных на блочном LU-разложении, использованы в НИР «Комплексные исследования по разработке алгоритмов, математического обеспечения и средств проектирования для создания новых элементов защиты и контроля вычислительных систем на основе модальных явлений», грант РФФИ 14-29-09254, 2014–2016 гг.

16. Разработанные программы использованы при моделировании новых помехозащитных устройств в НИР «Комплексное обоснование возможностей создания модальной технологии помехозащиты критичной радиоэлектронной аппаратуры и совершенствования существующих и разработки новых помехозащитных устройств на её основе», грант РФФИ 14-19-01232, 2014–2016 гг.

17. Разработанное математическое и программное обеспечение использовано в ПНИ «Теоретические и экспериментальные исследования по синтезу оптимальной сети высоковольтного электропитания для космических аппаратов» по проекту ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение о предоставлении субсидии от 26.09.2017 г. №14.574.21.0172, шифр RFMEFI57417X0172, 2017–2020 гг.

18. Разработанные алгоритм построения неравномерной сетки, гибридный метод решения СЛАУ, математические модели с дополнительными параметрами, а также их исследование,

использованы в НИР «Выявление новых подходов к совершенствованию обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронной аппаратуры и моделирования систем активного зрения роботов» в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности 8.9562.2017/8.9, 2017–2019 гг.

19. Результаты работы использованы в учебном процессе ТУСУРа при подготовке студентов бакалавриата, магистрантов и аспирантов.

20. Результаты работы использованы в учебном процессе Национального исследовательского Томского государственного университета при подготовке магистрантов.

Использование результатов работы подтверждено 11 актами внедрения.

Апробация результатов

Результаты исследований автора позволили подготовить заявки, победившие в конкурсах: грантов РФФИ (06-08-01242, 2006 г.; 14-07-31267, 2014–2015 гг.; 14-29-09254, 2014–2016 гг.); грантов РНФ (14-19-01232, 2014–2016 гг.; 19-19-00424, 2019–2021 гг.; 19-79-10162, 2019–2022 гг.); государственных заданий (проектная часть 8.1802.2014/К, 2014–2016 гг.; базовая часть 8.9562.2017/8.9, 2017–2019 гг.); ФЦП ИР (RFMEFI57417X0172, 2017–2020 гг.).

Результаты диссертационной работы представлялись и докладывались в материалах следующих симпозиумов и конференций:

1. Всероссийская научно-техническая конференция «Научная сессия ТУСУР», Томск, 2004, 2007, 2008 и 2011.
2. Международная научная конференция «Туполевские чтения», Казань, 2004 и 2007.
3. Всероссийская научно-практическая конференция «Проблемы информационной безопасности общества и личности», Томск, 2004 и 2005.
4. Международная научно-практическая конференция «Электронные средства и системы управления», Томск, 2005, 2007, 2015, 2016, 2017, 2018.
5. Международный симпозиум по ЭМС и электромагнитной экологии, Санкт-Петербург, 2005, 2007 и 2011.
6. Научно-методическая конференция «Групповое проектное обучение», ТУСУР, 2007.
7. Научно-техническая конференция молодых специалистов «Электронные и электромеханические системы и устройства», Томск, 2008.
8. 19th International Zurich symposium on electromagnetic compatibility, Singapore, 2008.
9. Научно-техническая конференция ОАО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнева», Железногорск, 2011.

10. International conference on numerical electromagnetic modeling and optimization for RF, microwave, and terahertz applications (NEMO), Pavia, Italy, 2014.
11. International conference on applied physics, simulation and computers, Austria, Vienna, 2015.
12. International conference on modeling, simulation and applied mathematics (MSAM), Phuket, Thailand, 2015.
13. Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики-2015», Новосибирск, 2015.
14. 13th International conference of numerical analysis and applied mathematics, Rhodes, Greece, 2015.
15. Международная научно-методическая конференция «Современное образование: проблемы взаимосвязи образовательных и профессиональных стандартов», Томск, 2016.
16. International Siberian conference on control and communications (SIBCON), Moscow, 2016.
17. Региональная научно-практическая конференция «Наука и практика: проектная деятельность от идеи до внедрения», Томск, 2016 и 2018.
18. XII International scientific and practical conference «Areas of scientific thought», Sheffield, England, 2015/2016.
19. Международная научно-практическая конференция «Природные и интеллектуальные ресурсы Сибири (СИБРЕСУРС)», Томск, 2016, 2017.
20. Всероссийская научно-техническая конференция «Современные проблемы радиоэлектроники», Красноярск, 2017.
21. IEEE International multi-conference on engineering, computer and information sciences, Novosibirsk, 2017.
22. Всероссийская научно-техническая конференция «Микроэлектроника и информатика», Москва, 2017.
23. Международная методическая конференция «Современное образование: повышение профессиональной компетентности преподавателей вуза – гарантия обеспечения качества образования», Томск, 2018.

Структура и объём диссертации. В состав диссертации входят введение, 7 разделов, заключение, список сокращений и условных обозначений, список литературы из 794 наименований и приложение. Объём диссертации с приложением составляет 436 с., в т.ч. 120 рис. и 94 табл.

Личный вклад. Автору принадлежит ключевая роль в основных результатах работы. Все результаты, сформулированные в положениях, выносимых на защиту, и составляющие научную новизну работы, получены автором лично или при непосредственном его участии. Авторский вклад состоит в разработке методов решения последовательности решения СЛАУ, построения сетки, способов алгебраической предфильтрации, их частичной программной реализации, тестировании и исследовании, выявлении их оптимальных параметров, использовании разработанных методов при моделировании для подтверждения достижения указываемого в полученных патентах технического результата, а также анализе и обобщении полученных результатов. Разработка алгоритмов итерационного решения СЛАУ в ходе анализа полосковых структур, их исследование, анализ и обобщение полученных результатов выполнены совместно с *Ахуновым Р.Р.* Часть алгоритмов решения СЛАУ с использованием блочного LU-разложения разработаны и исследованы совместно с *Суровцевым Р.С.* Отдельные результаты исследования получены совместно с соавторами публикаций.

Публикации. Результаты исследования опубликованы в следующих работах:

Вид публикации	Количество	Без соавторов
Статья в журнале из перечня ВАК	23	3
Статья в журнале из перечня ВАК, индексируемом в Scopus и(или) Web of Science	7	0
Статья в зарубежном журнале не из перечня ВАК, индексируемом в Scopus и(или) Web of Science	5	1
Статья в журнале, индексируемом в РИНЦ	2	0
Доклад в трудах конференции, индексируемых в Scopus и(или) Web of Science	11	1
Доклад (тезисы) в трудах другой конференции (симпозиуме)	47	7
Патент на изобретение	16	0
Патент на полезную модель	4	0
Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ	25	0
Монография	5	2
Учебное пособие	1	0
ИТОГО:	146	14

Краткое содержание работы. Во введении представлена краткая характеристика работы. В разделе 1 выполнен аналитический обзор состояния проблемы, а также сформулированы цель и задачи исследования. В разделе 2 приведены разработанные методы и алгоритмы для уменьшения вычислительных затрат на одновариантный анализ РЭС. В разделе 3 приведены разработанные методы ускорения многовариантного анализа РЭС. Описание разработанных программ для анализа элементов РЭС с уменьшенными вычислительными затратами

приведено в разделе 4. Результаты одновариантного анализа линейных антенн и полосковых структур с уменьшенными вычислительными затратами приведены в разделе 5. В разделе 6 приведены результаты ускоренного многовариантного анализа и оптимизации проводных и полосковых структур. В разделе 7 приведены сведения об использовании результатов работы. В заключении изложены итоги выполненного исследования, рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. Далее приведены список сокращений и условных обозначений и список литературы. В приложении А представлены копии документов, подтверждающих использование результатов работы.

1 ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ С УЧЁТОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СОВМЕСТИМОСТИ

1.1 Актуальность совершенствования проектирования радиоэлектронных средств

Открытие электромагнитных явлений и последующее изобретение электромагнитного телеграфа (П.Л. Шиллинг, 1832 г.) и радио (А.С. Попов, 1895 г.) фактически стало началом создания РЭС и, тем самым, глобального процесса информатизации [1], а также борьбы с радиопомехами, сначала с непреднамеренными (атмосферными и индустриальными) [2, 3], а затем и с преднамеренными [4, 5]. Достижения в области радиотехники и электроники, а также в вычислительных, информационных, телекоммуникационных и других технологиях, послужили широкому внедрению во все сферы современного общества различных РЭС [6, 7].

Под РЭС понимают техническое средство, состоящее из одного или нескольких радиоприемных и (или) радиопередающих устройств и вспомогательного оборудования [8, 9]. В более общем смысле под РЭС подразумевается изделие и его составные части, в основу функционирования которых положены принципы радиотехники и электроники [10, 11]. Структура и состав этих средств могут достаточно сильно варьироваться в зависимости от их функционального назначения [12].

Конкуренция производителей РЭС требует регулярного и быстрого появления с минимальными затратами всё более совершенных их видов. Однако выполнение этого требования с ростом сложности РЭС становится невозможным без применения автоматизированного проектирования, в основе которого лежит компьютерное моделирование [13–18]. Поэтому наличие эффективной системы автоматизированного проектирования (САПР) с возможностью моделирования особенно важно для плодотворной работы современного специалиста, а её использование позволяет существенно снизить затраты времени на разработку и повысить качество конечного изделия, тем самым, сделав его более рентабельным [19–22]. Помимо прочего, использование САПР позволяет экономить временные и финансовые ресурсы, требуемые для разработки [23], оценить правильность принятых технических решений [24, 25], учесть требования ЭМС и возможные дестабилизирующие факторы, влияющие на работу [26–35] конечного изделия.

Основными элементами РЭС являются антенны и СВЧ-устройства (прежде всего линии передачи (волноводы) и резонаторы) [36–39]. Например, линейные (проволочные) антенны

являются основой сетей ведомственной дальней связи различных силовых структур и ведомств, а полосковые структуры составляют основу не только различных СВЧ-устройств, но и широкого ряда других приложений. Из-за их конструктивных особенностей для повышения эффективности проектирования часто используется тонкопроволочная аппроксимация и квазистатический подход.

Тонкопроволочная аппроксимация в ходе электродинамического анализа широко используется при проектировании проводных структур, применяемых в качестве проволочных антенн, в системах заземления и уравнивания потенциалов, при аппроксимации поверхностей, например, корпусов РЭС, фюзеляжа самолета или корпуса судна, в том числе, с установленными на них антеннами, и др. Помимо этого, тонкопроволочная аппроксимация применяется при проектировании композитных материалов с использованием карбоновых трубок, которые получают всё более широкое применение на разных структурных уровнях проектируемых РЭС. Так, их используют в транзисторах, сенсорах, антеннах и многих других приборах. При этом важным фундаментальным аспектом при использовании этих трубок является распределение тока в них, которое описывается уравнениями Галлена или Поклингтона, полученных согласно тонкопроволочной аппроксимации.

Квазистатический подход применим, когда поперечные размеры рассматриваемой структуры малы по сравнению с длиной распространяющейся электромагнитной волны. Это позволяет свести уравнения Максвелла к телеграфным и, тем самым, уменьшить требуемые вычислительные затраты. Этот подход получил широкое распространение при проектировании на основе анализа многопроводных линий передачи (МПЛП). Особенностью такого проектирования является учет распределенных параметров между всеми проводниками. На основе МПЛП моделируются различные реальные полосковые структуры, которые широко используются для создания элементов РЭС: печатных плат, фильтров, средств снижения уровня перекрестных помех, антенн и др.

Помимо сугубо конструкторских аспектов проектирования, тенденции развития современных РЭС обостряют проблему ЭМС, появившуюся со времен первых радиопередатчиков А.С. Попова. Согласно ГОСТ Р 50397-2011, ЭМС технического средства – это его способность функционировать с заданным качеством в заданной электромагнитной обстановке и не создавать недопустимых электромагнитных помех другим техническим средствам. При этом под техническим средством подразумевается электротехническое, электронное и радиоэлектронное изделие, а также любое изделие, содержащее электрические

и/или электронные составные части (оно может быть устройством, оборудованием, системой или установкой). Конструктивное усложнение РЭС и ужесточение требований ЭМС, обусловленное ростом верхних частот полезных и помеховых сигналов, плотности монтажа, а также возможностей генераторов преднамеренных электромагнитных воздействий, в совокупности с необходимостью учёта межэлементных, межблочных и межсистемных взаимовлияний, требует всё более тщательного проектирования РЭС. Например, при обеспечении ЭМС антенн важны контроль коэффициента стоячей волны и диаграммы направленности, не только в рабочем диапазоне частот, но и намного более широком диапазоне частот помеховых сигналов.

Классическими способами обеспечения ЭМС являются фильтрация, экранирование и заземление, тесно связанные между собой. Для помехозащиты традиционно используется установка на входе защищаемого изделия устройств на основе сосредоточенных компонентов (в виде сборок из RLC-цепей, варисторов, разрядников, TVS-диодов и др.). Еще одним, сравнительно новым, способом защиты является разложение помехового сигнала большой амплитуды на серию импульсов меньшей амплитуды, представляющую значительно меньшую опасность для РЭС по сравнению с исходным помеховым сигналом. Это разложение возможно за счёт «полезного» использования взаимных связей в линиях передачи. При этом линиями передачи применительно к РЭС могут выступать межблочные кабели, печатные дорожки и другие монтажные соединения (межсоединения). Эти соединения, помимо электрических характеристик, отличаются по важным для ЭМС показателям: волновому сопротивлению, скорости распространения электромагнитной волны, эффективности экранирования и др. Поэтому при проектировании этих соединений необходимо тщательно учитывать требования ЭМС для получения конечного изделия, удовлетворяющего этим требованиям на всем протяжении жизненного цикла самого соединения и всего изделия.

Перекрестные наводки в линиях передачи представляют собой электромагнитные помехи, обусловленные близостью расположения проводников линии и других компонентов РЭС. Их необходимо учитывать при проектировании, в том числе, за счёт контроля взаимовлияний между всеми проводниками. При квазистатическом анализе это реализуется за счёт вычисления матриц погонных параметров линии передачи. Эти матрицы интегрально содержат всю необходимую информацию для последующего анализа, в том числе, целостности сигналов и питания.

При проектировании элементов РЭС с учетом ЭМС необходимо также учитывать частотную зависимость параметров, входящих в состав проектируемого РЭС, а также потери в проводниках и диэлектриках. С учётом расширения спектра полезных и помеховых сигналов количество повторных вычислений существенно возрастает. Помимо этого, для обеспечения ЭМС целесообразен выбор рационального расположения проводников, например с целью экранирования одних проводников другими. При этом необходимо контролировать волновое сопротивление для обеспечения основных функций проектируемой линии передачи. Поэтому проектирование линий передачи посредством многовариантного анализа или оптимизации является нетривиальной задачей.

Последним, но не менее важным, аспектом обеспечения ЭМС при проектировании является выбор соответствующей схемы заземления. Так, наиболее благоприятная организация сплошных полигонов земли, как правило, является как экономически невыгодной, так и технологически невыполнимой. Например, необходимость переходных отверстий на печатных платах нарушает целостность системы заземления, что делает необходимым поиск оптимальных технических решений её организации. Помимо этого, особенности заземления оказывают существенное влияние на внутреннюю электромагнитную обстановку внутри проектируемого РЭС. Так, способ заземления экранирующего проводника на печатной плате оказывает существенное влияние на перекрестные наводки, что сказывается на обеспечении ЭМС РЭС в целом.

Поиск оптимального решения задачи проектирования РЭС приводит к необходимости применения параметрического синтеза, осуществляемого средствами многовариантного анализа в диапазоне параметров или оптимизации. При этом, из-за сложности проектируемых РЭС и необходимости учета требований ЭМС, эти анализ и оптимизация невозможны без применения методов вычислительной электродинамики (одним из которых является метод моментов), поскольку имеющиеся аналитические выражения пригодны только для простых структур (например, одиночных и связанных линий передачи). В основе этих методов лежит замена непрерывных функций их дискретными аналогами (построение сетки), что сводит задачу к решению СЛАУ. Учет требований ЭМС приводит к очень высокому порядку (определяется сложностью моделируемого объекта и окружающего его пространства) и количеству решаемых систем (определяется верхней частотой помехового сигнала, количеством и диапазоном оптимизированных параметров). Это резко увеличивает вычислительные затраты, что становится главной преградой для эффективного проектирования РЭС.

1.2 Моделирование радиоэлектронных средств

Появление первых САПР датируется концом 60-х гг. XX в. [40], а конец 80-х гг. ознаменовался началом их интенсивного развития, и прежде всего в части электромагнитного анализа, находясь на данный момент в эпохе расцвета [41]. История развития отечественных и зарубежных САПР СВЧ устройств до 2010 г. достаточно полно отражена в [42].

Для численного анализа какой-либо физической задачи необходимо построить ее математическую модель, учитывающую существенные для данной задачи особенности реального объекта (процесса или явления) [43]. При этом математическая модель не идентична исследуемому объекту, а является его приближенным описанием с помощью языка математики и реализуемых на компьютере алгоритмов [44]. Поэтому, в зависимости от универсальности, адекватности, точности и экономичности [16], модели могут различаться по их сложности и требованиям к вычислительным ресурсам [45, 46].

Процесс построения математической модели для анализа электромагнитных задач формально можно представить в виде нескольких взаимосвязанных этапов [47] (в скобках указаны возможные варианты):

1. Постановка задачи. Определение целей расчета, класса решаемой задачи, необходимой для этого входной и выходной информации, а также требуемой погрешности результатов.

2. Аналитическая обработка. Формулировка уравнений (уравнения Максвелла в частотной или временной области), условий (начальных, граничных), описание формы (геометрические параметры) и свойств (электрофизические параметры) расчетной области, выбор метода решения (аналитический, численный) и при необходимости преобразование этих уравнений к виду, наиболее пригодному для выбранного метода (Пуассона, волновое).

3. Дискретизация модели (построение сетки). Переход от функциональных уравнений к СЛАУ (с плотной или разреженной матрицей) с помощью замены непрерывных функций их дискретными аналогами.

4. Решение СЛАУ. На этом этапе важную роль играет выбор как типа (прямой, итерационный), так и самого метода решения (LU-разложение, Якоби), наиболее подходящего для решения сформированной СЛАУ с требуемой точностью.

5. Обработка результатов. Вычисление из решения СЛАУ требуемых значений характеристик и параметров (напряженность электрического поля, поверхностный заряд) исследуемого объекта и при необходимости их визуализация. Формирование общего решения задачи (частотный/временной отклик на заданное воздействие, эффективность экранирования).

Еще раз подчеркнем, что данная градация условна и только облегчает процесс систематизации информации. Так, например, при использовании явной схемы решения дифференциальных уравнений методом конечных разностей, не требуется формирование СЛАУ, а вычисления основаны на итерационном уточнении компонент решения [48]. Тогда этапы 3 и 4 могут быть реорганизованы в один, на котором происходит явное решение сформированного на этапе 2 уравнения. Для примера, на рисунке 1.1 показана последовательность построения математической модели в виде последовательности работ (workflow) и передачи данных в системе Altair FEKO для получения результатов моделирования [49]. Видно, что в данном случае выделено 7 этапов, а не 5, как показано выше. При этом функционально они идентичны.

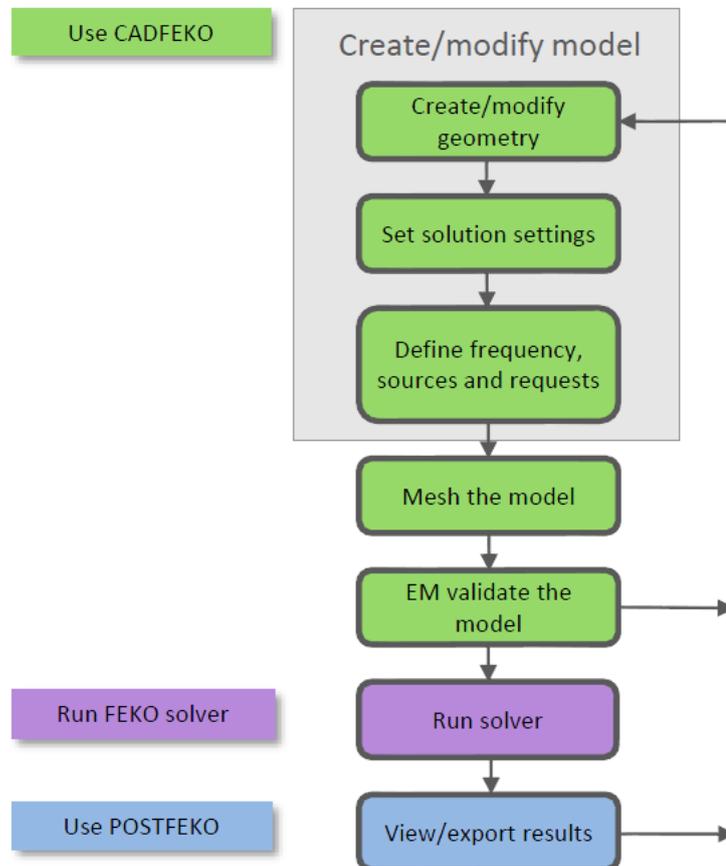


Рисунок 1.1 – Иллюстрация последовательности работ в системе Altair FEKO [49]

Очевидно, что указанные этапы взаимосвязаны. Так, выбор метода построения сетки оказывает влияние на свойства формируемой СЛАУ, что сказывается на выборе метода её решения (прямой или итерационный) и, тем самым, времени её решения [50]. В тоже время, одной из самых важных характеристик используемой математической модели является погрешность требуемых результатов. Она складывается из нескольких составляющих, вносимых на каждом этапе, в виде погрешностей задания исходных данных на этапе 1 [51], самой модели

(неполное соответствие реальному объекту), дискретизации (грубая сетка, погрешности численного интегрирования) [52] и вычислительной (округление при оперировании с числами с конечной точностью на этапах 4 и 5) [53, 54]. При этом при решении СЛАУ основополагающим является наличие погрешности в задании элементов матрицы и правой части [55, 56].

На этапе постановки задачи, с учетом имеющихся данных и требований к точности, требуется определиться, какой подход будет использован: схемотехнический [57, 58], квазистатический [59] или электродинамический [60]. В их рамках применяются эвристические, аналитические, численные и комбинированные (комплексные) [61–68] методы. Схемотехнический подход основан на законах Кирхгофа, а моделирование с его помощью выполняется с использованием принципиальных электрических схем (SPICE-моделирование). Электродинамический подход, основанный на решении уравнений Максвелла, является универсальным и позволяет решать задачи с произвольной геометрией, однако при этом требования к вычислительным ресурсам могут оказаться чрезвычайно высокими. Промежуточное положение занимает квазистатический подход, основанный на допущениях, что поперечные размеры рассматриваемой системы много меньше длин волн, распространяющихся в ней сигналов, что позволяет рассматривать наличие только основной T -волны, не рассматривая волны высшего типа. При этом распределения этих полей вычисляются из электро- и магнитостатических задач, требующих решения уравнения Пуассона/Лапласа. Этот подход получил широкое распространение при моделировании линий передачи с помощью телеграфных и производных от них уравнений [69].

1.3 Численные методы

Важно, что математическое моделирование позволяет эффективно использовать современные достижения вычислительной техники [70]. До появления производительных компьютеров исследователи были вынуждены применять и разрабатывать аналитические решения с помощью методов разделения переменных, конформных отображений и пр., пригодные, как правило, для задач с относительно простой геометрией [71–74]. В противовес аналитическим, использование численных методов не зависит от геометрии задачи, и они могут применяться, когда аналитическое решение недоступно [75]. Прорыв в разработке высокопроизводительных компьютеров и вычислительных систем послужил широкому использованию численных методов. Тем не менее, разработка новых аналитических методов

также является актуальной задачей [76, 77]. Так, аналитические выражения часто используются для проверки (валидации) результатов моделирования с помощью численных методов [78].

Численные методы применяются для моделирования в частотной и временной областях. В квазистатическом приближении они интерпретируются как методы в частотной области с нулевой частотой $\omega = 0$ или как методы во временной области с $\partial/\partial t = 0$ [76, 79]. Общее рассмотрение эволюции численных методов выполнено в [80], где также предпринята попытка предсказать тенденции их дальнейшего развития.

Для подтверждения корректности результатов моделирования разработан специальный стандарт [81], в котором определен процесс валидации численных методов, средств компьютерного моделирования и математических моделей, применяемых при решении электромагнитных задач. Также в стандарте кратко описаны разработанные на данный момент численные методы и их модификации. Стандарт применим к широкому кругу задач: ЭМС, эффективная поверхность рассеяния, целостность сигнала, антенны др. Проверка данных решения достигается путем сравнения с наборами данных, полученными при измерениях, альтернативными программными кодами, аналитическими выражениями и др. Рекомендуемая практика применения этого стандарта описана в отдельном стандарте [82]. В нем приведены рекомендации по валидации результатов моделирования. Примеры использования данных стандартов приведены, например в [83, 84]. Вопросы расширения функционала метода валидации выделением особенностей (FSV), использование которого является ядром стандарта, приведены в [85, 86]. Далее приведен краткий сравнительный анализ широко применяемых численных методов.

1.3.1 Метод моментов

1.3.1.1 Общие сведения

Метод моментов (МоМ) – численный метод формирования матричных уравнений [87]. Для пояснения общей идеи метода рассмотрим обобщенную задачу (детерминированное уравнение)

$$Lf = g \text{ в области } \Omega, \quad (1.1)$$

где L – линейный оператор (дифференциальный, интегральный или интегродифференциальный), g – известная функция, а f – искомая неизвестная функция. (При решении электродинамических задач линейный оператор L , как правило, является интегродифференциальным, f – соответствует токам, g – воздействию полю.) Область Ω

представляет собой пространственную область, описываемую координатами. Функция f может быть как скалярной, так и векторной. Пусть f представлена линейной комбинацией N базисных функций f_n в области действия L , т.е.

$$f = \sum_{n=1}^N a_n f_n, \quad (1.2)$$

где a_n – неизвестные коэффициенты. Очевидно, что для приближённого решения (1.2) является конечной суммой, а для точного – бесконечной. Подставив (1.2) в (1.1) и с использованием линейности L , получим

$$\sum_{n=1}^N a_n Lf_n \approx g, \quad (1.3)$$

где равенство является обычно приближённым. Тогда невязка

$$R = g - \sum_{n=1}^N a_n Lf_n.$$

Базисные функции выбираются так, чтобы они моделировали ожидаемое поведение неизвестной функции по всей ее области, и они могут быть скалярами или векторными в зависимости от решаемой задачи. Если базисные функции определены на локальных областях, они называются локальными базисными функциями или базисными функциями подобластей. Если они определены на всей области, то их называют глобальными базисными функциями или базисными функциями полной области [88]. (Далее рассматриваются только локальные функции.)

Далее в области определения L определим систему тестовых (весовых) функций w_m и зададим соответствующее скалярное произведение [89] (внутреннее произведение [90] или момент [91]). Так, для функций f и w оно задается в виде

$$(f, w) = \int f w dL,$$

где интеграл может быть линейным (как в рассматриваемом случае), поверхностным или объемным, в зависимости от используемых функций.

Для нахождения точного решения требуется, чтобы невязка была равна нулю, а это соответствует равенству нулю скалярного произведения каждой тестовой функции и невязки, т.е.

$$(w_m, g) - \sum_{n=1}^N a_n (w_m, Lf_n) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^N a_n (w_m, Lf_n) = (w_m, g).$$

Это уравнение соответствует СЛАУ с матрицей порядка N , где элементы матрицы и правой

части вычисляются, соответственно, как

$$a_{mm} = (w_m, Lf_n) \text{ и } b_m = (w_m, g).$$

При использовании того или иного численного метода важным является вопрос, связанный с его скоростью сходимости и точностью, полученных с его помощью результатов. Сходимость при использовании МоМ напрямую зависят от оператора L , базисных f_n и тестовых w_m функций, а также и их числа N . При этом эффективность применения метода, для получения результата с заданной точностью, определяется вычислительными затратами (времени и памяти используемой рабочей станции). Таким образом, при одновариантном анализе использование МоМ сводится к следующим этапам:

- получение из уравнений Максвелла интегрального уравнения для заданной структуры;
- построение сетки (разбиение границ структуры на N подобластей и аппроксимация искомой функции в каждой из них соответствующей базисной функцией);
- формирование СЛАУ (вычисление элементов матрицы порядка N и элементов правой части);
- решение сформированной СЛАУ;
- вычисление требуемых характеристик структуры из полученного решения СЛАУ.

В версии МоМ, предложенной Харрингтоном, используются кусочно-постоянные (импульсные) функции в виде базисных и функции Дирака в виде тестовых. Она известна также как метод коллокаций. Харрингтон в работе [89] выполнил обобщение, позволяющее считать методы коллокаций, Галёркина и наименьших квадратов частным случаем МоМ. По мнению некоторых авторов, методы конечных элементов и даже конечных разностей также можно считать частными случаями МоМ [79]. Однако в прикладной математике этот подход принято называть по-другому. Так, в 1956 г. в работе [92] Crandall предложил термин «метод взвешенных невязок» (МВН), обобщив под ним целое семейство методов. Общее обсуждение данного подхода содержится в [93, 94]. Под невязкой уравнения $Lf = g$ подразумевается выражение

$$R = L(\underline{f} - f) = L\underline{f} - g,$$

где \underline{f} – функция, аппроксимирующая функцию f с помощью набора базисных функций. Далее накладывается условие ортогональности (взятие скалярного произведения) невязки всем тестовым функциям (в случае метода Галёркина – базисным функциям).

В таблице 1.1, на основании работ [95–101] и цитируемых в них источников, приведены основные этапы становления МВН. Из таблицы видно, что в его развитие существенный вклад внесли отечественные ученые (рисунок 1.2).



Иван
Григорьевич
Бубнов



Борис
Григорьевич
Галёркин



Николай
Митрофанович
Крылов



Михаил
Филиппович
Кравчук



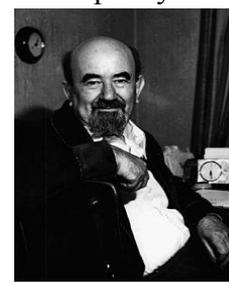
Мстислав
Всеволодович
Келдыш



Леонид
Витальевич
Канторович



Григорий
Иванович
Петров



Соломон
Григорьевич
Михлин

Рисунок 1.2 – Отечественные ученые, внесшие существенный вклад в развитие МВН

Таблица 1.1 – Основные этапы разработки метода взвешенных невязок

Год	Разработчик(и)	Метод
1915	Галёркин Б.Г. [102]	Метод Галёркина (Бубнова-Галёркина ¹)
1921	Karman T. [103], Pohlhausen E. [104]	Интегральный метод (Кармана-Польгаузена)
1923	Biezeno C.V., Koch J.J. [105]	Метод подобластей
1926	Крылов Н.М. [106]	Метод наименьших квадратов (в зарубежной литературе часто указывают на [107])
1926– 1932	Крылов Н.М. [106, 108], Кравчук М.Ф. [109–111]	Метод моментов
1933	Канторович Л.В. [112]	Метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям
1937	Канторович Л.В. [113] Frazer R.A., Jones W.P., Skan S.V. [114]	Интерполяционный метод, метод коллокаций
1940	Репман Ю.В. [115]	Обоснование метода Бубнова-Галёркина применительно к интегральным уравнениям типа Фредгольма
1940	Петров Г.И. [116]	Обоснование метода Бубнова-Галёркина применительно к дифференциальным уравнениям

¹ Бубнов И.Г. предложил схожий метод (Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.). Поэтому в литературе метод Галёркина часто называют методом Бубнова-Галёркина.

Продолжение таблицы 1.1

1942	Келдыш М.В. [117]	Доказательство сходимости метода Бубнова-Галёркина для стационарных задач
1947	Yamada H. [118]	Метод моментов
1948	Михлин С.Г. [119]	Общий признак сходимости метода Бубнова-Галёркина
1949	Faedo S. [120]	Доказательство сходимости метода Бубнова-Галёркина для нестационарных задач
1953	Green J.W. [121]	Оценки сходимости и погрешности метода Бубнова-Галёркина для нестационарных задач
1956	Crandall S.H. [92]	Обобщение методов, МВН

Название «метод моментов» по мнению некоторых авторов является неудачным, поскольку оно имеет немного другое значение в современной прикладной математике [122, 123]. Однако при решении задач электромагнетизма этот подход исторически все же называют МоМ. Харингтон при выборе названия для использованного им метода, позаимствовал его из работы [124], где авторы описывали метод решения интегрального уравнения и называли его МоМ. Ранее, метод с таким названием, был предложен в работах [108, 109], где в качестве тестовых функций для решения интегральных уравнений использовались полиномы (моменты функции). При этом необходимо отметить, что в ходе изложения Харрингтон в работе [89] под термином «метод моментов», по сути, подразумевал МВН, хотя и ограничивался лишь линейными электромагнитными задачами [98]. Далее в этой работе использовано историческое название этого метода, применительно к решению электромагнитных задач, – МоМ.

Применительно к электродинамическим задачам использование МоМ предусматривает следующие этапы решения. Сначала металлические части данной структуры заменяются эквивалентными поверхностными электрическими токами, после чего решается задача возбуждения окружающей среды этими токами. При этом среда может содержать магнито-диэлектрические слои сложной формы. После того, как задача возбуждения решена, на полученное решение на металлических элементах накладываются соответствующие граничные условия. Это используется для вычисления эквивалентных токов. Важным аспектом такого процесса решения является разбиение металлических поверхностей на элементарные площадки и аппроксимация тока в пределах каждой такой площадки. Для аппроксимации криволинейных границ поверхностей произвольной формы принято использовать разбиение на треугольники, а для представления тока в них – базисные функции РВГ (RWG – Rao, Wilton, Glisson) [125].

Рассмотрению вычислительных аспектов МоМ посвящены [261, 91, 122, 126]. Также он является наиболее часто используемым методом при моделировании задач ЭМС [80, 127, 128].

1.3.1.2 Математическая модель для анализа проволочных антенн

Исторически сложилось так, что МоМ разрабатывался очень интенсивно применительно к задачам электростатического и электродинамического анализа проводных структур [129–131]. Их анализ является важной задачей, поскольку они используются в качестве антенн [88, 132–142], в системах заземления и уравнивания потенциалов [143, 144], при аппроксимации поверхностей [145, 146] и разработке различных симуляторов электромагнитного поля [169, 147].

Анализ линейных (проволочных) антенн сводится к решению интегральных (интегро-дифференциальных) уравнений Поклингтона [148] и Галлена [149]. Особенности решения этих уравнений основаны на тонкопроволочной аппроксимации и подробно рассмотрены в ряде работ, например [150–157]. При этом подходе проводник полагается идеальным проводником в виде цилиндра, расположенного вдоль одной из осей координат (одномерная задача), с радиусом поперечного сечения много меньшим длины волны излучаемого сигнала и его физической длины. Также полагается, что ток равен нулю на концах проводника. Такое упрощение позволяет вместо векторной функции плотности тока использовать скалярную, что существенно упрощает сложность задачи. Для ясности изложения далее приведена математическая модель, используемая при анализе проводных структур (линейных антенн).

Рассмотрим распределение тока на поверхности тонкого провода длиной L и радиусом a ($a \ll \lambda$), ориентированного вдоль оси x (рисунок 1.3а). Площадь поверхности обозначим через S . Для решения задачи рассеяния необходимо пошагово выполнить следующие действия (также приведены соответствующие комментарии).

1. Возбудить проводник внешним электрическим полем (\mathbf{E}^{inc}).

2. Положить тангенциальную (касательную) составляющую вектора напряженности электрического поля на границе воздух-проводник равной нулю [158]. Тогда в случае рассматриваемого проводника, ориентированного вдоль оси x , получим

$$E_x = 0. \quad (1.4)$$

3. Определить взаимосвязь между падающей и рассеянной электромагнитными волнами. При падении электромагнитной волны на проводящую поверхность, на ней наводятся поверхностные электрические токи, которые создают рассеянное электромагнитное поле, а с

учетом того, что уравнения Максвелла линейные, то общее поле (\mathbf{E}^{tot}) может быть представлено как суперпозиция падающих (\mathbf{E}^{inc}) и рассеяных (\mathbf{E}^{scat}) волн [159]:

$$\mathbf{E}^{tot} = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{scat} = 0.$$

Тогда с учетом (1.4)

$$E_x^{inc} = -E_x^{scat}. \quad (1.5)$$

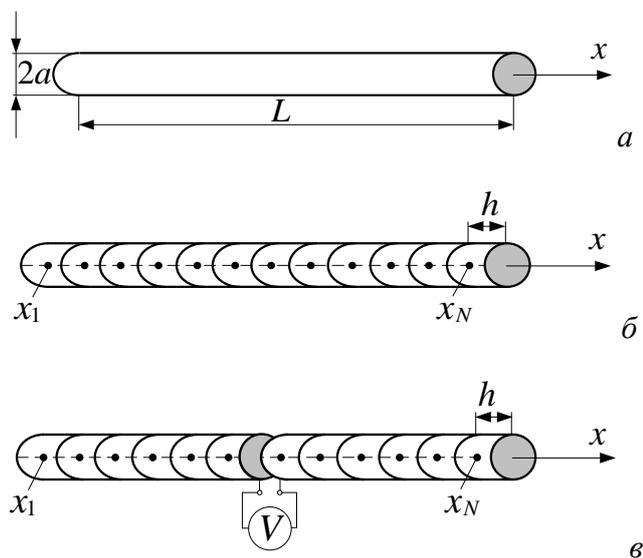


Рисунок 1.3 – Общий вид (а) и сегментация тонкого проводника для задач рассеяния (б) и антенной (в)

4. Задать представление поверхностной плотности тока (\mathbf{J}_S), протекающего через проводник, под воздействием внешнего электрического поля. При замене проводника бесконечно тонкой нитью (тонкопроволочная аппроксимация), а также с учетом осевой симметрии и отсутствия у плотности тока азимутальных составляющих, получим [47, 160]

$$\mathbf{J}_S = I_x \mathbf{e}_x / 2\pi a,$$

где I_x – линейный ток, текущий по оси проводника, \mathbf{e}_x – орт x .

5. Выразить электрическое поле рассеяния через скалярный и векторный потенциалы [163]

$$E_x^{scat} = -j\omega A_x - \nabla\Phi. \quad (1.6)$$

6. Для упрощения выражения (1.6) воспользоваться калибровкой Лоренца [88]

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_x = -j\omega\mu\epsilon\Phi. \quad (1.7)$$

Тогда для рассматриваемого проводника уравнение (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} E_x^{scat} &= -j\omega A_x + \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot A_x) = -\frac{j}{\omega\mu\epsilon} [\nabla(\nabla \cdot A_x) + \omega^2\mu\epsilon A_x] = \\ &= -j\omega A_x - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = -\frac{j}{\omega\mu\epsilon} \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \omega^2\mu\epsilon A_x \right], \end{aligned} \quad (1.8)$$

где векторный потенциал A в цилиндрических координатах выражается как [47]

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{2\pi} \frac{I_x}{2\pi a} \frac{e^{-jkR}}{R} a d\varphi' dx',$$

где $R = \sqrt{\rho^2 + a^2 + (x-x')^2 - 2\rho a \cos(\varphi-\varphi')}$, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$.

Для точек наблюдения на поверхности проводника ($\rho = a$), с учетом азимутальной симметрии его расположения, упростить выражение:

$$A_x = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{2\pi} I_x \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dx' = \mu \int_{-L/2}^{+L/2} I_x \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\varphi' \right) dx' = \mu \int_{-L/2}^{+L/2} I_x(x') G(x, x') dx',$$

где $R = \sqrt{a^2 + (x-x')^2}$ и (при $a \ll \lambda$) $G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\varphi' = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$ – скалярная функция

Грина свободного пространства [47, 159].

7. Подставить полученное выражение в (1.8) и с учетом (1.5) получить конечное выражение [146]

$$\int_{-L/2}^{+L/2} I_x(x') \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] dx' = -j\omega\epsilon E_x^{inc}. \quad (1.9)$$

Это известное (интегро-дифференциальное) уравнение Поклингтона [148].

8. Решить уравнение (1.9) с помощью МоМ. Для этого сегментировать проводник на N подынтервалов длиной h каждый, как показано на рисунке 1.3б. Для этого потребуется $N + 1$ узел, с координатами

$$x_n = (n-1)h, \text{ при } h = L/N \text{ и } n = 1, 2, \dots, N+1.$$

Далее сегменту с индексом n соответствует подынтервал, расположенный между узлами x_n и x_{n+1} .

9. С помощью кусочно-постоянных базисных функций в каждом подынтервале положить, что ток имеет постоянное значение, т.е.

$$I(x') = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(x'), \quad (1.10)$$

где α_n – неизвестные коэффициенты, подлежащие вычислению, а $f_n(x')$ – базисная функция, имеющая постоянное значение на подынтервале n и равная нулю вне его, т.е.

$$f_n(x') = \begin{cases} 0, & x' < (n-1)h \\ 1, & (n-1)h \leq x' \leq nh \\ 0, & x' > nh \end{cases} \quad (1.11)$$

Тогда (1.9) преобразуется к виду

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(x') \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] dx' = -j\omega\epsilon E_x^{inc} \quad (1.12)$$

10. Используя определение базисной функции (1.11), переписать (1.12) в виде

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \int_{x_n-h/2}^{x_n+h/2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] dx' = -j\omega\epsilon E_x^{inc}$$

или

$$\alpha_1 \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] dx' + \dots + \alpha_N \int_{x_N-h/2}^{x_N+h/2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] dx' = -j\omega\epsilon E_x^{inc}.$$

11. Сформировать СЛАУ. Используя дельта функции Дирака $w_m(x)$ в качестве тестовых и точки наблюдения на поверхности проводника ($x_m = (m - 1/2)h$, $m = 1, 2, \dots, N$), получить

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(x_1-x')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(x_1-x')^2}} \right] dx' + \dots \\ & \dots + \alpha_N \int_{x_N-h/2}^{x_N+h/2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(x_1-x')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(x_1-x')^2}} \right] dx' = -j\omega\epsilon E_x^{inc}(x_1) \\ & \vdots \\ & \alpha_1 \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(x_N-x')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(x_N-x')^2}} \right] dx' + \dots \\ & \dots + \alpha_N \int_{x_N-h/2}^{x_N+h/2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(x_N-x')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(x_N-x')^2}} \right] dx' = -j\omega\epsilon E_x^{inc}(x_N) \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

где элементы матрицы и правой части

$$z_{mn} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_{x_n-h/2}^{x_n+h/2} \frac{e^{-jkR}}{R} dx' + \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \left[(x_m - x') \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR} \right]_{x_n-h/2}^{x_n+h/2}, \quad (1.14)$$

$$b_m = E_x^{inc}(x_m). \quad (1.15)$$

12. Вычислить элементы матрицы и правой части с помощью численного интегрирования [53, 161] или аналитически [47, 91]. Так, при $m = n$ подынтегральное выражение первого слагаемого сингулярно, и интеграл вычисляется аналитически [91, 162]

$$z_{mm} \approx \frac{j\omega\mu}{4\pi} \left[\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + a^2/h^2} + 1}{\sqrt{1 + a^2/h^2} - 1} \right) - \frac{jkh}{4\pi} \right].$$

При $m \neq n$ подынтегральное выражение вычисляется, например, с помощью квадратур Гаусса с Q узлами [47]

$$z_{mn} = k^2 \sum_{q=1}^Q l_q \frac{e^{-jkR_{mq}}}{4\pi R_{mq}}.$$

Второе слагаемое вычисляется аналитически.

13. Решить СЛАУ (1.13).

14. Из вектора решения вычислить интересные характеристики (ДН, входной импеданс и др.) [146, 151, 157, 142].

Приведенная модель справедлива для задачи рассеяния. Для антенной задачи требуется внести корректировки, относительно возбуждения рассмотренного проводника. Традиционно используется возбуждение при помощи электрического, магнитного и электромагнитного полей [91, 122]. При возбуждении с помощью электрического поля проводник надо разделить на 2 части и к образовавшемуся узкому зазору (delta gap) размером Δ приложить напряжение V , создающее в нем однородное электрическое поле. Тогда [47]

$$E_x^{inc} = \begin{cases} -V/\Delta, & |x| \leq \Delta/2 \\ 0 & |x| > \Delta/2 \end{cases}. \quad (1.16)$$

Таким образом, при вычислениях предполагается, что поле существует в одном из сегментов проводника и равно нулю во всех остальных. При этом один из элементов правой части СЛАУ будет иметь ненулевые элементы в строке, соответствующей этому сегменту.

1.3.1.3 Квзистатический подход: основные положения

Решение уравнений Максвелла позволяет получить решение для системы любой сложности, но это, как правило, сопровождается значительными вычислительными затратами. Поэтому на практике часто используют мощные вычислительные кластеры (вычислительные центры, суперкомпьютеры) или прибегают к различного рода упрощениям, одним из которых является использование квазистатического подхода. Данный подход (также называемый Т- или

ТЕМ-аппроксимацией) применяют когда поперечные размеры рассматриваемой системы (структуры) малы по сравнению с длиной распространяющейся электромагнитной волны [163]. Так, например, в большинстве линий передачи распространяются поперечные ТЕМ или квази-ТЕМ волны, где электрические и магнитные поля перпендикулярны (или «почти» перпендикулярны) к направлению распространения. Такой подход позволяет упростить уравнения Максвелла, в частности пренебречь током смещения в законе полного тока Ампера. В результате требуется решение не уравнений Максвелла, а уравнения Пуассона/Лапласа. Такой подход применим в диапазоне частот от постоянного тока до 10 ГГц [164].

Квазистатический подход получил широкое распространение при математическом моделировании линий передачи, в общем случае, МПЛП, применяемых, например, в системах кабельного и воздушного электроснабжения [165–167]. Особенностью таких линий является необходимость учета распределенности их параметров [168], что находит свое отражение при решении проектных и эксплуатационных задач, например, для определения мест короткого замыкания [169]. Частным случаем МПЛП являются различные полосковые структуры, которые широко используются для создания элементов РЭС: печатных плат [170, 171], фильтров [172, 173], средств снижения уровня перекрестных помех [174–176] или их компенсации [177], устройств защиты [178], фазовращателей [179], антенн [180], линий задержки [181], высокоскоростных межсоединений [182] и др. При квазистатическом подходе электрические характеристики меняющиеся вдоль отрезков МПЛП длиной dx характеризуются матрицами погонных первичных параметров \mathbf{R} (Ом/м), \mathbf{L} (Гн/м), \mathbf{C} (Ф/м) и \mathbf{G} (См/м) или кратко **RLCG**-параметрами. Отдельно отметим, что вычисление (экстракция) этих матриц (в частности \mathbf{R} и \mathbf{C}) является важной задачей при проектировании с учетом паразитных параметров выводов интегральных схем, а случайные вариации их параметров в технологическом процессе делает необходимым многократно вычислять эти матрицы [183]. Вычисленные матрицы затем используются при решении телеграфных уравнений Хевисайда или производных от них для анализа целостности сигналов, получения временного отклика [184] и других параметров [185].

В случае неучета потерь в проводниках и диэлектриках, из которых состоит линия передачи, вычисляются только \mathbf{L} и \mathbf{C} . Эти потери объясняются частотной-зависимостью электрофизических параметров линии (относительных диэлектрической и магнитных проницаемостей), скин-эффектом (ток высокой частоты протекают преимущественно в тонком поверхностном слое проводника), эффектом близости (притяжение противоположных токов в соседних проводниках) и угловым эффектом (сжатие тока вблизи углов проводника) [186].

Таким образом, строгое решение уравнений Максвелла сводится к двум независимым граничным задачам электростатики и магнитостатики, определяющим поведение поперечных электрических и магнитных компонент поля соответственно [164]. При этом решение первой задачи даёт матрицы \mathbf{C} и \mathbf{G} , а второй – \mathbf{L} и \mathbf{R} [187]. Для экономии вычислительных затрат часто прибегают только к решению электростатической задачи, а из вычисленной матрицы \mathbf{C} находят \mathbf{L} и затем \mathbf{R} . При этом вычисленная матрица \mathbf{L} является частотно-независимой и, тем самым, лишь приближенной [188]. На практике это часто приемлемо, например, при проектировании интегральных схем, поскольку частоты сигналов не так высоки и индуктивные эффекты проявляется слабо [183, 189].

Для пояснения процесса вычислений рассмотрим уравнение Пуассона (дифференциальная форма)

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0,$$

где φ – электростатический потенциал, а ρ – объемная плотность заряда. При отсутствии в анализируемой области свободных зарядов данное уравнение сводится к уравнению Лапласа. Для нахождения волнового сопротивления и др. параметров одиночной линии передачи с неоднородным диэлектрическим заполнением без потерь необходимо нахождение погонной емкости с диэлектрическим заполнением C и без него (без границ диэлектрик-диэлектрик) C_0 . Так, волновое сопротивление линии передачи без потерь определяется как [261]

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

где L – погонная индуктивность; C – погонная ёмкость. Для нахождения индуктивности можно воспользоваться выражением

$$L = \mu_0\varepsilon_0 C_0^{-1}.$$

При этом фазовая скорость определяется как

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad u = c\sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\text{reff}}}}, \quad (1.17)$$

где c – скорость света в свободном пространстве, а $\varepsilon_{\text{reff}} = C/C_0$ – эффективная относительная диэлектрическая проницаемость.

В случае простых конфигураций линии можно воспользоваться известными аналитическими выражениями [190, 191]. Для сложных МПЛП такие выражения отсутствуют или имеют ограниченную точность и необходимо прибегать к помощи численных методов [192–196].

В общем случае, величины L и C в приведенных выражениях являются матрицами, называемыми матрицами погонных коэффициентов электростатической (\underline{C}) и электромагнитной (\underline{L}) индукции [197]. Также матрицу \underline{C} часто называют ёмкостной матрицей Максвелла [191], узловой ёмкостной матрицей [169] и погонной ёмкостной матрицей [198] (для краткости далее просто ёмкостная матрица). Поясним особенности вычисления ёмкостной матрицы \underline{C} на примере трехпроводной линии передачи, поперечное сечение которой приведено на рисунке 1.4.

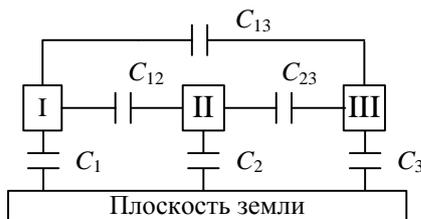


Рисунок 1.4 – Поперечное сечение трехпроводной линии передачи

Рассмотрим задачу нахождения погонных зарядов (Q) при известных потенциалах на них [199]. На практике часто потенциал опорного проводника (плоскости земли), устанавливается равным 0 В. Разности потенциалов между проводниками и ним обозначим через V_1 , V_2 и V_3 , а между проводниками – V_{12} , V_{13} и V_{23} . Тогда

$$Q_I = C_1 V_1 + C_{12} V_{12} + C_{13} V_{13},$$

$$Q_{II} = C_{21} V_{12} + C_2 V_2 + C_{23} V_{23},$$

$$Q_{III} = C_{31} V_{13} + C_{32} V_{23} + C_3 V_3.$$

Перепишем эту систему уравнений в виде

$$\underline{Q}_I = C_1 V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) = (C_1 + C_{12} + C_{13})V_1 - C_{12}V_2 - C_{13}V_3,$$

$$Q_{II} = C_{21}(V_2 - V_1) + C_2 V_2 + C_{23}(V_2 - V_3) = -C_{21}V_1 + (C_2 + C_{21} + C_{23})V_2 - C_{23}V_3,$$

$$Q_{III} = C_{31}(V_3 - V_1) + C_{32}(V_3 - V_2) + C_3 V_3 = -C_{31}V_1 - C_{32}V_2 + (C_3 + C_{31} + C_{32})V_3,$$

или в матричном виде

$$\underline{Q} = \underline{C}\underline{V},$$

где

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{13} \\ \underline{C}_{21} & \underline{C}_{22} & \underline{C}_{23} \\ \underline{C}_{31} & \underline{C}_{32} & \underline{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_{12} + C_{13} & -C_{12} & -C_{13} \\ -C_{21} & C_2 + C_{21} + C_{23} & -C_{23} \\ -C_{31} & -C_{32} & C_3 + C_{31} + C_{32} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты \underline{C}_{ij} называются коэффициентами электростатической индукции – собственными при одинаковых индексах и взаимными при разных индексах и имеют

размерность погонной ёмкости [200]. Несмотря на отрицательный знак у внедиагональных элементов матрицы $\underline{\mathbf{C}}$, ёмкость между отдельным проводником и плоскостью земли положительна. Тогда матрица \mathbf{L} вычисляется как

$$\mathbf{L} = \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\mathbf{C}}_0^{-1}.$$

При учете потерь в проводниках и диэлектриках волновое сопротивление МПЛП описывается комплексной матрицей

$$\mathbf{Z} = \sqrt{\frac{\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}}{\mathbf{G} + j\omega\mathbf{C}}}$$

порядка N_{COND} – число проводников МПЛП, не считая опорного. Для вычисления матрицы \mathbf{G} используется та же модель, что и для матрицы \mathbf{C} , с той лишь разницей, что диэлектрическая проницаемость i -го подынтервала заменяется на комплексную с использованием тангенса угла потерь $\underline{\varepsilon}_r = \underline{\varepsilon}_r' - j\underline{\varepsilon}_r'' = \underline{\varepsilon}_r'(1 - j \tan\delta)$, где $\tan\delta = \underline{\varepsilon}_r''/\underline{\varepsilon}_r'$, а σ – удельная проводимость диэлектрика [201, 202].

Нахождение матрицы \mathbf{R} представляет собой сложную задачу. Так, для нетиповых структур часто прибегают к её измерениям или различного рода упрощениям [76]. Для её вычисления разработано несколько подходов, разной степени сложности, пригодных только для некоторых частотных диапазонов [188, 201–206]. С точки зрения минимизации вычислительных затрат на вычисление \mathbf{R} выделяется работа [207], являющаяся обобщением на случай МПЛП результатов работ [208, 209] для одиночных линий передачи, использующих «правило дифференциальной индуктивности» (incremental inductance rule). Рассмотрим её основные результаты.

В случае одиночной линии передачи (омические) потери в проводнике определяются как [209]

$$R = \frac{1}{\mu_0} \sum_j R_{sj} \frac{\partial L}{\partial n_j}, \quad R_{sj} = \sqrt{\pi f \mu \rho_{sj}},$$

где $\partial L/\partial n_j$ – производная индуктивности при небольшой вариации (возмущения) j -й границы поверхности проводника к его центру (сужение проводника), n_j – вектор нормали к границе j , R_{sj} – поверхностное сопротивление слоя вариации для этой границы (рисунок 1.5), а ρ_{sj} – удельное сопротивление проводника с границей j .

В работе [207] предложено не сужать границы проводников, а наоборот расширять, что позволило обобщить данный подход на случай МПЛП и получить более точные результаты. Элементы матрицы \mathbf{R} тогда вычисляются как

$$R_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \sum_j R_{sj} \frac{-\partial L_{ii}}{\partial n_j}, & \text{если } i = k; \\ \frac{1}{\mu_0} \sum_j R_{sj} \frac{-\partial L_{ik}}{\partial n_j}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $i = k$ возмущения применяются к i -у и опорному проводникам, а в противном случае – только к опорным.

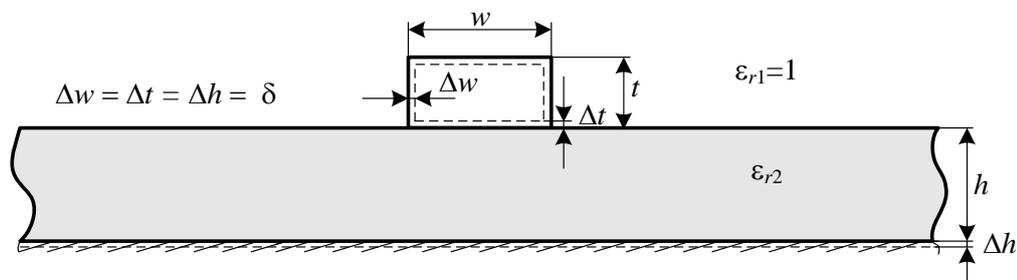


Рисунок 1.5 – К пояснению вариации границ проводников

Таким образом, особый интерес для минимизации затрат времени на получение всех первичных параметров МПЛП представляет вычисление ёмкостной матрицы [210], поскольку, как было показано выше, остальные 3 матрицы являются её производными. Поэтому далее рассмотрим особенности её вычисления с использованием метода моментов и зеркальных изображений.

1.3.1.4 Математическая модель вычисления ёмкостной матрицы

В работе [211], на основании работы [212], представлен подробный вывод моделей вычисления ёмкостной матрицы с использованием МоМ в сочетании с аналитическими выражениями для элементов матрицы СЛАУ, для двумерных и трёхмерных структур с границами произвольной сложности, включающих идеально проводящую плоскость и без неё. Для ясности дальнейшего изложения кратко поясним суть данного подхода на примере двумерной задачи (для трёхмерной задачи подход аналогичен). В качестве операторного уравнения выступает уравнение Пуассона в интегральной форме:

$$\varphi = L^{-1}\rho, L^{-1} = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma, \quad (1.18)$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – соответствующая функция Грина, \mathbf{r} – точка наблюдения (x, y) , \mathbf{r}' – точка источника (x', y') , рисунок 1.6, а $d\Gamma$ – дифференциал по поверхности структуры.

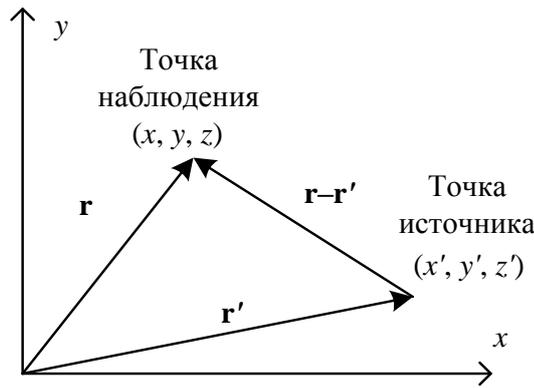


Рисунок 1.6 – Точки источника и наблюдения

В данной постановке задачи считаются заданными граничные условия по приложенному напряжению (φ), при этом требуется найти плотность заряда (ρ). Для двумерного случая функция Грина имеет вид [191]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\pi}, \quad (1.19)$$

а

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (1.20)$$

Рассмотрим математическую модель вычисления ёмкостной матрицы на примере связанной микрополосковой линии (МПЛ), поперечное сечение которой приведено на рисунке 1.7. Структура содержит два проводника (I и II), расположенных на диэлектрическом основании с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_{r2} , над идеально проводящей (бесконечной) плоскостью.

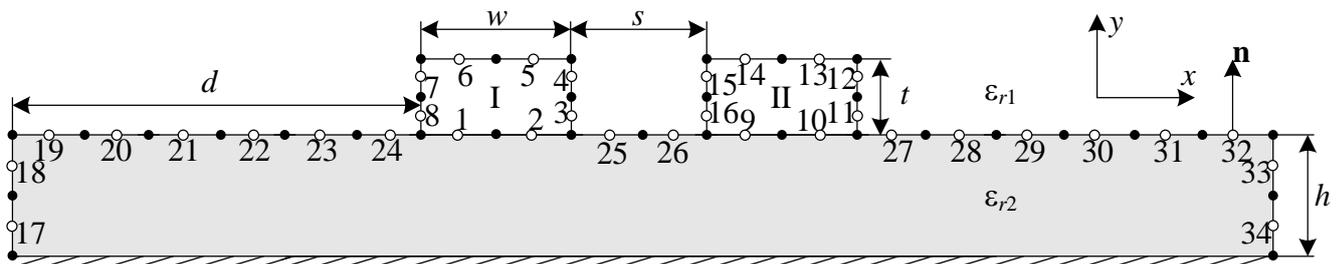


Рисунок 1.7 – Поперечное сечение связанной МПЛ

Для вычисления необходимо пошагово выполнить следующие действия (также приведены соответствующие комментарии):

1. Дискретизировать границы проводников и диэлектрической подложки (граница раздела двух сред) на небольшие отрезки (подынтервалы) длинами l_n , $n = 1, 2, \dots, N$. На рисунке 1.7 деление на подынтервалы показано с помощью закрасненных кругов, а центры подынтервалов

отмечены с помощью незакрашенных кругов. Причем сначала дискретизируются проводниковые, а затем диэлектрические границы. В данном случае границы дискретизированы на $N = 34$ подынтервала, при этом границам проводник-диэлектрик соответствует $N_C = 16$, а диэлектрик-диэлектрик – $N_D = 18$ ($N = N_C + N_D$).

2. Когда в структуре имеются границы соприкосновения диэлектрика с проводником, необходимо работать в терминах полной плотности заряда σ_T , которая представляет собой сумму плотности свободного и поляризационного зарядов [213, 214]:

$$\sigma_T(\mathbf{r}) = \sigma_S(\mathbf{r}) + \sigma_P(\mathbf{r}).$$

При этом на границе диэлектрик-диэлектрик полная плотность заряда состоит только из плотности поляризационных зарядов.

3. Учесть наличие плоскости земли с помощью метода зеркальных изображений. При этом вместо функции (1.19) необходимо использовать

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\pi} - \frac{\ln |\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|}{2\pi}, \quad (1.21)$$

где $\underline{\mathbf{r}}'$ – точка мнимого источника. При отсутствии плоскости земли используется (1.19).

4. Задать потенциалы (1 В) на проводниковых подынтервалах и подставить выражения для аппроксимации плотности заряда и функции Грина в уравнение (1.18). Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln |\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|] dl', \quad \mathbf{r} \in L_C, \quad (1.22)$$

где dl' – элемент контура границ проводник-диэлектрик, а L_C – длина этого контура. Полученное уравнение является уравнением Фредгольма 1-го рода.

5. Получить аналогичное уравнение для границ диэлектрик-диэлектрик. При этом следует учесть, что на границе диэлектрик-диэлектрик, между средами с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 , нормальная составляющая общего вектора электрического смещения $\mathbf{D}'' = \epsilon \mathbf{E}''$ не меняется. Тогда

$$\epsilon_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1''(\mathbf{r}) = \epsilon_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2''(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in L_D, \quad (1.23)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали (рисунок 1.7), $\mathbf{E}_1''(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}_2''(\mathbf{r})$ – общее электрическое поле в средах 1 (с ϵ_1) и 2 (с ϵ_2) соответственно (в рассматриваемой структуре $\epsilon_{r1} = 1$ (воздух)), при приближении к линии L_D границы раздела этих сред.

Для этого используется связь потенциала с напряженностью поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}).$$

Подставив уравнение (1.22) в последнее, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \nabla [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}|] dl' = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}|^2} \right] dl', \quad \mathbf{r} \in L_C, \end{aligned} \quad (1.24)$$

поскольку

$$\int_L \nabla [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}|] dl' = \int_L \left[\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r}'_{\underline{}} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}|^2} \right] dl'.$$

Рассматривая предел уравнения (1.24), когда \mathbf{r} приближается к границе раздела двух сред, можно показать, что этот предел будет различным, если \mathbf{r} приближается к границе со стороны среды 1 или со стороны среды 2. С учетом этого получим

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\sigma_T(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' + \mathbf{n} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\epsilon_0}, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\sigma_T(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' - \mathbf{n} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\epsilon_0}, \quad \mathbf{r} \in L_D.$$

В результате, подставив (1.25) в (1.23), получим

$$0 = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\epsilon_0} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}|^2} \right] \cdot \mathbf{n} dl, \quad \mathbf{r} \in L_D. \quad (1.26)$$

6. Выразить полную плотность в виде линейной комбинации известных базисных функций (ω_n) и неизвестных коэффициентов (α_n):

$$\sigma_T(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \omega_n(\mathbf{r}). \quad (1.27)$$

Часто используемыми являются кусочно-постоянные базисные функции, которые равны единице на подынтервале с номером n и нулю вне его. При этом коэффициенты α_n соответствуют значению равномерной плотности заряда на подынтервалах с длинами l_n . Так, $q_n = l_n \alpha_n$ – погонный заряд на подынтервале длиной l_n (Кл/м).

7. Подставить (1.27) в (1.22) и (1.26) и, взяв для них скалярные произведения с тестовыми функциями (Дирака), сформировать СЛАУ вида $\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{v}$, где \mathbf{S} – матрица размера $N \times N$, а $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{v} – $N \times 1$. Вектор \mathbf{v} содержит единицы в тех строках, которые соответствуют подынтервалам проводник-проводник.

Описанные шаги справедливы, если в структуре имеется один проводник, не считая опорного. При наличии нескольких проводников, как на рисунке 1.7, описанные выше шаги повторять нет необходимости, а нужно лишь изменить вектор \mathbf{v} . При этом, все используемые

вектора \mathbf{v} можно заменить на одну матрицу \mathbf{V} , состоящую из N_{COND} столбцов, где N_{COND} – число проводников в структуре, не считая опорного. Столбцы этой матрицы соответствует векторам \mathbf{v} , сформированным для каждого из проводников. Тогда задача сводится к СЛАУ вида $\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V}$, где $\boldsymbol{\Sigma}$ и \mathbf{V} – матрицы размера $N \times N_{\text{COND}}$. Структура полученной СЛАУ приведена на рисунке 1.8.

Элементы матрицы \mathbf{S} вычисляются как [211]:

$$s_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} [\ln |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n| - \ln |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|] dl', \quad m = 1, \dots, N_C, n = 1, \dots, N, \quad (1.28)$$

$$s_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} \left[\frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} - \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} \right] dl', \quad m = N_C + 1, \dots, N, n = 1, \dots, N, m \neq n, \quad (1.29)$$

$$s_{mm} = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{2\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} \left[\frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} - \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} \right] dl', \quad m = N_C + 1, \dots, N. \quad (1.30)$$

Для вычисления интегралов в уравнениях (1.28)–(1.30) используются численное интегрирование [191] или аналитические выражения в замкнутом виде [211]. Полученная матрица \mathbf{S} является плотной (практически полностью отсутствуют нулевые элементы). Если в рассматриваемой структуре отсутствует плоскость земли, то необходимо соблюсти закон сохранения заряда. Для этого к матрице СЛАУ \mathbf{S} добавляются дополнительная строка и столбец, элементы которых вычисляются по простым формулам, а соответствующая строка матрицы \mathbf{V} заполняется нулями [211]. При этом при формировании СЛАУ вместо (1.21) используется (1.19).

8. Решить СЛАУ.

9. Вычислить элементы ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$. При этом учесть, что поверхностная плотность свободных зарядов вычисляется как

$$\sigma_S(\mathbf{r}) = \epsilon_r(\mathbf{r})\sigma_T(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in L_{CD},$$

где $\epsilon_r(\mathbf{r})$ – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, соприкасающегося с поверхностью проводника по контуру L_C . Тогда элементы ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$

$$\underline{C}_{ij} = \int_{L_{C_i}} \epsilon_r(\mathbf{r})\sigma_S^j(\mathbf{r}) dl_i / V, \quad V = 1 \text{ В},$$

где индекс i – относится к проводнику, по контуру L_{C_i} которого ведется интегрирование, а j – к проводнику, находящемуся под потенциалом 1 В, когда остальные проводники под потенциалом 0 В. В матричном виде получим

$$\underline{C}_{ij} = \sum_{k \in L_{C_i}} \epsilon_r \Sigma_{kj} l_k / V, \quad i, j = 1, \dots, N_{\text{COND}}, \quad V = 1 \text{ В.} \quad (1.31)$$

На рисунке 1.8 наглядно продемонстрированы блоки матрицы Σ , участвующие в вычислении.

В результате, задача нахождения ёмкостной матрицы МПЛП сводится к решению СЛАУ вида $\mathbf{S}\Sigma = \mathbf{V}$, с квадратной и плотной матрицей \mathbf{S} размера $N \times N$ ($N = N_C + N_D$), связывающей плотности заряда на подобластях дискретизированных границ проводников и диэлектриков, составляющих матрицу Σ , с потенциалами этих подобластей, задаваемых матрицей \mathbf{V} , обе размера $N \times N_{\text{COND}}$. После вычисления Σ , вычисляются элементы искомой ёмкостной матрицы.

Еще раз вернемся к структуре матрицы СЛАУ (рисунок 1.8). Для общего случая произвольно ориентированных границ проводников и диэлектриков эта матрица имеет структуру, показанную на рисунке 1.9а и схематично демонстрирующую расположение её элементов, соответствующих проводниковым (П) и диэлектрическим (Д) границам. Для частного случая линейных и ортогональных границ двумерной структуры [211] каждый блок матрицы на рисунке 1.9а имеет структуру, показанную на рисунке 1.9б, т.е. состоит из 4 субблоков, соответствующих границам, которые ортогональным осям Y ($\perp Y$) и X ($\perp X$). В случае трехмерных структур с ортогональными осям границами организация субблоков показана на рисунке 1.9в.

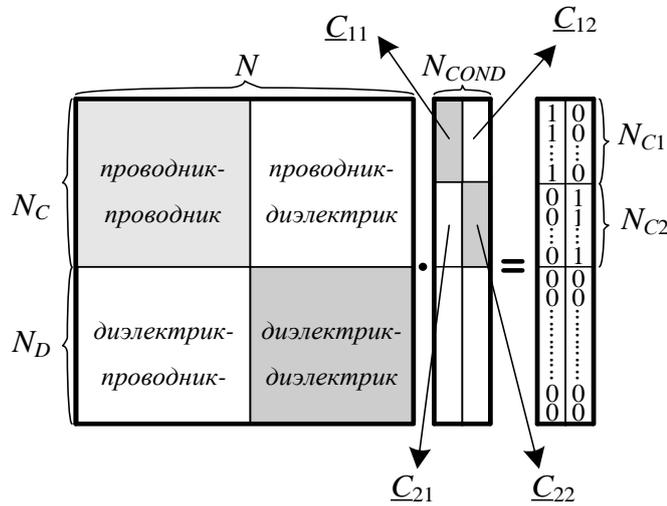


Рисунок 1.8 – Структура матрицы СЛАУ

Таким образом, сначала сегментируются границы проводник-диэлектрик и полученным подынтервалам присваиваются номера с 1 по N_C . При этом сначала сегментируются и последовательно нумеруются подынтервалы, которые ортогональны Y (номер последнего – N_{CY}), а затем – ортогональные X (до N_C). Далее сегментируются границы диэлектрик-диэлектрик, после чего полученным подынтервалам присваиваются номера с N_C+1 по N . При

этом сначала сегментируются и последовательно нумеруются подынтервалы, которые ортогональны Y (номер последнего – N_{DY}), а затем – ортогональные X (до N).

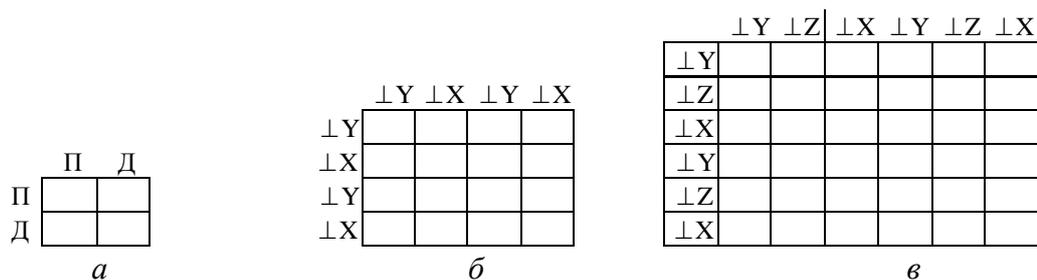


Рисунок 1.9 – Структуры матрицы СЛАУ для произвольно (a)

и ортогонально ориентированных границ двумерных (b) и трехмерных (v) структур

Каждый подынтервал описывается с помощью следующего уникального набора параметров: x_n – координата X центра n -го подынтервала; y_n – координата Y центра n -го подынтервала; d_n – длина n -го подынтервала; ε_n – относительная диэлектрическая проницаемость вблизи n -го подынтервала границы проводник-диэлектрик; ε_n^+ и ε_n^- – относительные диэлектрические проницаемости на положительной (на которую направлен указывает \mathbf{n}_n) и отрицательной (от которой направлен \mathbf{n}_n) сторонах n -го подынтервала границы диэлектрик-диэлектрик соответственно, где \mathbf{n}_n – единичный вектор нормали из центра n -го подынтервала в направлении соответствующей оси. Из этих параметров подынтервалов вычисляются элементы матрицы СЛАУ согласно приведенных далее формул [211].

Для строк с индексами $m = 1, \dots, N_C$

$$s_{mm} = -\frac{I_{mn}}{2\pi\varepsilon_0}, \quad m = 1, \dots, N_C, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.32)$$

где

$$I_{mn} = a_1 \cdot \ln(a_1^2 + c_1^2) - 2a_1 + 2c_1 \cdot \operatorname{actg}\left(\frac{a_1}{c_1}\right) - a_2 \cdot \ln(a_2^2 + c_2^2) + 2a_2 - 2c_2 \cdot \operatorname{actg}\left(\frac{a_2}{c_2}\right).$$

При этом для $n = 1, \dots, N_{CY}, (N_C + 1), \dots, N_{DY}$

$$a_1 = \frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); \quad a_2 = -\frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); \quad c_1 = y_m - y_n, \quad (1.33)$$

а для $n = (N_{CY} + 1), \dots, N_C, (N_{DY} + 1), \dots, N$

$$a_1 = \frac{d_n}{2} - (y_m - y_n); \quad a_2 = -\frac{d_n}{2} - (y_m - y_n); \quad c_1 = x_m - x_n. \quad (1.34)$$

Для строк с индексами $m = (N_C + 1), \dots, N$

$$s_{mm} = \frac{I_{mn}}{2\pi\varepsilon_0}, \quad m = (N_C + 1), \dots, N, \quad n = 1, \dots, N, \quad m \neq n;$$

$$s_{mm} = \frac{I_{mn}}{2\pi\varepsilon_0} + \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_m^+ + \varepsilon_m^-}{\varepsilon_m^+ - \varepsilon_m^-}, m = (N_C + 1), \dots, N,$$

где для строк индексами $m = (N_C + 1), \dots, N_{DY}$ для $n = 1, \dots, N_{CY}, (N_C + 1), \dots, N_{DY}$

$$I_{mn} = \text{actg}\left(\frac{a_1}{c_1}\right) - \text{actg}\left(\frac{a_2}{c_1}\right), \quad (1.35)$$

и переменные аналогичны (1.33), а для $n = (N_{CY} + 1), \dots, N_C, (N_{DY} + 1), \dots, N$

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a_2^2 + c_1^2}{a_1^2 + c_1^2} \right), \quad (1.36)$$

где переменные аналогичны (1.34). Для строк с индексами $m = (N_{DY} + 1), \dots, N$ для $n = 1, \dots, N_{CY}, (N_C + 1), \dots, N_{DY}$ I_{mn} вычисляется согласно (1.36) с переменными из (1.33), а для $n = (N_{CY} + 1), \dots, N_C, (N_{DY} + 1), \dots, N$ – согласно (1.35) с переменными из (1.34).

Когда плоскость земли отсутствует, землей считается $(N_{COND} + 1)$ -й проводник. Тогда, следуя [215], добавляются $(N + 1)$ -я строка и столбец с элементами

$$s_{nN+1} = \frac{d_n}{2s_{mm}}, s_{N+1n} = d_n \varepsilon_n, n = 1, \dots, N_C.$$

1.3.1.5 Способы уменьшения вычислительных затрат

Прогресс компьютерных технологий изменил оценку применимости многих вычислительных алгоритмов. Так, увеличение объема оперативной памяти рабочей станции, как правило, перестало быть связано сугубо с техническими ограничениями и перешло в разряд финансовых возможностей по его увеличению. Поэтому определяющим при выборе того или иного метода стало затрачиваемое время решения задачи [216, 217]. При этом учёт требуемого объема машинной памяти также необходим, так как позволяет использовать сравнительно маломощные рабочие станции для решения сложных задач [218]. Применение методов решения СЛАУ также тесно связано с особенностями хранения её матрицы [219–221].

Рассмотрим способы сокращения затрат на моделирование при использовании МоМ. Они в целом справедливы и для метода эквивалентной схемы из частичных элементов (см. далее). Так, уменьшить время на формирование и решение СЛАУ можно за счёт:

выбора метода дискретизации структуры, позволяющего аппроксимировать её области меньшим числом подобластей и, тем самым, размеров СЛАУ [79, 222–224];

получение выражений в замкнутом виде для вычисления матричных элементов вместо использования методов численного интегрирования [225];

выбора базисных и тестовых функций, позволяющих меньшим их числом выполнить аппроксимацию искомой функции и функции воздействия [226, 227];

выбора однотипных базисных и тестовых функций (метод Галёркина), что, в общем случае, даёт симметричную матрицу [88, 98, 228];

использования твердотельных накопителей [229] и параллельных вычислений на центральном и/или графическом процессорах [230–232].

обнуления (отбрасывания) элементов матрицы сформированной СЛАУ, значения которых меньше заданного порога и, тем самым, преобразования плотной матрицы в разреженную, с последующим её решением одним из методов для разреженных систем [226];

аппроксимации матрицы СЛАУ и использования итерационных методов [233, 234];

малоранговой аппроксимации матриц [235–246].

Из приведенных подходов к уменьшению затрат времени на формирование и решение СЛАУ, а также из анализа других работ по применению МоМ, прослеживается взаимосвязь между этими подходами. При этом ключевое значение имеет выбор наборов базисных и тестовых функций, наиболее подходящих для каждой конкретной задачи [247]. Таким образом, общей тенденцией исследований является уменьшение затрат времени на вычисления с требуемой точностью.

Наиболее универсальным и проверенным является выбор кусочно-постоянных базисных функций и дельта-функций в качестве тестовых (согласование по точкам). Главным преимуществом такого выбора является простота (по сравнению с выбором других наборов базисных и тестовых функций) конечных выражений для вычисления элементов матрицы СЛАУ. Так, в случае выбора дельта-функций, их скалярные произведения (в точках с ненулевыми значениями) и интеграла (определяемого соответствующим интегральным уравнением для заданной структуры) равны значениям интеграла в этих точках. При этом за счёт кусочно-постоянных функций равномерное распределение искомой функции в заданных подобластях позволяет полагать её значения равными постоянным коэффициентам, которые выносятся за знак интеграла. В результате под знаком интеграла остаётся только функция Грина, что позволяет избежать численного интегрирования путем взятия этого интеграла аналитически или использовать почленное интегрирование разложенной в ряд функции Грина. Это даёт увеличение скорости и контролируемую точность при вычислении значений элементов матрицы СЛАУ. Недостатком такого выбора базисных и тестовых функций является необходимость разбиения границ структуры на большое количество подобластей для повышения

скорости сходимости решения. Однако при анализе новых структур и разработке способов ускорения вычислений такой выбор базисных и тестовых функций вполне оправдан из-за их универсальности.

Достоинства. Объект моделирования может иметь сложную форму. В целом, отличается высокой скоростью вычислений при невысоких требованиях к вычислительным мощностям рабочей станции. Так, МоМ наиболее эффективен для открытых геометрий с линейными и однородными средами. Метод отлично подходит для гибридизации с другими методами и асимптотическими процедурами, например FMM и MLFMM (быстрый метод мультиполей и многоуровневый быстрый метод мультиполей), а также UTD и GTD (однородная и геометрическая теория дифракции) [248]. В отличие от методов конечных разностей и элементов, МоМ при построении сетки требует дискретизации не объёма, в котором заключен анализируемый объект, а только поверхности этого объекта, что даёт относительно малые затраты на эту процедуру.

Недостатки. Сложен для моделирования внутренних задач и неоднородных сред. Иногда низкая скорость вычисления для объектов сравнительно простой формы. (Однако это легко устранимо из-за роста быстродействия рабочих станций и развития вычисленных процедур, что позволяет ускорить общий процесс решения с использованием МоМ [249].)

1.3.2 Другие численные методы

1.3.2.1 Метод конечных разностей во временной области

Метод конечных разностей во временной области (FDTD, в отечественной литературе КРВО), в настоящее время являющийся одним из популярнейших методов численного решения электродинамических задач, впервые описан К. Йи (К. Yee) в 1966 г. [250] для решения двумерных задач. При этом аббревиатуру названия метода предложил А. Taflov в работе [251]. В основе метод лежит развертываемая во времени процедура, в ходе которой непрерывные электромагнитные волны заменяются их дискретными аналогами [252]. Дискретное представление реализовано для входящих в уравнения Максвелла пространства и времени. На рисунке 1.10 приведена, так называемая, элементарная ячейка Йи, содержащая компоненты векторов **E** и **H** и используемая при вычислениях (общий случай). Так, компоненты этих векторов могут быть вычислены друг через друга со сдвигом на полшага по времени.

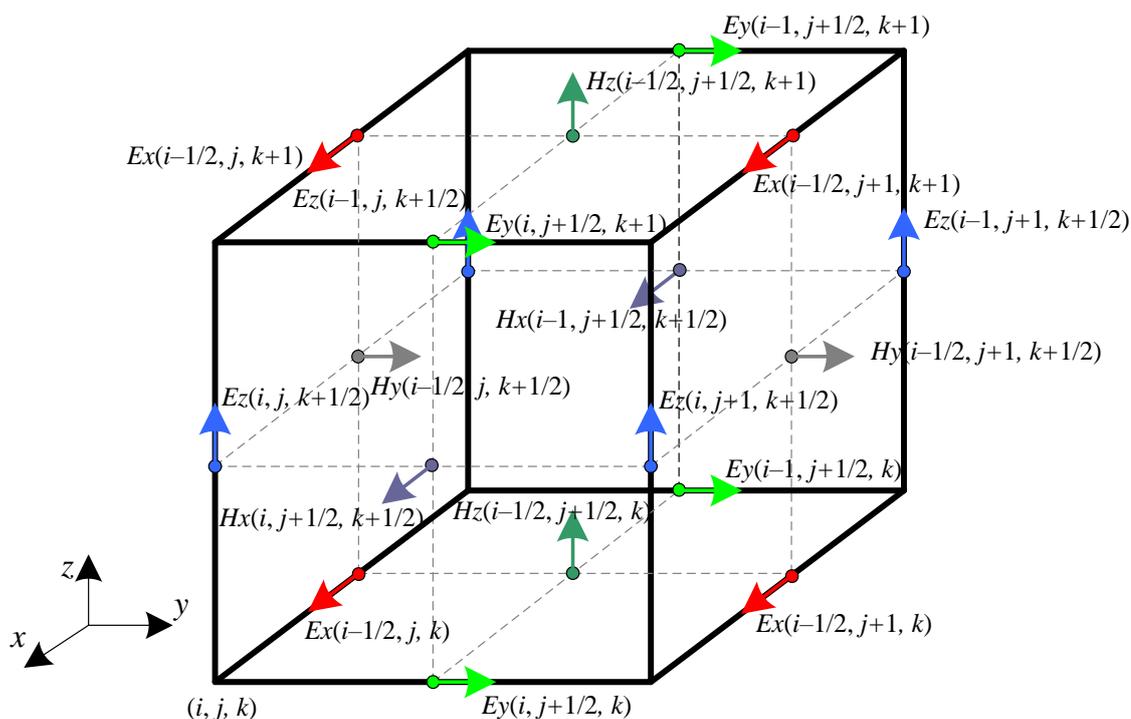


Рисунок 1.10 – Позиции компонент векторов **E** и **H** в ячейке **Йи**

Для упрощения решения применяются простые приближения 2-го порядка центральными разностями [253], полученные для пространственных и временных производных электрического и магнитного полей. Этим обеспечивается дискретное представление непрерывного электромагнитного поля в объеме пространства на некотором временном интервале [254]. Общая идея метода заключается в следующем: в некоторый момент времени выполняется расчет всех компонент электрической составляющей электромагнитного поля внутри и на границах дискретизированной области пространства, после чего определяются все компоненты магнитной составляющей электромагнитного поля. Процесс продолжается до тех пор, пока счетчик временных интервалов не достигнет предельного значения или не наступит некоторое событие (например, достижение фронтом электромагнитной волны заданной точки пространства) [255, 256].

В основе применения метода лежит решение системы из 6 скалярных уравнений, полученных из уравнений закона индукции Фарадея и теоремы о циркуляции магнитного поля

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right),$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right), \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right).$$

Шаг по времени выбирается с помощью условия Куранта-Фридрихса-Леви [257, 258]. Достаточно полному изложению метода посвящены работы [259–261].

Достоинства. Простой и прямой подход к решению уравнений Максвелла. Имеет явную схему решения, не требующую хранения СЛАУ, а также неявную схему, сводящуюся к СЛАУ. Достаточно просто описывает неоднородность среды. Работа во временной области позволяет получать результаты в широком диапазоне частот. Так как, согласно методу, поля вычисляются последовательно с течением времени, это позволяет создавать анимированные изображения распространения волновых процессов в счетном объеме. Метод позволяет указать материал в каждой точке счетного объема и может использовать не только широкий спектр металлов и диэлектриков, но и материалов с нелинейными свойствами. Позволяет непосредственно моделировать эффекты на отверстиях, так же как эффекты экранирования, причем поля внутри и вне экрана могут быть рассчитаны как напрямую, так и нет. Возвращает сразу значения векторов **E** и **H**.

Недостатки. Счетный объем должен быть разделен на очень большое число ячеек (размер подобласти мал по сравнению с наименьшей длиной волны), что означает большие затраты памяти и времени моделирования, почему оказывается сложным моделировать задачи с длинными, тонкими пространственными структурами, например, поля проводников с током. Выполняется расчет полей в каждой точке счетного объема, поэтому, если требуется найти поле на некотором отдалении от источника, это, скорее всего, значит, что счетный объем окажется чрезмерно большим. Счетный объем должен быть конечным, чтобы уместиться в памяти компьютера, что в большинстве случаев достигается с помощью задания искусственных граничных условий в счетном объеме, использование которых может привести к искажению данных.

1.3.2.2 Метод конечного интегрирования

Метод конечного интегрирования (FIT) предложен Т. Виландом (T. Weiland) в 1977 г. в качестве вычислительного инструмента для решения уравнений Максвелла [262]. FIT представляет собой дискретную формулировку уравнений Максвелла в интегральной форме, удобную для реализации на компьютерах и позволяющую моделировать реальные электромагнитные задачи со сложной геометрией. Метод может быть реализован как во временной, так и в частотной областях. При этом FDTD считается частным случаем FIT [263]. Кроме того, не накладывается никаких ограничений на тип используемой сетки разбиения,

наряду со структурированной сеткой в декартовой системе координат поддерживаются неортогональные сетки, например, тетраэдральная. FIT имеет высокую эффективность в тех задачах, где необходим анализ нестационарных процессов в неоднородном, анизотропном пространстве для объектов с произвольной формой границ. Этот численный метод обеспечивает универсальную схему пространственной дискретизации, которую можно применять к различным случаям, начиная со статического поля и заканчивая высокочастотными расчетами во временной и частотной областях. Для численного решения уравнений Максвелла определяется область расчета. В процессе создания сетки эта область разбивается на ячейки. Пространственная дискретизация этих уравнений производится на двух ортогональных ячейках – первичной и вторичной (дуальная сетка) [264].

Суть метода заключается в следующем. Первоначально записываются уравнения Максвелла в интегральной форме. Далее вычислительная область разбивается на конечное число объемных ячеек (FIT-ячейки). Они сформированы так, что точно соответствуют друг другу и пересечение двух различных ячеек является либо пустотой, либо многоугольником с одномерным краем, либо точкой, разделенной обеими ячейками. Эта схема разбиения приводит к конечной вычислительной сетке интегрирования. Вся вычислительная область составлена из конечного набора элементарных ячеек. Пересечение двух элементарных непустых объемов является объемом, пересечение двух элементарных непустых плоскостей – линией, пересечение двух линий – точкой. Переменные в FIT (электромагнитные поля и потоки) обычно расположены вдоль элементарных линий или на элементарных плоскостях. Аналогично могут быть вычислены напряжения вдоль других краев ячейки. Полный магнитный поток через плоскость может быть вычислен как интеграл плотности магнитного потока через эту плоскость. Полный магнитный поток через большую плоскость может быть вычислен как сумма магнитных потоков составляющих элементарных областей. В результате электрические напряжения и магнитные потоки всего комплекса ячеек можно представить в матричном уравнении [265]. Производные времени, входящие в уравнение Максвелла, аппроксимированы согласно центральной дифференциальной формуле. Уравнения электрического и магнитного полей получены из этих дискретизированных уравнений, из которых видно, что электрическое и магнитное поля смещены относительно друг друга на половину временного шага.

Сигнал возбуждения играет очень важную роль в получении корректного отклика системы при анализе в определенном частотном диапазоне. Для получения отклика системы в частотном диапазоне, выгодно использовать пульсирующее возбуждение как функцию времени.

Для такого возбуждения обычно используется Гауссов импульс. Чтобы охарактеризовать основные свойства микроволновых устройств, используются пульсирующие источники сигнала, при воздействии которых анализируются различные поля в определенных местах устройства. Пространственные характеристики сигнала возбуждения гарантируют его распространение через устройство, тогда как его временная характеристика гарантирует получение отклика устройства в надлежащем диапазоне частот.

Достоинства. Может быть применён во всем частотном диапазоне, от постоянного тока до высоких частот. Легко применим к электрически сложным конструкциям. Подходит не только для любого типа решетки, но и использует различные способы дискретизации при моделировании. Требуется небольшой памяти и малого времени вычисления.

Недостатки. Главным недостатком метода является сложность дискретизации изогнутых структур. Другие недостатки аналогичны методу FDTD.

1.3.2.3 Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ, FEM) широко применяется при механическом анализе конструкций. Несмотря на то, что математическая трактовка метода была предложена в 1943 г. Курантом [266], для решения электромагнитных задач он не применялся до 1968 г., с которого он стал применяться при анализе волноводов, электрических машин, полупроводниковых приборов, МПЛ, электромагнитного излучения биологическими объектами и др. Методическая общность метода позволяет строить на его основе универсальные компьютерные программы для решения широкого круга задач. Поэтому, программы, разработанные для решения задач из других дисциплин могут быть и были успешно применены для решения задач из другой предметной области с незначительными модификациями или без таковых [267].

Основная идея МКЭ состоит в том, что любая непрерывная величина (температура, давление, перемещение) аппроксимируется дискретной моделью, построение которой выполняется на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей [268, 269]. Алгоритм построения дискретной модели изучаемой непрерывной величины заключается в следующем. В рассматриваемой области фиксируют конечное число точек. Эти точки в дальнейшем называют узлами. Полагают, что исследуемая непрерывная величина в каждом узле является переменной, подлежащей определению в процессе решения задачи. Область изменения непрерывной величины разбивают на элементы. Эти элементы имеют между собой общие узлы и, в совокупности, аппроксимируют форму области в целом.

Непрерывную величину аппроксимируют в пределах каждого элемента полиномом, коэффициенты которого рассчитывают на основании значений этой величины в узлах. Каждый элемент аппроксимируют своим полиномом, а коэффициенты полиномов подбирают таким образом, чтобы сохранялась непрерывность величины вдоль границ соседних элементов. Объединяют конечные элементы в ансамбль. В этом ансамбле узловые значения искомым функций подобраны таким образом, чтобы обеспечить достаточное приближение к непрерывному распределению. Этот этап приводит к СЛАУ относительно узловых значений. Решают полученную систему, то есть находят узловые значения. Для аппроксимации непрерывной области, при решении сформулированных граничных задач используют систему пирамидальных элементов, что позволяет записать систему уравнений для \mathbf{E} (или \mathbf{H}), решение которой позволяет определить коэффициенты интерполяционных полиномов. Далее конечные элементы объединяются в ансамбль, а интерполяционные функции выражаются через глобальные узловые значения и глобальные координаты (связанные с моделью в целом) [270]. Достаточно полному изложению метода посвящены работы [271–276].

Достоинства. Ясный физический смысл на всех этапах расчета, что позволяет легко проконтролировать результаты. Легкость расчета комбинированных конструкций, т.е. конструкций, включающих в себя элементы различной размерности.

Недостатки. Необходимость в эффективном генераторе конечных элементов. Сложность уравнений. При формировании объемной модели устройства (3D-модели) требуется проводить дискретизацию занимаемой им области с переменным шагом, что ведет к увеличению вычислительных затрат. Увеличение вычислительных затрат в многокомпонентных средах.

Отдельно стоит отметить, что FDTD, FEM и MoM являются наиболее универсальными методами и их рассмотрению посвящено наибольшее количество книг, например [47, 68, 79, 261, 123, 277–279], где эти методы рассматриваются совместно.

1.3.2.4 Метод матрицы линий передачи

Метод матрицы линии передачи (TLM) впервые предложен в 1971 г. [280]. Однако еще раньше в СССР Б.В. Сестрорецким Б.В. разработан схожий метод импедансного аналога электромагнитного пространства [281]. Данный метод основан на моделировании распространения электромагнитных волн с помощью ячеек линии передачи с периодом Δb (пространственной решетки). Гибридная TLM-ячейка определяет 6 компонент поля.

Границы, соответствующие электрическим и магнитным стенкам, представляются короткозамкнутыми и разомкнутыми шунтирующими узлами на соответствующих границах. Наличие магнитных и диэлектрических материалов может быть смоделировано за счет подключения короткозамкнутых шлейфов длиной $\Delta b/2$ на последовательных узлах и разомкнутых шлейфов – на параллельных узлах. Электрические и магнитные поля заменяются эквивалентными генераторами в линиях. Численный расчет начинается с возбуждения решетки в определенных точках импульсами тока и напряжения. Распространение этих импульсов затем рассчитывается через дискретные временные интервалы. После нахождения решения во временной области частотный спектр может быть определен с помощью преобразования Фурье. Ввиду периодичности разбиения исследуемого пространства, решение в частотной области имеет полосы пропускания и запирающие. Достаточно полному изложению метода посвящены работы [261, 282, 283].

Достоинства. Гибкость и простота математической формулировки и программной реализации. Электрические и магнитные компоненты поля могут быть вычислены в одной точке пространства.

Недостатки. Ряд ограничений, которые должны учитываться при моделировании. Из-за введения периодических решетчатых структур, появляется типичное явление пропускания и режекции в полосе частот, для исключения которого вычислительный частотный диапазон должен быть ниже границы частотного диапазона исследования и ограничен размером ячейки. Более вычислительно затратен по сравнению с FDTD.

1.3.2.5 Метод эквивалентной схемы из частичных элементов

Метод эквивалентной схемы из частичных элементов (РЕЕС) предложен в 1972 г. в работе [284] и развит в работах [285, 286]. Примечательно, что это состоялось примерно в то же время, что и обнаружение другого метода, основанного на использовании электрических схем – TLM. Справедливости ради, стоит отметить, что первые работы по разработке схемно-ориентированного метода для решения уравнений Максвелла в дифференциальной форме были выполнены Кроном в 1940-х годах [287]. Метод РЕЕС ориентирован на решение уравнений Максвелла в интегральной форме, что, в конечном счете, требует решения плотных СЛАУ, как при использовании метода моментов.

При использовании РЕЕС моделируемая структура дискретизируется на электрически малые элементы. Затем составляется эквивалентная схема (матрица), описывающая связь между

этими элементами, и затем решается результирующая СЛАУ. Метод хорошо подходит для анализа электромагнитного излучения от печатных плат. Так, в работе [288] предложены эффективные модели для решения задач целостности сигналов и питания.

Достоинства. Аналогичны МоМ, но есть возможность добавления элементов схемы в программный модуль для моделирования характеристик схемы с сосредоточенными элементами. Метод применим как в частотной, так и во временной областях. Отлично подходит для моделирования печатных плат. Моделирование на постоянном токе, учет скин-эффекта и дисперсии в диэлектрике также достаточно просто реализуются.

Недостатки. Аналогичны недостаткам МоМ.

1.3.2.6 Гибридные методы

Ни один из численных методов не подходит для всех требующих решения задач электромагнитного моделирования. Так, программные коды МоМ практически непригодны для описания неоднородных нелинейных диэлектриков. Коды метода конечных элементов не могут эффективно моделировать большие задачи рассеяния. Мультипольные и основанные на дифракции подходы не годятся для небольших сложных геометрий или задач, требующих точного определения величины поверхностного тока. К сожалению, существуют задачи, где необходимо учитывать все эти особенности, например, при оценке излучения от печатной платы, и поэтому, анализ не может быть выполнен ни одним из этих методов.

Одним из вариантов решения данной проблемы является объединение двух или нескольких методов в одном программном коде [289]. При этом часто одним из методов является МоМ [290–299]. Каждый метод применяется к области задачи, для которой он лучше всего подходит. Соответствующие граничные условия применяются на интерфейсах между этими областями.

1.3.2.7 Сравнительная характеристика двух численных методов

Из результатов обзора, приведенных ранее, следует, что при моделировании РЭС могут применяться аналитические и численные методы. Аналитические методы, к сожалению, могут быть применены для структур простой формы, что имеет место, например, при анализе плоских шин. Поэтому, в случае рассмотрения структур более сложной формы, например, имеющей закругления краёв, неоднородное диэлектрическое заполнение и др., целесообразно использование численных методов. Среди них наиболее эффективно использование метода моментов, являющегося «поверхностным», а не, как остальные, «объемным», поскольку при его

использовании не требуется искусственное задание граничных условий, эмулирующих удаленные границы. Это позволяет существенно сократить вычислительные затраты, особенно при многовариантном анализе.

В качестве примера, на рисунке 1.11*а* приведена сегментация (при одновариантном анализе) простой структуры – несимметричной МПЛ, в системе Elcut (МКЭ). При этом количество конечных элементов составляет 23812. На рисунке 1.11*б* приведена сильно учащенная (избыточная) сегментация той же линии в системе TALGAT (МоМ) [300], количество подынтервалов составило 240.

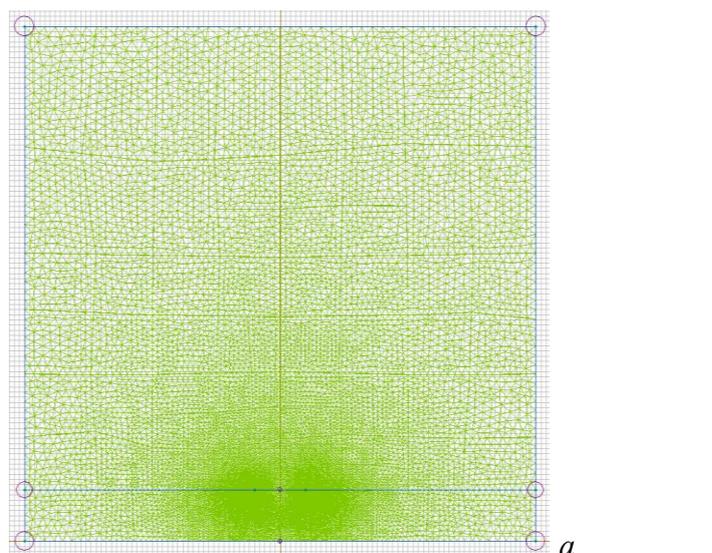


Рисунок 1.11 – Сегментация поперечного сечения несимметричной МПЛ методами: конечных элементов (*а*) и моментов (*б*)

1.4 Программы для моделирования радиоэлектронных средств

Еще в начале века, большинство электрических, радиотехнических, радиоэлектронных и др. технических средств разрабатывалось с помощью создания и тестирования их прототипов (физическое моделирование), процесса, который затратен как финансово, так и по времени. В настоящее время затраты на проектирование и анализ могут быть существенно сокращены с помощью математического моделирования, являющегося третьим путём познания, объединяющим и дополняющим теорию и натурный эксперимент [301]. Таким образом, благодаря стремительному развитию компьютерных и сопутствующих технологий основным

инструментом проектирования как в промышленных, так и в научных исследованиях, стало специализированное программное обеспечение (ПО). При этом физическое моделирование также применяется [302–305], хотя и не так широко.

1.4.1 Схмотехническое и квазистатическое моделирование

Далее приведен краткий сравнительный анализ коммерческих программных продуктов, пригодных для схмотехнического и квазистатического анализа ЭМС. Из широкого выбора САПР были выделены приведенные в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – ПО для схмотехнического и квазистатического моделирования

ПО	Сайт производителя	Производитель	Страна
Sigrity (SPEED2000 + PowerSI)	www.cadence.com	Cadence Design Systems, Inc.	США
CST (PCBMod, CableMod)	www.cst.de	CST	Германия
SIwave	Ansys Corp.	Ansys Corp.	США
Simbeor	www.simberian.com	Simberian	США
Altium Designer	www.altium.com	Altium Limited	Австралия
Sonnet	www.sonnetsoftware.com	Sonnet Software	США
NI AWR Microwave Office	www.awrcorp.com	NI AWR EDA Software	США
Q3D Extractor	www.ansys.com	Ansys Corp.	США
COMSOL Multiphysics	www.comsol.com	COMSOL, Inc.	США
ELCUT	www.elcut.ru	TOR corp.	Россия

Основной отличительной особенностью CST (PCBMod, CableMod) от других программных продуктов является возможность выполнить анализ целостности сигналов и ЭМС в кабелях (модуль CableMod). Модуль поддерживает следующие виды структур: коаксиальный кабель, витую пару, ленточный кабель, сложный жгут с неограниченным числом кабелей, экранированный кабель и т.д. Второй модуль позволяет решать аналогичные задачи применительно к печатным платам.

ПО Simbeor (система трехмерного электромагнитного моделирования многослойных печатных плат) в основном предназначен для получения качественных электромагнитных моделей линий передачи, периодических структур, неоднородностей и переходных отверстий. Поэтому данный продукт можно использовать только, если проект печатной платы или модуля требует экстракции параметров с применением полной 3D системы моделирования или

имеется необходимость определения параметров проводников и диэлектриков по измеренным данным. ПО Sigrity представляет собой интегрированную среду анализа целостности сигналов и перекрестных помех в сложных печатных платах и кристаллах интегральных микросхем. В состав пакета входят два самостоятельных приложения, имеющих единый интерфейс и общую базу данных: Speed2000 и PowerSI. Программа Speed2000 – это пакет анализа проблем ЭМС с оригинальным вычислительным ядром, работающий во временной области. Программа PowerSI выполняет аналогичные функции, но ее ядро работает в частотной области. Программы Speed2000 и PowerSI дополняют друг друга и позволяют широкий круг электромагнитных задач. В дополнение к ним в состав пакета SpeedXP входит программа BroadBand SPICE, предназначенная для экстракции SPICE схем замещения устройств, описанных матрицами S -параметров, что дает возможность учитывать их в пакетах моделирования на основе ядра HSPICE.

Altium Designer позволяет реализовывать проекты электронных средств на уровне схемы или программного кода с последующей передачей информации проектировщику ПЛИС или печатной платы. Отличительной особенностью программы является проектная структура и сквозная целостность ведения разработки на разных уровнях проектирования.

Sonnet предназначен для электромагнитного моделирования с помощью МоМ планарных СВЧ-структур: полосковых и микрополосковых линий, копланарных волноводов, одно- и многослойных печатных плат, а также антенн.

Microwave Office ориентирован на разработку всех видов радиочастотных и СВЧ-устройств, начиная от сложных СВЧ сборок и кончая интегральными СВЧ микросхемами. Реализованы интерактивный ввод принципиальных схем и топологических описаний, моделирование линейных и нелинейных схем, электромагнитное моделирование с использованием МоМ, синтез, оптимизация и др.

ПО ELCUT предназначено для инженерного моделирования мультифизичный задач (электромагнитные, тепловые и механические процессы) с помощью МКЭ. Реализованы средства уташения сетки. Источники и граничные условия полностью независимы от сетки, что позволяет их легко менять по требованию пользователя. Интерактивный постпроцессор имеет различные форматы отображения интересующей информации.

Q3D Extractor реализует вычисление параметров линий передачи с помощью МКЭ и последующее SPICE-моделирование. Области применения являются печатные платы, кабели,

соединители и др. Он может быть использован для анализа целостности сигналов и питания, а также оценки перекрестных наводок.

SIwave предназначен для анализа целостности сигналов и питания, а также анализа электромагнитных помех при проектировании интегральных схем и печатных плат. Численный анализ основан на использовании МКЭ и МоМ.

COMSOL Multiphysics – ПО, предназначенное для решения различных мультифизических задач. В части электромагнитного моделирования реализовано несколько модулей, главным вычислительным методом которых является МКЭ. Также относительно недавно реализованы средства утачки сетки, различные средства ускорения вычислений и возможность использования МоМ. В целом он применим для решения аналогичных задач, упоминаемых при описании других программных продуктов.

1.4.2 Электродинамическое моделирование

На рисунке 1.12 в виде коллажей приведены названия ПО для моделирования на 1997, 2009 и 2014 гг. [306–308]. Хорошо прослеживается тенденция появления новых продуктов, объясняющаяся возрастающими требованиями к проектированию. Поэтому существующий арсенал ПО достаточно обширен. Для наглядности и первого сравнения в таблице 1.3 приведена общая информация лишь о некоторых из них.

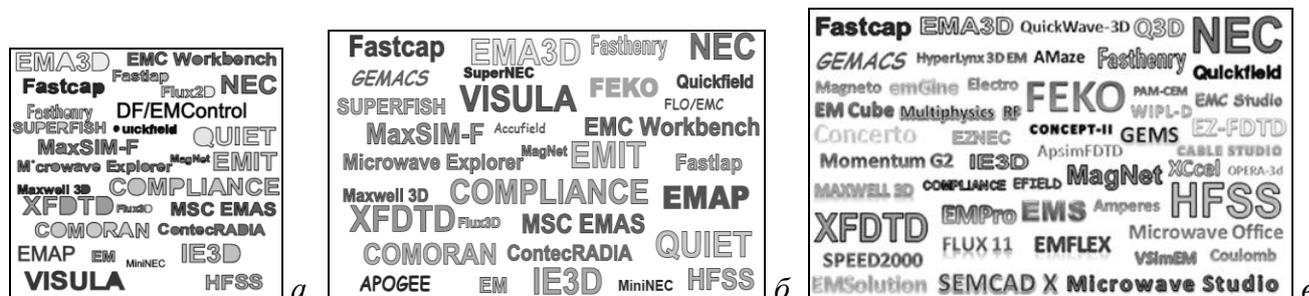


Рисунок 1.12 – Коллаж из названий ПО на 1997 (а), 2009 (б), 2014 (в) гг. [306–308]

Анализ развития ПО показывает, что в последнее время наметилось несколько тенденций его развития. Первой является расширение функциональных возможностей за счет совершенствования основного (появившегося исторически первым и на основе которого была создана система) численного метода, с интеграцией других численных методов, а также их гибридов. Данный подход позволяет расширить возможности системы в целом за счет повышения ее универсальности. Так, если основной метод не подходит для требуемого вида

анализа, пользователь всегда может воспользоваться другим методом или гибридом. В качестве примера можно привести такие системы как FEKO и EMCoS Studio, первоначально ориентированные на использование MoM: относительно недавно в данных системах реализована возможность использования МКЭ.

Таблица 1.3 – ПО для электродинамического моделирования

Название	Главный метод	Производитель	Страна
Concept-II	MoM	University of Technology Hamburg-Harburg [309]	Германия
Altair FEKO	MoM	Altair Engineering, Inc. [310]	США
EMCoS Studio	MoM	EmCoS [311]	Грузия
WIPL-D	MoM	WIPL-D [312]	Сербия
Singula	MoM	Integrated Engineering Software Sales Inc. [313]	Канада
HyperLynx 3D EM	MoM	Mentor Graphics [314]	США
GEMACS	MoM	Applied Research Associates [315]	США
newFASANT	MoM	NEWFASANT SL [316]	Испания
Momentum	MoM	Keysight [317]	США
Lucernhammer	MoM	Tripoint Industries, Inc. [318]	США
ЭДЭМ	MoM	EDEM3D [319]	Россия
GEMS	FDTD	Computer and Communication Unlimited [320]	США
QuickWave	FDTD	QWED [321]	Польша
Semcad-X	FDTD	SPEAG [322]	Швейцария
EMPIRE	FDTD	IMST GmbH [323]	Германия
XFDTD	FDTD	RECOM [324]	США
CEM One	FDTD	ESI Group [325]	Франция
EMA3D	FDTD	Electro Magnetic Applications [326]	США
Em.cube	FDTD	EMAG Technologies [327]	США
CST MICROSTRIPES	TLM	CST (Flomerics Gr.) [328]	Германия
MEFiSTo	TLM	FAUSTUS Scientific Corp. [329]	Канада
ANSYS HFSS	FEM	Ansys Corp. [330]	США
EMPro	FEM	Keysight [317]	США
Opera	FEM	Cobham [331]	Великобритания
Асоника-ЭМС	FEM	«НИИ «АСОНИКА» [332]	Россия
RFS	FEM	LG Russian R&D center [47]	Россия
CST Microwave Studio	FIT	CST [328]	Германия

Второй тенденцией является поглощение одних систем другими. Данный подход в части расширения функциональных возможностей схож с предыдущим, однако более универсален. Так, относительно недавно CST поглотила английскую компанию Flomerics, занимающуюся

разработкой линейки продуктов для электромагнитного моделирования MicroStripes и FLO/EMC. Благодаря данному поглощению CST получила возможность дополнить имеющийся у нее ряд вычислительных модулей, хорошо зарекомендовавшими себя разработками фирмы Flomerics, базирующимися на методе TLM. Также происходит объединение в единой оболочке средств различного вида моделирования: теплотехнического, электромагнитного, гидродинамики и др. Так, в качестве примера можно привести поглощение компании ANSOFT (программный продукт HFSS для электродинамического моделирования) компанией ANSYS (другие виды моделирования). Аналогично система FEKO вошла в линейку программных продуктов компании Altair (первоначально занимающейся твердотельным моделированием). Подобное недавно произошло и с уже упомянутой линейкой продуктов CST, приобретенных компанией Dassault Systèmes, являющейся одной из лидеров по созданию систем автоматизированного проектирования.

Далее приведены краткие описания систем электродинамического моделирования, основанных на самых универсальных численных методах.

1.4.2.1 Программное обеспечение, основанное на методе моментов

1.4.2.1.1 CONCEPT-II

Программное обеспечение CONCEPT-II предназначен для численного решения задач электромагнитного излучения и рассеяния в частотной области. Ядро вычислений основано на решении интегральных уравнений для электрического (EFIE) и магнитного (MFIE) полей методом моментов. Это ПО может быть использовано для вычисления токов, напряжений и полей, являющихся результатом какого-либо возбуждения металлических структур и диэлектрических тел [333]. Электромагнитные поля вычисляются в ближней и дальней зонах.

1.4.2.1.2 Altair FEKO

Система трехмерного электродинамического моделирования Altair FEKO (далее FEKO) предназначена для анализа антенных систем и неоднородных диэлектрических сред и является высокопрофессиональным продуктом, в котором сосредоточены все лучшие качества, достигнутые и развитые в настоящее время в программах проектирования СВЧ-устройств. МоМ в дополнение с методом физической оптики (ПО) позволяет рассчитывать антенные системы в присутствии больших и сложных металлических структур. Система отличается удобным

интерфейсом построения геометрии и задания источника(ов) возбуждения и позволяет, помимо прочего, рассчитывать диаграммы направленности (ДН) фазированных антенных решеток.

Вычислительные возможности. Моделирование сложных структур с помощью методов: МоМ, MLFMM, векторного FEM и FDTD; анализ электрически больших структур с использованием приближённых методов: UTD, метода геометрической оптики (GO) и его модификации (RL-GO), а также метода PO и его версии для укрупнённых сеток (LE-PO); использование базисных функций высших порядков для снижения вычислительной сложности задачи; схема адаптивной частотной интерполяции для эффективного анализа в широкой полосе частот; эффективный децентрализованный вычислительный модуль (есть возможность параллельных и кластерных вычислений) для обработки моделей с повышенной сложностью; специальные функции Грина для плоскостойких структур; различные опции для моделирования диэлектрических объектов (объемные, плоские сетки, аппроксимации для земли, тонких листов, изолированных проводов и др.); задания частотно-зависимых электрических характеристик материалов; интеграция цепей, заданных в виде SPICE-моделей.

Отметим дополнения, которые интегрированы в версию 2017 г. Конечноразностный решатель поддерживает параллельность OpenMP и MPI, позволяя пользователям в полной мере использовать рабочие станции (PC) с несколькими ядрами и несколькими вычислительными узлами в кластерных средах. Реализована поддержка трехмерных анизотропных материалов при использовании конечноразностного и конечноэлементного решателей. Улучшена сходимость метода MLFMM. Уменьшены вычислительные затраты на моделирование при использовании решателя МППП. Улучшен генератор сетки.

Система FEKO позволяет использовать несколько численных методов, а также даёт возможность их гибридизации (рисунок 1.13), что существенно расширяет круг решаемых задач. Выбор того или иного численного метода опирается на использование целого ряда критериев: сложность геометрии анализируемого объекта, его электрические размеры, имеющиеся вычислительные мощности и др. Краткая история реализации новых численных методов в FEKO приведена в таблице 1.4. Представленные данные еще раз подтверждают актуальность разработки специализированного ПО.

Отдельно стоит отметить, что FEKO – один из самых популярных коммерческих программных продуктов у российских специалистов. Об этом можно судить по имеющейся русскоязычной литературе [41, 334, 335].



Рисунок 1.13 – Совокупность численных методов в системе FEKO [310]

Таблица 1.4 – Реализация новых методов в системе FEKO [310]

Год	Метод
1991	MoM
1992	MoM/PO
1994	MoM/UTD
2004	MLFMM
2005	MoM/FEM
2007	MoM/RL-GO
2010	MLFMM/FEM; MoM/LE-PO
2014	MLFMM/PO+LE-PO; FDTD

1.4.2.1.3 EMCos Studio

EMCos Studio – ПО, предназначенное для решения сложных проблем ЭМС. Оно специально разработано для инженеров, работающих над проблемами ЭМС в больших системах, таких как автомобили, самолеты и корабли, требующих специального подхода для её оценки. Если антенны, кабельные жгуты, интегральные схемы или большие металлические рассеиватели должны быть оценены вместе, то в большинстве случаев прямое численное решение волнового уравнения не дает удовлетворительного результата и нужны комбинированные методы. Именно такие методы реализованы в EMCos Studio. Так, реализованы удобные для пользователя интерфейсные решения для пре- и пост- процессинга с высокой точностью расчетов. Это ПО также успешно может быть использовано при решении типовых электромагнитных задач, например, при расчете антенных характеристик.

В версии 2017 г. реализованы следующие новые возможности: поддержка KVL формата кабельных жгутов; подход для быстрого анализа крупномасштабных кабельных систем в частотной и временной областях; одновременный учет поверхностного эффекта и эффекта

близости; быстрые методы решения крупномасштабных электромагнитных задач; возможность распределенных вычислений.

Отдельно стоит отметить, что в ПО, для решения задач дифракции, реализована возможность использования метода вспомогательных источников, разработанного В.Д. Купрадзе [336]. Подробнее о методе можно узнать, например из [337–339].

1.4.2.1.4 HyperLynx 3D EM

ПО HyperLynx 3D EM предназначено для решения сложных антенных задач. Именно для анализа и проектирования антенн, как считается, наилучшим образом подходит программа HyperLynx 3D EM, представляющая собой полноволновой инструмент для моделирования, использующий MoM. Позволяет рассчитывать S -параметры, распределение токов на поверхности антенны, ДН в дальней зоне для антенны в моностатической конфигурации и для несложной антенной решетки, распределение поля вблизи поверхности антенны и т.д. Для сложных антенных решеток это ПО позволяет, после полного обчета одного элемента, прогнозировать поведение всей системы путем введения, так называемого, «фактора решетки», который учитывает прохождение сигнала из антенны в антенну при различном расположении элементов [340, 341].

1.4.2.1.5 ЭДЭМ

ПО ЭДЭМ (ЭлектроДинамика Элементов из Металла) предназначено для моделирования структур, допускающих аппроксимацию набором проводящих поверхностей (рефлекторы, экраны, замкнутые и незамкнутые оболочки произвольной формы) и содержащих сосредоточенные ёмкости и индуктивности. Программа позволяет вычислять электрические и магнитные поля, пространственные распределения компонент этих полей и плотности потока мощности, ДН, полную излучаемую мощность и др. В основе программы лежат вычислительные алгоритмы, разработанные авторами [342–344].

1.4.2.2 Программное обеспечение, основанное на методе конечных разностей во временной области

1.4.2.2.1 QUICKWAVE

QUICKWAVE является двумерной и трёхмерной средой для моделирования электромагнитных высокочастотных полей и для разработки, проектирования, моделирования,

анализа и оптимизации высокочастотных электромагнитных узлов. Алгоритм FDTD, реализованный в системе, решает уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей. Алгебраические уравнения записываются во временной форме и решаются в каждой временной точке анализа, что даёт возможность получения широкополосной частотной характеристики. FDTD симуляторы могут обрабатывать сложный диэлектрик, структурируя его и описывая отдельные объекты, составленные из ячеек.

1.4.2.2.2 SEMCAD-X

SEMCAD-X – ПО для электромагнитного и теплового моделирования, основанное на методе FDTD. Это ПО разработано для удовлетворения целого ряда потребностей проектировщика: оценка электромагнитного излучения, ЭМС, проектирование антенн (зависимость входного сопротивления от частоты, КПД, коэффициент усиления, ДН), решение задач дозиметрии, медицины и оптики. SEMCAD-X включает подпрограмму SPICE, которая моделирует электронные схемы, которые составлены из различных аналоговых элементов. В большинстве моделируемых ситуаций эти схемы взаимодействуют с физическими устройствами, например полосковая линия или антенна. Также реализованы возможности моделирования электромагнитных задач с использованием фактического сигнала, управляющего электромагнитной системой, и рассмотрения напряжения или тока в схеме.

1.4.2.2.3 EMPIRE

Empire – универсальная система, которая применяется для моделирования электромагнитных полей корпусов, соединительных проводов, радиаторов, волноводов, антенн и задач ЭМС. В системе реализована возможность 2D/3D импорта и экспорта данных, простая настройка параметров моделирования, автоматическое создание сетки, параметризация, удобный пользовательский интерфейс.

Компания IMST разработала для Empire технологию моделирования XPU, позволяющую ускорить расчет электромагнитного поля при анализе крупных объектов. Уникальность технологии заключается в том, что система автоматически определяет тип и архитектуру используемого для моделирования процессора, на основании чего этим оптимизирует алгоритм расчета электромагнитного поля. В результате оптимально задействуются все ядра процессора и все уровни памяти (регистры, кэш-память, ОЗУ, жесткий диск). Эффективное использование кэш-памяти дает возможность исключить задержку передачи данных между ОЗУ и ЦП. Также

реализован доступ ко всей оперативной памяти компьютера, что позволяет моделировать крупные объекты сложной формы. Кроме того, для повышения скорости моделирования реализована поддержка подкачки данных из ОЗУ на жесткий диск (объем выделяемой памяти до 2 Тбайт) [345].

1.4.2.2.4 XFDTD

XFDTD – система полномасштабного трехмерного электромагнитного моделирования, обладающая интуитивным графическим пользовательским интерфейсом подготовки расчетов и представления результатов. Реализован классический вариант FDTD. Так, алгебраические уравнения записываются во временной форме для электрического и магнитного полей и решаются в каждой временной точке анализа, что даёт широкополосную частотную характеристику. Геометрические модели моделируемых объектов разрабатываются в встроенном трехмерном графическом редакторе или импортируются из машиностроительных систем проектирования Pro/Engineer, Inventor и др.

1.4.2.2.5 GEMS

GEMS – ПО для моделирования задач ЭМС. Оно имеет удобный и интуитивно понятный интерфейс пользователя для создания геометрической модели исследуемой структуры. Реализована возможность параллельных вычислений на многопроцессорных компьютерах, суперкомпьютерах и кластерах. GEMS позволяет моделирование массивов антенн, сложных антенн, корпусов технических объектов, микроволновых контуров и устройств, а также воздействия электромагнитных волн на живые организмы. Позволяет эффективно использовать аппаратные возможности используемой вычислительной системы.

1.4.2.2.6 EM.Cube

EM.Cube – ПО для электромагнитного моделирования проблем разработки радиочастотной системы. Она имеет несколько различных симуляторов, которые могут решать широкий спектр задач моделирования, таких как электромагнитное излучение, рассеяние, распространение волн в различных средах, паразитные связи, помехи, целостность сигнала, взаимодействие полей на биологические объекты.

1.4.2.2.7 ЕМА3D

ЕМА3D позволяет трехмерное численное решение уравнений Максвелла, основанное на FDTD в прямоугольных координатах. История системы насчитывает около 40 лет. ЕМА3D позволяет помимо прочего моделировать тонкие провода, тонкие зазоры и тонкие поверхности, размеры которых меньше размера вычислительной ячейки. Разрешены для использования зависящие от частоты и анизотропные электромагнитные параметры. Кроме того, существуют различные граничные условия, источники и переменные размеры ячеек.

Анализ может быть выполнен на современных рабочих станциях и настольных компьютерах. Однако высокоточное моделирование аэрокосмических средств при сложных воздействиях, таких как молния, может быть выполнено средствами параллельной обработки или с помощью вычислительных кластеров. При этом программный код очень эффективно масштабируется для большого числа процессоров и обеспечивает значительное снижение требований к времени вычисления больших моделей.

1.4.2.3 Программное обеспечение, основанное на методе матрицы линий передачи

CST MICROSTRIPES – ПО, позволяющее анализировать высокочастотные электродинамические задачи. Данный продукт является полноценной системой, которая позволяет проектировать и анализировать электромагнитные устройства и структуры, а также решать задачи ЭМС. Задание геометрии происходит, используя встроенный редактор с помощью примитивов или импортируя геометрию из другой САПР. После завершения вычислений отображаются компоненты электрического и магнитного полей, поверхностные токи и др.

1.4.2.4 Программное обеспечение, основанное на методе конечных элементов

1.4.2.4.1 ANSYS HFSS

HFSS – ПО, позволяющее вычислять многомодовые S -параметры и электромагнитные поля в трехмерных пассивных структурах произвольной формы. HFSS использует для решения уравнений электродинамики метод конечных элементов, а также адаптивное генерирование и деление ячеек. Решения для электромагнитного поля, найденные из уравнений Максвелла, позволяют точно определить все характеристики СВЧ-устройства с учетом возникновения и преобразования одних типов волн в другие, потерь в материалах и на излучение и т.д. HFSS

предоставляет возможности моделирования антенн, делителей мощности, схем коммутации, волноводных элементов, фильтров СВЧ и трехмерных неоднородностей, описание которых сводится к созданию чертежа структуры, точному заданию материала, идентификации портов и требуемых характеристик. В результате расчета находятся поля внутри и вне структур, а также многомодовые S -параметры. Рассчитанные S -параметры могут использоваться далее в программах анализа линейных и нелинейных схем, в частности, в программе Microwave Office.

Мощным средством повышения эффективности решения является адаптивный метод уплотнения сетки, который состоит в следующем: начальные тетраэдральные ячейки создаются на основании структуры, созданной из базовых элементов, имеющихся в библиотеке HFSS (примитивов). Это начальное разбиение на ячейки предоставляет грубую информацию о поле, выделяя области с высокой его напряженностью или с большими градиентами. Разбиение на ячейки затем уплотняется только там, где поле претерпевает резкое изменение, уменьшая вычислительные затраты при улучшении точности. Если необходимо, пользователи могут вести адаптацию вручную, интерактивно используя интерфейс программы.

1.4.2.4.2 EMPro

EMPro представляет собой конструкторскую среду создания 3D моделей и моделирования с целью анализа 3D электромагнитного взаимодействия высокоскоростных цифровых и ВЧ/СВЧ компонентов. В EMPro можно анализировать объемные структуры, с помощью конечноэлементного решателя. Для проектов, в которых имеются электрически большие компоненты, такие как антенны, или для анализа целостности сигнала, может быть использован симулятор на основе метода FDTD. В состав конечноэлементного решателя входят прямой и итерационный алгоритмы принятия решений, использующие линейные и квадратичные базисные функции, что позволяет решать широкий диапазон задач.

1.4.2.4.3 Асоника-ЭМС

ПО Асоника-ЭМС позволяет оценивать уровень стойкости РЭС к внешним электромагнитным воздействиям и при необходимости вносить соответствующие изменения в его конструкцию. Подсистема производит расчет эффективности экранирования (ЭЭ) и напряженности электрического и магнитного полей внутри корпусов РЭС с типовой и произвольной геометрией. Реализована сетевая база данных электромагнитных параметров

конструкционных материалов. Система состоит из интерфейса пользователя, графической подсистемы и расчетного ядра.

1.4.2.4.4 RFS

Radio frequency simulator (RFS) программа, разработанная LG Russian R&D Centre совместно с Санкт-Петербургским государственным электротехническим университетом «ЛЭТИ». Основное назначение RFS проведение анализа и (параметрической) оптимизации микроволновых устройств, антенн и др. Программа основана на решении уравнений Максвелла с помощью МКЭ. Отличительными особенностями программы от аналогов является её способность генерации сетки для сложных геометрических моделей исследуемого объекта, малые вычислительные затраты, возможность удаленных вычислений и возможность вычисления максимальной удельной поглощаемой мощности в заданном диэлектрическом объекте [47] (и цитируемая в этой книге литература).

1.4.2.5 Программное обеспечение, основанное на методе конечного интегрирования

CST Microwave Studio (CST MWS) представляет собой программу, предназначенную для быстрого и точного численного моделирования высокочастотных устройств (антенн, фильтров, ответвителей мощности, планарных, многослойных структур), а также анализа проблем целостности сигналов и ЭМС во временной и частотных областях с использованием прямоугольной или тетраэдральной сеток разбиения, соответственно.

Важным преимуществом вычислительных технологий компании CST является использование идеальной аппроксимации границ (Perfect Boundary Approximation, PBA). При моделировании 3D структур, содержащих поверхности сложной кривизны, использование классической прямоугольной сетки разбиения приводит к необходимости использовать слишком мелкую сетку и неоправданно большое число ячеек. Использование тетраэдральной сетки частично решает проблему и позволяет снизить требования к вычислительным ресурсам. Технология PBA использует преимущества обоих перечисленных подходов, но обеспечивает беспрецедентный прирост производительности без потери точности вычислений.

Также в системе реализованы еще две технологии: метод тонких стенок (Thin Sheet Technique, TST), позволяющий оптимально представить две диэлектрические части кубической ячейки, разделенные тонкой металлической стенкой, а также многоуровневая схема подсеток (Multilevel Subgridding Scheme, MSS). Последняя позволяет линиям разбиения начинаться и

заканчиваться в любой точке анализируемого объема и, тем самым, вблизи элементов произвольной формы получить особые конформные слои с измельченной сеткой разбиения.

В конце 2017 г. производитель ПО для проведения электродинамического моделирования Computer Simulation Technology представил новые возможности своего продукта CST STUDIO SUITE 2018, выход которого состоялся в первой половине 2018 г. Среди прочих дополнений выделяются следующие:

Реализация гибридного способа моделирования. Гибридные методы вычислений ранее уже были доступны в CST, например, при моделировании кабельных систем. В данном случае речь идет о совместном использовании временного вычислителя (Т, метод FIT) и интегрального (I, MoM/MLFMM). Такая связка позволяет оптимально анализировать, например, параметры антенны на носителе так, что источник детально рассчитывается временным способом, а его окружение – интегральным. При этом вычисляется изменение не только ДН источника при размещении на объекте, но и S -параметров, потерь и др. характеристик.

Отдельно стоит отметить, что в системе реализована возможность интеграции с другими продуктами компании, например с системой CST CABLE STUDIO, которая предназначена для моделирования электромагнитных эффектов в кабелях и позволяет оптимизировать массу и размер одиночных проводов, витых пар, а также сложных жгутов с неограниченным числом проводников. Также она позволяет оценивать напряжения в разных точках кабелей, токи через определенные проводники, S -параметры, импедансы, а также взаимные наводки проводников друг на друга. За счет интеграции с CST MICROWAVE STUDIO она дает возможность моделировать воздействие на кабели внешних электромагнитных полей. Например, возможно моделирование уровней сигналов в электропроводке самолета при попадании в него грозового разряда.

В анонсированной версии 2019 года продолжены работы по гибриднему использованию вычислительных модулей и расширению сферы применимости программы. Посредством взаимодействия с пакетом SIMULIA дополнительно могут быть реализованы возможности мультифизического моделирования.

В заключение отдельно стоит отметить, что часть из рассмотренных программных продуктов имеют образовательные (CST STUDIO SUITE Student version, FEKO LITE, Concept-II demo version, newFasant Silver Version, QuickWave STUDENT Release, ELCUT) и ознакомительные версии (Semcad-X, WipL-D Demo, Empire).

1.5 Методы построения сетки

При одновариантном анализе рассматриваемого объекта построение математической модели состоит из нескольких взаимосвязанных этапов (подраздел 1.1), наиболее затратным из которых является решение СЛАУ. При этом свойства формируемой СЛАУ определяются выбранным методом построения сетки (дискретизации).

При решении современных инженерных и научных задач одной из главных проблем является обеспечение высокой точности расчетов при адекватной вычислительной сложности методов численного моделирования. Для решения этой проблемы возможно два подхода: переход к массивно-параллельным вычислениям или к адаптации сетки к особенностям решения. Таким образом, разработка методов построения адаптивных сеток для численного решения прикладных задач является актуальной проблемой вычислительной математики, привлекающей многих исследователей [346]. Так, имеются многочисленные теоретические и экспериментальные результаты, показывающие преимущества использования таких сеток при решении сложных задач. Тем не менее, эта проблема полностью не решена, и в настоящее время, выходят новые публикации, посвященные модификации известных и разработке новых методов построения адаптивных сеток, а также созданию алгоритмов расчета на этих сетках. Использование при расчетах таких сеток позволяет повысить точность этих расчетов, не увеличивая числа узлов, что ведет к экономии машинных ресурсов. Известно, что точность численного решения в подобластях сосредоточения особенностей решения существенно влияет на точность решения во всей области. Тогда сгущением сетки в таких подобластях можно повысить точность численного решения. Напротив, в целях экономии машинных ресурсов целесообразно иметь разреженную сетку в областях плавного изменения решения. Поэтому возникает потребность в использовании неравномерных сеток.

Известно несколько методов для автоматической корректировки плотности сетки в соответствии с формой и сложностью анализируемой задачи, использующих различные способы построения и критерии оценки качества сетки при использовании методов моментов [222, 224, 347, 348], конечных элементов [349–353] и разностей [354, 355]. Однако большинство из них недостаточно надежно, некоторые из них довольно трудоемки и не могут быть универсально использованы для адаптивного моделирования сложных задач.

Методы построения адаптивных сеток могут быть разделены на три основные категории: h -уточнение, p -уточнение и r -уточнение [356]. При h -уточнении один и тот же тип элементов используется для всей сетки, но размер каждого элемента изменяется. В случае p -уточнения

сетка не изменяется, но порядок исходных базисных функций (например полиномиальных для МКЭ) увеличивается адаптивно. При r -уточнении используется тот же тип элементов и их количество, которые не изменяются, но положение узла изменяется, для их большего сосредоточения в областях с резкими градиентами решения. Из трех типов h -уточнение является самым популярным из-за его простоты [357]. Существуют два основных подхода для h -уточнения, основанных на ошибке и потоке [358].

Основанный на ошибке подход начинается с проведения анализа с грубой сеткой, а затем его результаты используются для оценки ошибки для каждого элемента. Этот метод называется ориентированным на апостериорную оценку ошибки. Затем сетка уточняется в местах, где ошибка выше определенного порога. Процесс является итерационным. Он останавливается, когда ошибка внутри всех элементов находится ниже определенного порога. Основным недостатком этого подхода является то, что сам процесс оценки ошибки является вычислительно сложным. Так, в некоторых случаях вычислительные затраты на эту оценку могут быть сопоставимы с затратами самого процесса анализа [359].

Подход, основанный на потоке, также начинается с проведения анализа при грубой сетке, а затем его результаты используются для вычисления градиента внутри каждого элемента. Затем сетка уточняется для элементов, где градиент является самым высоким. Анализ выполняется еще раз с использованием вновь построенной сетки. Полученные результаты сравниваются с результатами предыдущей итерации, для получения разницы между ними. Этот процесс повторяется итерационно пока разница между результатами двух последовательных итераций не будет ниже определенного порога.

Основанные на потоке и ошибке подходы имеют общие недостатки. Первый заключается в необходимости итерационного процесса. Хотя первая итерация и будет очень быстрой, поскольку анализ выполняется на грубой сетке, где СЛАУ является небольшой, каждый раз, когда сетка учащается, время выполнения увеличивается по мере увеличения количества её элементов. Таким образом, на последней итерации анализ будет выполняться намного медленнее. Эта проблема становится более серьезной, если сходимость недостаточно быстра. Второй недостаток заключается в том, что для каждой новой итерации необходимо вычислять контролируемый параметр, что увеличивает вычислительные затраты каждой итерации и всего анализа в целом. Поэтому требуется поиск новых подходов к построению адаптивной сетки.

В работе [360] представлен новый метод общего сохранения результатов, с целью ускорения заполнения матрицы импедансов в МоМ. Технология позволяет сохранять недавно

рассчитанные элементы матрицы в кэш, и, когда запрашивается матричный элемент с теми же свойствами, она быстро находит ответ в кэше, а не рассчитывает заново. Очевидно, что это может быть эффективно использовано при учащении сетки.

1.6 Методы решения СЛАУ

Становлением современных вычислительных методов линейной алгебры можно считать опубликование трех монографий отечественной семейной пары Фаддеевых под общим названием «Вычислительные методы линейной алгебры» [361–363]. Фундаментальность, заложенная в этих работах на заре становления компьютерной техники, позволяет им оставаться востребованным до настоящего времени как среди отечественных, так и зарубежных исследователей [364].

Широкое использование математического моделирования в различных областях знаний часто сводится к необходимости использования матрично-векторного аппарата, что делает актуальным совершенствование инструментария вычислительной линейной алгебры. Согласно [365], около 75% всех расчетных задач приходится на решение СЛАУ. По наблюдениям автора данной работы, за редким исключением, ни одна книга или пособие по численным методам не обходится без рассмотрения методов решения СЛАУ. Также стоит отметить, что решение СЛАУ используется в проекте Top500 для ранжирования самых высокопроизводительных вычислительных систем в мире [366]. Поэтому проблема решения СЛАУ еще долго будет оставаться архиактуальной [367].

Необходимость решения СЛАУ возникает помимо электромагнетизма в задачах гидродинамики [368, 369], строительной механики [370], электроэнергетики [371, 372], автоматизации и управления процессами [373], геофизики [374], дифракции [375], восстановлении изображений [376], компьютерного зрения [377], теории электрических цепей [378], статистики [379], оптимизации [380], биологической кинетики [381] и многих других [382, 383].

Все методы решения СЛАУ делятся на прямые и итерационные [363]. Прямыми, также называемыми точными, являются методы, которые дают решение за конечное число арифметических операций. Если ошибки исходных данных и округления, при выполнении арифметических операций, отсутствуют, то и решение будет точным. Итерационными являются методы, в которых решение получается посредством единообразно повторяемого процесса итераций. При этом точное решение может быть получено только с помощью бесконечного их

числа. Выбор метода для эффективного (с точки зрения точности, затрат времени и памяти компьютера) решения СЛАУ зависит от размера, обусловленности, симметричности, разреженности/плотности, специфики расположения ненулевых элементов и др. её матрицы [384]. Размерность системы, пожалуй, является главным фактором, заставляющим не использовать весьма привлекательный и применимый на практике (при небольших N) метод Крамера, затраты которого составляют $O(N!)$ [365]. Достаточно давно итерационные методы применяются для решения больших разреженных СЛАУ, формируемых при решении уравнений в частных производных численными методами конечных разностей, объемов и элементов [385–387]. При этом использование прямых методов является затруднительным или неэффективным из-за ограничений, налагаемых на число арифметических операций или время решения [388, 389].

Начавшееся с середины прошлого столетия бурное развитие численных методов продолжается и по настоящее время. Это воплотилось в большом количестве исследований, результаты которых, нашли свое отражение в работах отечественных и зарубежных ученых О. Аксельсона, М. Бензи, В.В. Воеводина, Х. Ван дер Ворста, Дж. Голуба, И.С. Даффа, Дж. Деммеля, Дж. Донгарры, В.П. Ильина, Л.Ю. Колотилиной, Г.И. Марчука, Ч. Ван Лоуна, Ю. Саада, А.А. Самарского, А.Н. Тихонова, М. Тума, Е.Е. Тыртышников, Д.К. Фаддеева, В.Н. Фаддеевой, В. Хакбуша, Н. Хигхама и многих других. Несмотря на имеющиеся в этой области теоретические достижения и рост вычислительных мощностей, проблема разработки и исследования новых методов решения СЛАУ не теряет своей актуальности [390].

Поскольку решение СЛАУ является стандартным этапом математического моделирования, то существуют разные виды его реализации. Прежде всего, в виде специализированных библиотек, часть из которых распространяется бесплатно. Программные модули решения СЛАУ входят в большие универсальные программные продукты, позволяющие осуществлять разнообразные математические и технические расчеты. Кроме того, оно входит в состав специализированных систем моделирования, рассмотренных выше. Так, современная вычислительная математика располагает значительным арсеналом методов решения СЛАУ [221, 391–399], а для их реализации используются как проприетарные разработки [400, 401], так и стандартные пакеты прикладных программ [402–414]. При этом постоянно растущие потребности в усложнении решаемых задач оказывают влияние на особенности развития не только математического, но и программного обеспечения [415].

1.6.1 Форматы хранения матриц

Плотной (полной) считается матрица размера $N \times M$, содержащая NM ненулевых элементов [394]. На практике, если в матрице очень мало нулевых элементов по сравнению с общим количеством элементов, то она тоже считается плотной. Для хранения плотных матриц используются стандартные двумерные массивы.

Термин «разреженная матрица» имеет достаточно много определений [219]. Наиболее употребительным сейчас является следующее. Разреженной матрицей является матрица, для которой существуют специальные приемы, позволяющие извлечь выгоды из большого числа её нулевых элементов и их расположения. Упомянутая выгода, как правило, заключается в уменьшении требуемой компьютерной памяти (для хранения матрицы по сравнению со стандартным хранением плотных матриц) и количества математических операций при оперировании с этой матрицей [416]. Исторически извлечение выгоды из наличия разреженности было направлено на решение СЛАУ. Так, в 50-х гг. прошлого века началось широкое использование разреженности при решении СЛАУ [417].

К настоящему времени разработано достаточно большое количество форматов (схем) хранения общих разреженных матриц [219, 220, 396], например из двух векторов [220], Кнута [418], Рейнболдта и Местеньи [419], Ларкума [420], Шермана [421], разреженные строчный (CSR или CRS) и столбцовый (CSC или CCS) [422, 423], разреженный неравномерный диагональный (JDS) [424], разреженный блочный строчный (SBCRS) [425], координатный [396], модифицированный разреженный строчный (MSR) [416] и др. [426–428]. Также для хранения ленточных матриц разработан сжатый диагональный (CDS) формат [429], а для симметричных – симметричный скайлайн (SSK) формат [430]. Они отличаются степенью сжатия матрицы и требуемыми затратами машинного времени при их использовании. Для каждого класса задач целесообразен выбор оптимального формата, обеспечивающего экономию машинной памяти. При этом стоит помнить, что увеличение коэффициента сжатия, как правило, ведет к увеличению затрат времени [219].

Пожалуй, самыми распространенными на данный момент, являются форматы CSR, CSC и координатный. Например в Matlab используется формат CSC, также известный как формат Harwell-Boeing [431]. Они предъявляют минимальные требования к памяти и эффективны для реализации базовых операций с разреженными матрицами при решении СЛАУ как прямыми, так и итерационными методами и т.д. [395, 416]. Так, в формате CSR используются 3 массива (**aelem** – ненулевые элементы, **jpctr** – индексы столбцов и **iptr** – указатели на ненулевые

элементы, с которых начинается очередная строка. Формат CSC релизует хранение элементов матрицы по столбцам. При этом также используется 3 массива. Координатный формат использует также 3 массива: для хранения значений матричных элементов (**AA**), а также их индексов строк (**JR**) и столбцов (**JC**). Достоинством координатного формата является то, что данные, хранящиеся с его помощью, могут быть легко преобразованы в другие форматы. Поэтому он часто используется как стандартный «входной формат» в пакетах прикладных программ [416].

1.6.2 Прямые методы

1.6.2.1 Однократное решение СЛАУ

Задача численного решения СЛАУ вида

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (1.37)$$

где **b** – вектор свободных членов (правая часть), **x** – вектор неизвестных (вектор-решение) и **A** – матрица ($N \times N$) коэффициентов данной системы, имеет продолжительную историю. Так, до н.э. в Китае были изданы «Девять книг о математическом искусстве», где метод, который теперь принято назвать методом исключения Гаусса, был представлен в «натуральной» форме [432]. Метод имеет долгую и интересную историю, а к его становлению приложило не мало усилий большое количество ученых и инженеров [433, 434].

При использовании МоМ матрица СЛАУ является плотной и, как правило, несимметричной, поэтому для решения СЛАУ зачастую используются прямые методы, такие как метод Гаусса или его модифицированная версия, основанная на LU-разложении [363, 397]. Вообще совершенствование прямых методов является одним из основных направлений в прикладных и академических исследованиях. При этом на первый план вышло использование блочного представления матрицы СЛАУ (поэлементные операции заменены блочными) и достижений в программном и аппаратном обеспечении [435]. Так, например, представлены результаты исследования уменьшения затрат времени и энергии на параллельную реализацию разложения Холецкого и LU-разложения на основе гибридного использования центрального и графического процессоров [436]. Представлены 3 варианта параллельной реализации LU-разложения с использованием инструкций OpenMP для вычислений на многоядерном процессоре [437]. Гибридного LU-QR-разложения [438]. Приведены результаты разработки, программной реализации и оптимизации матричных операций, входящих в блочную версию LU-разложения, и показано значительное (до 2-х раз) ускорение разложения матриц разного

порядка [439]. Показано ускорение на 60% от применения параллельных вычислений для матричных операций на графическом процессоре, а также ускорение на 80–90% разложений Холецкого, LU- и QR- [440]. Представлены результаты разработки и тестирования масштабируемых библиотек линейной алгебры для эффективного использования алгоритма LU-разложения на многопоточных архитектурах рабочих станций [441]. Рассмотрены разные алгоритмы прямого решения СЛАУ (LU-разложение, сжатое блочное разложение и их многоуровневые реализации), формируемой методом моментов [442].

Предложен гибридный метод LU-разложения, основанный на работе с блочными структурами, для решения СЛАУ, полученных методом моментов [443]. Он основан на новом подходе к преобразованию матрицы СЛАУ при вычислении элементов матриц L и U , совместно с оптимальным распределением нагрузки между центральным и графическим процессорами. Представлены результаты быстрого решения МоМ за счет комбинации с модифицированной адаптивной перекрестной аппроксимацией, используемой для заполнения и LU-разложения матриц, на примере анализа сложных структур [444]. Результаты сравнения представлены для различных проблем моделирования на процессорах Intel Xeon и графических картах NVIDIA. Для ускорения схемного анализа предложено использовать реализацию алгоритма разреженного LU-разложения на графическом процессоре, которая в отличие от традиционной, позволяет эффективно разделить на потоки все три цикла разложения и таким образом сократить время решения СЛАУ [445]. Показано, что использование LU-разложения, ориентированного вправо, по сравнению разложением, ориентированным влево и широко используемым при вычислениях на графических процессорах, позволяет добиться большего параллелизма. Так, показано, что при этом предложенной способ позволяет распараллелить все три вложенных цикла, в то время как, ориентированная влево версия – только два. Приведены результаты сравнения предложенного подхода с другими ускорителями решения СЛАУ, демонстрирующие его эффективность на тестовых задачах. Также отмечено, что предложенный новый разреженный LU-решатель на графических процессорах может быть использован не только для моделирования схем, но и для более общих научных вычислений.

На точность и время решения СЛАУ прямым методом сильное влияние оказывает обусловленность матрицы. Количественно обусловленность матрицы A оценивается числом обусловленности $\text{cond}A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. (Впервые этот термин предложен А. Тьюрингом [446].) Обусловленность характеризует чувствительность решения СЛАУ к изменению значений элементов матрицы. Чем выше число обусловленности матрицы, тем хуже она обусловлена. С

ростом числа обусловленности растёт погрешность решения из-за представления чисел с плавающей запятой конечным числом разрядов [447]. Одним из важных следствий этого является невозможность получения корректного решения СЛАУ методом Гаусса при чрезмерном росте $\text{cond} \mathbf{A}$ матриц больших порядков и малой разрядности представления чисел [448].

1.6.2.2 Многократное решение СЛАУ

Часто необходимы многовариантный анализ или оптимизация рассматриваемого объекта (явления) в диапазоне изменения его параметров (изменение частоты воздействующего сигнала, учет частотной зависимости или разброса параметров структуры), с целью получения набора параметров, используемых для дальнейшего моделирования. Зачастую такой анализ в САПР выполняется в интерактивном режиме, что соответствует изменению параметров математической модели [16]. В этом случае, временные затраты возрастают из-за необходимости (многократного) решения последовательности СЛАУ вида

$$\mathbf{A}_k \mathbf{X}_k = \mathbf{B}_k, k = 1, 2, \dots, m, \quad (1.38)$$

где $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 | \dots | \mathbf{b}_s]$, $s \ll N$.

При неизменной матрице и нескольких правых частях зачастую используется LU-разложение [449, 450]. Если изменения (вариации) в матрицах СЛАУ незначительны и структурированы (меняется только малое количество строк и столбцов), а правая часть постоянна, то применим метод на основе формулы Шермана-Моррисона-Вудбери [451–453] (метод окаймления [362]), а также схожие с ним [454, 455], основанные на корректировке обратной матрицы. (Вообще, метод Шермана-Моррисона-Вудбери использовался и используется для исправления элементов обратной матрицы из-за ошибок округления и неточности задания исходных данных [362, 456].) Для СЛАУ с ленточной матрицей также разработаны эффективные алгоритмы [457]. К сожалению, данные методы не применимы для решения (1.38) при неструктурированных различиях в матрицах СЛАУ.

В практических приложениях при использовании МоМ обусловленность матрицы СЛАУ ухудшается с приближением частоты воздействия к частотам собственных колебаний (внутренним резонансам) исследуемой структуры. Матрица таких структур на частотах собственных колебаний становится вырожденной, и её определитель равен или близок к нулю. Поскольку частота воздействия выбирается дискретно, то существует вероятность такого совпадения. Решение на этой частоте может быть вовсе не получено, а на близких частотах

может быть неточным или вовсе некорректным, например, показывать наличие мнимых, не существующих в реальности, резонансов. Для решения этой проблемы разработано несколько подходов различной степени кардинальности [458–463].

1.6.3 Итерационные методы

1.6.3.1 Однократное решение СЛАУ

Развитие вычислительной техники и вызванный этим процессом переход ко всё более сложным моделям привел к необходимости решения больших СЛАУ. Точные методы понятны и просты для программной реализации, однако их вычислительные затраты серьезно ограничивают круг рассматриваемых проблем. Поэтому итерационные методы получили широкое распространение при решении различных прикладных и научных задач.

Одной из главных особенностей итерационных методов является то, что получаемая погрешность решения из-за конечного числа разрядов много меньше, чем в методе Гаусса, т.к. она не накапливается, а определяется только последней итерацией и не зависит от их числа. Поэтому решение с заданной точностью при росте числа обусловленности матрицы достигается просто увеличением числа итераций. Очевидно, что снижение числа обусловленности матрицы позволяет уменьшить требуемое время решения с требуемой точностью за счёт уменьшения количества итераций. Также можно уменьшить количество разрядов представления чисел с плавающей запятой для снижения требуемых вычислительных затрат. Такая опциональность для выбора пользователя реализована, например, в ФЕКО [49]. Таким образом, применение итерационных методов является эффективным способом решения СЛАУ с плохо обусловленной матрицей. Кроме того, итерационные методы хороши и при хорошо обусловленной матрице. Действительно, МоМ даёт СЛАУ с плотной матрицей, для решения которой традиционно используются точные методы, например метод Гаусса [464]. Однако их вычислительные затраты $\sim N^3$ (N – порядок матрицы), что существенно ограничивает круг рассматриваемых задач даже при использовании высокоскоростных компьютеров. Практика же диктует необходимость решения сложных задач с всё более увеличивающимися порядками СЛАУ. Поскольку в основе каждой итерации лежит умножение матрицы на вектор, и если его вычислительные затраты $\sim N^2$, то затраты итерационных методов (без предобусловливания) $\sim N_{it} \cdot N^2$, если для сходимости потребуется N_{it} итераций. Если, по грубой эмпирической оценке [464], $N_{it} \approx N^{0,5}$, тогда выигрыш, по сравнению с методом Гаусса, также $\approx N^{0,5}$. Однако, ряд разработанных математических подходов к ускорению процедуры умножения матрицы на

вектор [465–468] может уменьшить его вычислительные затраты с $\sim N^2$ до $\sim \text{Mlog}_2 N$, позволяя получить значительный дополнительный выигрыш.

Итерационные методы имеют долгую и не менее интересную историю развития, как и прямые, и первые из них, так или иначе, также связаны с именем К.Ф. Гаусса [469–471]. Ставшие уже классическими методами (Гаусса-Зейделя, Якоби, Рундсона, релаксации и др.), основанные на расщеплении матрицы СЛАУ, редко применяются на практике из-за их медленной или неустойчивой сходимости и невозможности применения предобусловливания [395]. Исключение составляют их блочные или параллельные версии [472, 473]. В целом, эти методы являются отличным началом для освещения общих принципов построения итерационного процесса в учебных дисциплинах по численным методам и для формирования предобусловливателей [395, 474]. Об этих методах можно узнать, например из [365, 383, 475].

Наиболее эффективными и устойчивыми среди итерационных методов являются, так называемые, проекционные методы, и особенно тот их класс, который связан с проектированием на подпространства Крылова [476]. Эти методы обладают рядом достоинств: они устойчивы, допускают эффективное распараллеливание и работу с предобусловливателями разных типов [391–393]. В 1906 г. в своих первых «Лекциях о приближенных вычислениях» (неоднократно переиздававшихся) [477] Алексей Николаевич Крылов заложил принципы вычислительной математики и по праву считается её основателем [301].

Исторически итерационные методы разрабатывались для решения разреженных СЛАУ высокого порядка. Главный источник таких СЛАУ – сеточные методы (конечных разностей, конечных элементов) решения многомерных краевых задач [48, 221, 432, 387]. Далее на основании работ [221, 393, 394] кратко рассмотрим общие положения итерационных методов крыловского типа.

Рассмотрим систему (1.37) и сформируем для нее следующую задачу. Пусть заданы два подпространства $K \subset R^N$ и $L \subset R^N$. Требуется найти такой вектор $\mathbf{x} \in K$, который обеспечивал бы решение (1.37), «оптимальное относительно подпространства L », т.е. чтобы выполнялось условие Петрова-Галеркина

$$\forall \mathbf{l} \in L: (\mathbf{Ax}, \mathbf{l}) = (\mathbf{b}, \mathbf{l})$$

или

$$\forall \mathbf{l} \in L: (\mathbf{r}_x, \mathbf{l}) = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_x = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \perp L. \quad (1.39)$$

Такая задача называется задачей проектирования \mathbf{x} на подпространство K ортогонально к подпространству L . В более общей постановке задача выглядит следующим образом. Пусть

известно некоторое приближение \mathbf{x}_0 к точному решению \mathbf{x}_* системы (1.37) и требуется уточнить его поправку $\delta_{\mathbf{x}} \in K$ таким образом, чтобы $\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \delta_{\mathbf{x}}) \perp L$. Тогда (1.39) примет вид

$$\forall \mathbf{l} \in L: (\mathbf{r}_{\mathbf{x}_0 + \delta_{\mathbf{x}}}, \mathbf{l}) = ((\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) - \mathbf{A}\delta_{\mathbf{x}}, \mathbf{l}) = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\delta_{\mathbf{x}}, \mathbf{l}) = 0.$$

Введем в подпространствах K и L базисы $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^m$ и $\{\omega_j\}_{j=1}^m$, где $\dim K = \dim L = m$. Тогда последнее выражение справедливо когда

$$\forall j (1 \leq j \leq m): (\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\delta_{\mathbf{x}}, \omega_j) = 0. \quad (1.40)$$

Введя для базисов матричные обозначения $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_m]$ и $\mathbf{W} = [\omega_1 | \dots | \omega_m]$ можно записать $\delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} \subset R^m$ – вектор коэффициентов. Тогда (1.40) преобразуется к виду

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \mathbf{y} = (\mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{r}_0. \quad (1.41)$$

Тогда решение системы (1.37) должно уточняться в соответствии с формулой

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}(\mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{r}_0,$$

из которой вытекает важное требование для организации вычислений: произведение $\mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{V}$ должно быть или малой размерности или легко обращаться. Из (1.41) также вытекает соотношение

$$\mathbf{V}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_0 = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_* - \mathbf{x}_0 = \delta_{\mathbf{x}},$$

где \mathbf{x}_* точное решение СЛАУ (1.37). Таким образом, $\mathbf{V}\mathbf{y}$ – проекция разности между точным решением и начальным приближением на подпространство K [395].

В качестве подпространства K , часто выбирают подпространства Крылова – линейные пространства размерности m , порожденные вектором \mathbf{v} и матрицей \mathbf{A} (линейная оболочка) [478]

$$K_m(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}^2\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{v}\}.$$

При этом в качестве вектора \mathbf{v} выбирается невязка начального приближения \mathbf{r}_0 . Тогда конкретный выбор подпространства L и способа построения базисов подпространств (биортогонализация Ланцоша, A -биортогонализация, ортогонализация Арнольди [393]) полностью определяет вычислительную схему метода. Продемонстрируем это на примере.

Пусть пространства K и L связаны соотношением $L = \mathbf{A}K$, причем в качестве K используем подпространство Крылова $K_m(\mathbf{v}_1, \mathbf{A})$, где $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0 / \beta$, $\beta = \|\mathbf{r}_0\|_2$, а для построения ортонормированного базиса ортогонализацию Арнольди. Рассмотрим задачу минимизации функционала $\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}_{\mathbf{x}}\|_2^2$ (эквивалентную задаче проектирования (1.41)), так как любой вектор \mathbf{x} из пространства $(\mathbf{x}_0 + K_m)$ может быть записан в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_m\mathbf{y},$$

где \mathbf{y} – вектор размера m . Таким образом, задачу минимизации функционала можно переписать как

$$\mathbf{y}_m = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y}} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_m \mathbf{y})\|_2^2.$$

Вычислительная схема, построенная с использованием таких предпосылок, называется методом обобщенных минимальных невязок (GMRES). На практике чаще используется версия этого метода с рестартами или сокращенно GMRES(m) [221].

В отличие от ортогонализации Арнольди, биортогонализация Ланцоша использует для построения базиса экономичные трехчленные формулы. Так, выбрав в качестве пространства $K - K_m(\mathbf{r}_0, \mathbf{A})$, а в качестве $L - L_m(\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^T)$, где вектор \mathbf{r}_0 выбирается из условия $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0) \neq 0$, строят метод бисопряженных градиентов (BiCG). Достаточно часто для него характерна неустойчивость решения и осциллирующее поведение нормы невязки. Более того, итерационный процесс может полностью оборваться, без возможности его дальнейшего продления. К тому же, метод BiCG плохо поддается реализации на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью за счет использования операций с транспонированной матрицей. Эти проблемы привели к разработке целого класса методов, в которых операция с транспонированной матрицей не используется.

Алгебраически это достигается за счет изменения специальным образом полинома p_m , которому удовлетворяет последовательность невязок в методах, использующих подпространства Крылова. Из ряда методов, свободных от транспонирования, в настоящее время широко применяется стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab), использующий соотношение $\mathbf{r}_m = p_m(\mathbf{A})\mathbf{q}_m(\mathbf{A})\mathbf{r}^{(0)}$, где \mathbf{q}_m – специальным образом строящийся полином, такой, что произведение $p_m\mathbf{q}_m$ не содержит нечетных степеней. Еще один метод этого семейства – квадратичный метод сопряженных градиентов (CGS). Данный метод строится, используя соотношение $\mathbf{r}_m = p_m(\mathbf{A}^T)\mathbf{r}_0$.

Если матрица СЛАУ симметричная и положительно определенная, то метод BiCG имеет более простой вид. Метод, который получается за счет упрощений, вносимых симметричностью, называется методом сопряженных градиентов (CG). Следует заметить, что метод бисопряженных градиентов исторически появился как обобщение CG на несимметричный случай. Существуют и другие методы, не упомянутые в этом разделе. Одни из них появились самостоятельно, а другие – как модификации уже известных. Подробнее об этих методах крыловского типа можно узнать, например, из [393, 395, 479]. В таблице 1.5 приведен перечень итерационных методов крыловского типа (1950–2014 гг.) для решения СЛАУ с одной

правой частью. При решении электромагнитных задач широкое распространение нашли методы BiCGStab и GMRES(m) [239, 480–485]. Стоит отметить, что данный перечень далеко не полный, но еще раз подтверждает тот факт, что развитие итерационных методов актуально.

Таблица 1.5 – Итерационные методы крыловского типа

Год	Разработчик(и)	Метод
1950	Lanczos [486]	Lanczos
1951	Arnoldi [487]	Arnoldi
1952	Hestenes, Stiefel [488]	CG, CGNR
1952	Lanczos [489]	Lanczos (CG)
1955	Craig [490]	CGNE
1975	Paige, Saunders [491]	MINRES
1975	Paige, Saunders [491]	SYMMLQ
1975	Fletcher [492]	BiCG
1976	Concus, Golub [493]	CGW
1977	Vinsome [494]	ORTHOMIN
1977	Meijerink, Van der Vorst [495]	ICCG
1978	Widlund [496]	CGW
1980	Jea, Young [497]	ORTHODIR
1980	Wesseling, Sonneveld [498]	IDR
1981	Saad [499]	FOM
1982	Paige, Saunders [500]	LSQR
1983	Eisenstat et al. [501]	GCR
1986	Saad, Schultz [502]	GMRES
1989	Sonneveld [503]	CGS
1990	Van der Vorst, Melissen [504]	COCG
1991	Freund and Nachtigal [505]	QMR
1992	Van der Vorst [506]	BiCGStab
1993	Gutknecht [507]	BiCGStab2
1993	Sleijpen, Fokkema [508]	BiCGStab(l)
1994	Freund [509]	TFQMR
1994	Weiss [510]	GMERR
1994	Chan и др. [511]	QMR-BiCGStab
1994	Freund, Nachtigal [512]	SQMR
1995	Kasenally, Ebrahim [513]	GMBACK
1996	Fokkema и др. [514]	CGS2
1997	Pocock, Walker [515]	CBICG
1997	Zhang [516]	GPBi-CG
1999	de Sturler [517]	GCROT
1999	Sadok [518]	CMHR
2001	Szyld, Vogel [519]	FQMR
2007	Sogabe, Zhang [520]	COCR
2008	Sonneveld, van Gijzen [521]	IDR(s)
2008	Ильин [522], [523]	BiCR (A-BiCG, A-CGS, A-BiCGStab), SCR
2009	Jing и др. [524]	BiCOR, BiCORSTAB
2010	Abe, Sleijpen [525]	BiCR
2010	Tanio, Sugihara [526]	GBi-CGSTAB

Продолжение таблицы 1.5

2010	Hicken, Zingg [527]	GCROT(m, k)
2011	Carpentieri и др. [528]	BiCOR, CORS
2013	Zhao и др. [529]	GPBiCOR
2013	Zhao, Huang [530]	BiCORSTAB2
2013	Hajarian [531]	QMRCGSTAB
2014	Sun и др. [532]	QMRCORSTAB
2014	Zhang [533]	GCORS

1.6.3.1.1 Предобусловливание

Для ускорения итерационного решения разреженных СЛАУ часто используется предобусловливание, которое позволяет улучшить обусловленность результирующей матрицы и, тем самым, уменьшить число итераций, требуемых для получения решения. Так, с ростом $\text{cond}A$ обусловленность ухудшается, и для ряда проблем сходимость может оказаться очень медленной, и поэтому итерационный процесс может стагнировать или даже оборваться [221, 393, 534–536]. Термин «предобусловливание» («preconditioning»), по всей видимости, был впервые использован Форсайтом в 1955 г. при рецензировании работы Ланцоша. При этом сама идея предобусловливания появилась несколько раньше в работах нескольких авторов [471, 537]. (В работе Фаддеевых [362] данный подход назван «подготовка».) В современной трактовке предобусловливания этот термин впервые использован в работе [538]. Позже предобусловливание было применено и при решении СЛАУ с плотной матрицей [539]. При этом для решения таких систем, как правило, используют метод исключения Гаусса и его модификации.

Поясним суть этого подхода. Пусть M – некоторая невырожденная квадратная матрица порядка N . Тогда, домножив (1.37) на матрицу M^{-1} , получим эквивалентную систему

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b, \quad (1.42)$$

имеющую то же точное решение x_* . Хотя (1.37) и (1.42) алгебраически эквивалентны, спектральные характеристики результирующей матрицы $M^{-1}A$ отличаются от характеристик исходной матрицы A , что ведет к изменению скорости сходимости методов для (1.37) в конечной арифметике. Процесс перехода от (1.37) и (1.42) и называется предобусловливанием, а матрица M^{-1} – предобусловлителем (предобусловливающая матрица). При этом матрица M должны быть близка к матрице A (сформирована из нее) и легко вычислима и обратима [221]. Невязка (\underline{r}) системы (1.42) связана с невязкой (\mathbf{r}) исходной системы (1.37) соотношением $M\underline{r} = \mathbf{r}$, которое справедливо и для других матрично-векторных произведений, что позволяет вместо явного перехода от (1.37) к (1.42) вводить в схемы методов корректирующие шаги (матрично-

векторное умножение) [395].

Описанное выше предобусловливание принято называть левым, так как домножение на предобусловливатель выполняется слева. Другой подход основан на переходе к системе

$$\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (1.43)$$

решение которой \mathbf{y}^* связано с точным решением \mathbf{x}^* исходной СЛАУ (1.37) соотношением

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}^*, \quad (1.44)$$

Предобусловливание (1.43) реализуется путем двойных умножений вида $\mathbf{z} = \mathbf{A}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{q})$. Кроме того, при достижении требуемой точности осуществляется пересчет решения в соответствии с (1.44). Такая схема предобусловливания называется правой.

Последний возможный вариант – это двухстороннее предобусловливание, являющееся компромиссным относительно левого и правого [393]. В этом случае имеет место представление $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, и тогда решение вычисляется в виде $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{b}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{z}$.

Способы предобусловливания можно разбить на два вида: явные и неявные. Для представления системы (1.37) с явным предобусловливанием удобно воспользоваться записью (1.42). Как было указано выше, предобусловливание может быть введено в схему метода без необходимости явного вычисления матричного произведения. Так, явное предобусловливание требует нахождения матрицы \mathbf{M}^{-1} и умножения матрицы предобусловливания на вектор в каждой итерации. Для неявного необходимо решать СЛАУ с матрицей \mathbf{M} в каждой итерации. Наиболее простым является предобусловливание Якоби. Оно заключается в том, что диагональные элементы матриц \mathbf{M} и \mathbf{A} совпадают, а внедиагональные элементы полагаются равными нулю. Далее рассмотрим эти два вида предобусловливания. Большие и основательные обзоры формирования предобусловливателя можно найти в [221, 391, 393, 540–542].

Неявно предобусловленную систему (1.37) удобно представить в виде уравнения

$$\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{b}. \quad (1.45)$$

Наиболее работоспособные и часто используемые методы построения неявного преобусловливания основаны на LU-разложении. При этом если матрица, подвергающаяся разложению, является разреженной, то результирующие матрицы \mathbf{L} и \mathbf{U} являются более плотными [395]. Поэтому применяют неполную факторизацию (неполное разложение). Отдельно стоит отметить, что сама идея разработки таких методов принадлежит Булееву Н.И., который разрабатывал их с 50-х годов прошлого века. Впоследствии эти методы неоднократно переоткрывались зарубежными учеными [367]. Отдельно стоит отметить, что неявное

предобусловливание намного чаще используется при решении СЛАУ с плотной матрицей [134, 536, 543–546]. Ограничимся кратким рассмотрением этих методов [144, 221].

С учетом требования близости матриц, положим, что $\mathbf{M} = \mathbf{A}$ и представим её в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{LU} + \mathbf{R},$$

где \mathbf{L} и \mathbf{U} – нижне- и верхнетреугольные матрицы, соответственно, а матрица \mathbf{R} – матрица ошибки. Тогда приближенное представление $\mathbf{M} \approx \mathbf{LU}$ – это и есть неполное LU-разложение матрицы \mathbf{A} или коротко ILU. Самое простое ILU(0)-разложение заключается в применении LU-разложения к матрице \mathbf{A} , но если $a_{ij} = 0$, то сразу полагается m_{ij} (l_{ij} или u_{ij}) равным нулю. Если обозначить через $NZ(\mathbf{A})$ – структуру (портрет) разреженности матрицы \mathbf{A} , а $NZ(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$, то очевидно, что данный способ приводит к тому, что их структуры (портреты) совпадают. Чтобы подчеркнуть тот факт, что в данной постановке задачи в структуру не вводятся новые ненулевые элементы, такую факторизацию часто называют факторизацией с нулевым заполнением (zero fill-in) или просто ILU(0). Это позволяет оптимально использовать оперативную память, когда матрица \mathbf{A} хранится с помощью специальных форматов хранения, учитывающих только ненулевые элементы [219]. Тогда алгоритм (*ikj*-версия) этого разложения можно представить в виде псевдокода [221]:

```

1      Для  $i = 2, 3, \dots, N$ 
2          Для  $k = 1, 2, \dots, i - 1$ 
3              Если  $(i, k) \in NZ(\mathbf{A})$ 
4                   $m_{ik} = m_{ik} / m_{kk}$ 
5                  Для  $j = k+1, 2, \dots, N$  и
6                      Если  $(i, j) \in NZ(\mathbf{A})$ 
7                           $m_{ij} = m_{ij} - m_{ik} \cdot m_{kj}$ 
8                  Увеличить  $j$ 
9              Увеличить  $k$ 
10     Увеличить  $i$ 

```

Поскольку полное разложение приводит к заполнению структуры матрицы без каких либо ограничений (факторизация с бесконечным заполнением), а ILU(0)-разложение – к нулевому заполнению, очевидно, что еще одним вариантом может служить разложение с неким уровнем заполнения. Таким способом является ILU(p)-разложение [221]. Так, каждому ненулевому элементу матрицы первоначально присваивается нулевой уровень заполнения, в противном случае уровень принимается равным ∞ . В ходе вычислений ($m_{ij} = m_{ij} - m_{ik} \cdot m_{kj}$) после

вычисления элемента в позиции (i, j) , необходимо провести корректировку его уровня заполнения согласно правилу

$$lev_{ij} = \min\{lev_{ij}, lev_{ik} + lev_{kj} + 1\}.$$

Отметим, что элементы, имеющие до начала вычислений нулевой уровень, никогда его не меняют. Эти элементы определяют структуру разреженности, совпадающую с исходной. Элементы же, получившие во время вычислений уровень $\leq p$ (задаваемого значения), расширяют эту структуру. Таким образом, при $p = \infty$ данное разложение вырождается в полное, а если $p = 0$ – в ИЛУ(0).

Другой стратегией расширения структуры разреженности является использование постфильтрации, осуществляемой в два этапа и позволяющей контролировать уплотнение структуры (портрета) матрицы [547]. Данное разложение называется неполным LU-разложением с упороживанием (отбрасыванием) или ИЛУТ. Далее приведен псевдокод алгоритма этого разложения

```

1   Для  $i = 1, \dots, N$ 
2        $\mathbf{w} = \mathbf{a}_{i*}$ 
3       Для  $k = 1, \dots, i - 1$  и  $w_k \neq 0$ 
4            $w_k = w_k / u_{kk}$ 
5           Применить правило обнуления к  $w_k$ 
6           Для  $j = k + 1, \dots, N$ 
7                $\mathbf{w} = \mathbf{w} - w_k \mathbf{u}_{k*}$ 
8           Увеличить  $j$ 
9       Увеличить  $k$ 
10      Применить правило обнуления к строке  $\mathbf{w}$ 
11       $l_{ij} = w_j$ , для  $j = 1, \dots, i - 1$ 
12       $u_{ij} = w_j$ , для  $j = i, \dots, N$ 
13  Увеличить  $i$ 

```

Приведем правила обнуления, основанные на постфильтрации элементов [547].

1. В строке 5 приведенного алгоритма элемент w_k обнуляется, если его значение меньше, чем евклидова норма преобразуемой строки, умноженная на задаваемый допуск обнуления τ .

2. В строке 10 первоначально происходит обнуление элементов строки \mathbf{w} , аналогично правилу пункта 1. На втором этапе происходит сохранение по p элементов в \mathbf{L} и \mathbf{U} частях

преобразуемой строки в сочетании с диагональными элементами, которые никогда не обнуляются.

Таким образом, пункт 2 позволяет контролировать количество элементов в i -й строке. По существу, параметр p позволяет контролировать затраты машинной памяти, а параметр τ – вычислительные затраты. Существуют различные модификации пункта 2. Одной из них является сохранение $ni(i)+p$ элементов в \mathbf{U} части преобразуемой строки и $nl(i)+p$ элементов в \mathbf{L} части, где $ni(i)$ и $nl(i)$ – число ненулевых элементов в \mathbf{U} и \mathbf{L} частях i -й строки матрицы \mathbf{A} , соответственно [221].

Существуют и другие алгоритмы неполного LU-разложения [548, 549], например, разложение ILUC, основанное не на ikj -версии LU-разложения, а на, так называемой, Краутовской версии и постфильтрации, описанной в ILUT.

Данный вид предобусловливания основан на нахождении матрицы \mathbf{M}^{-1} . Подробное рассмотрение способов формирования явного предобусловливания можно найти, например, в [393, 551, 552]. Из данного вида по своей работоспособности выделяются способы, основанные на приближенном обращении (approximate inverse). Их удобно разделить на три группы.

Способы первой группы появились исторически первыми и основаны на нахождении матрицы \mathbf{M} , минимизирующей норму Фробениуса матрицы невязки $\mathbf{I} - \mathbf{AM}$ [553]. Существует две стратегии вычисления обратной матрицы: первая основана на вычислении обратной матрицы «глобально»; вторая основана на постолбцовом вычислении обратной матрицы. Среди способов группы выделяются: SPAI – разреженный приближенный обратный (sparse approximate inverse), использующий постолбцовую стратегию в сочетании с QR-разложением и итерационным уточнением [554]; SPMR – минимальных невязок с самопредобусловливанием (Self-preconditioned Minimal Residual) [553], использующий постолбцовую стратегию, реализуемую с помощью итерационного метода минимальных невязок с предобусловливанием.

Вторую группу образуют способы, формирующие матрицу предобусловливания с помощью факторизованных приближенных обратных матриц. Эти способы основаны на неполном обращении треугольных матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} , т.е. неполном нахождении обратной матрицы. Так, если существует разложение $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$, где ниже- и верхнетреугольные матрицы с единичными диагоналями, а \mathbf{D} – диагональная матрица, то матрица \mathbf{A}^{-1} может быть найдена с помощью разложения $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{ZD}^{-1}\mathbf{W}^T$, где $\mathbf{Z} = \mathbf{U}^{-1}$ и $\mathbf{W} = \mathbf{L}^{-T}$ – верхнетреугольные матрицы с единичной диагональю. Факторизованные приближенные обратные предобусловливатели могут быть получены вычислением с помощью разреживания матриц

$\underline{\mathbf{Z}} \approx \mathbf{Z}$, $\underline{\mathbf{W}} \approx \mathbf{W}$ и $\underline{\mathbf{D}} \approx \mathbf{D}$, тогда $\mathbf{M} = \underline{\mathbf{Z}} \underline{\mathbf{D}}^{-1} \underline{\mathbf{W}}^T \approx \mathbf{A}^{-1}$. Имеется несколько подходов для вычисления приближенного обращения. Эти методы не требуют нахождения треугольных матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} , т.е. предобусловливатель вычисляется непосредственно из матрицы \mathbf{A} . Среди этого класса выделяются методы FSAI [555], AINV [552, 556] и SAINV [557].

В третью группу входят методы, вычисляющие обратную матрицу, основываясь на двухшаговом процессе. Первоначально производится неполное LU-разложение (используя стандартные способы, описанные выше), а затем полученные при неполном разложении матрицы приближенно обращаются, например путем решения $2N$ треугольных систем. Существуют и другие варианты нахождения обратных матриц [552].

1.6.3.1.2 Предфилтрация

Как было показано выше, для улучшения сходимости итерационного процесса решения разреженных СЛАУ применяется предобусловливание, основанное на использовании структуры (портрета) разреженности матрицы \mathbf{A} . Таким образом, для формирования предобусловливателя при решении СЛАУ с плотной матрицей, сначала необходимо определить или задать некую структуру разреженности матрицы \mathbf{A} . Процесс, позволяющий сформировать разреженную матрицу \mathbf{A}_S из плотной матрицы \mathbf{A} называют предфилтрацией, в качестве альтернативы постфилтрации как, например, в методе ILUT. Далее из матрицы \mathbf{A}_S формируется предобусловливатель \mathbf{M} .

Одним из простейших способов (правил) является выбор заранее известной структуры, например, ленточной или блочно-диагональной, т.е. элементы матрицы \mathbf{A}_S совпадают с ленточной (блочно-диагональной) частью матрицы \mathbf{A} и равны нулю вне данной структуры. Такая предфилтрация характеризуется шириной ленты (размером блока) и, таким образом, основана на позиции элемента в матрице (структурная предфилтрация), а не на его значении. Результаты её использования при решении плотных СЛАУ можно найти, например, в [543, 558, 559].

В работе [560] приведено несколько способов, специально приспособленных для построения матрицы \mathbf{M}^{-1} . Одним из них является выбор k максимальных элементов в каждом столбце, так что в результате в матрице будет kN элементов не равных нулю. Данный способ связан с многократным поиском, поэтому он характеризуется значительными временными затратами на предфилтрацию.

Более часто используемым является динамическое определение структуры разреженности, например, с помощью некоторого порога (алгебраическая предфильтрация). Она заключается в задании (нахождении) определенного порога, с помощью которого происходит обнуление малозначащих элементов путем сравнения модуля каждого элемента с данным (полученным) значением.

Упомянутый порог обнуления, в свою очередь, может быть получен по-разному. Первый основан на малости значений матрицы относительно заданного порога (ε):

$$a_{ij}^s = a_{ij}, \text{ если } |a_{ij}| > \varepsilon, i, j = 1, 2, \dots, N \text{ или } i = j. \quad (1.46)$$

Он является простейшим, с точки зрения вычислений, и требует наименьшего времени на формирование разреженной матрицы \mathbf{A}^s , поскольку порог обнуления задается непосредственно, без необходимости его вычисления.

Второй способ обнуления предложен Л.Ю. Колотилиной в работе [539] и основан на нормировке всей матрицы с помощью максимального элемента

$$a_{ij}^s = a_{ij}, \text{ если } |a_{ij}/a^{\max}| > \varepsilon, i, j = 1, 2, \dots, N \text{ или } i = j. \quad (1.47)$$

где a^{\max} – максимальный элемент матрицы. Понятно, что при использовании данного способа достаточно много времени требуется на поиск наибольшего элемента в матрице.

Способ был предложен для применения явного предобусловливания при решении СЛАУ с плотной матрицей. Первоначально происходило обнуление малозначащих элементов исходной матрицы, т.е. первоначально плотную матрицу приводили к разреженному виду. Далее на основе полученной структуры разреженности матрицы формировался предобусловливатель. Таким образом, решение СЛАУ с плотной матрицей было сведено к решению разреженной системы итерационным методом с предобусловливанием. Впоследствии, уйдя от разреживания исходной матрицы, исследователи пришли к идее использовать данный подход для формирования предобусловливателя, т.е. использовать его (способ) при предфильтрации. Он является, пожалуй, самым распространенным [550, 551, 560–562]. При этом результаты его использования получены при двух значениях порога обнуления: 0,05 и 0,075.

В [563] предложено обнулять (игнорировать) элементы с помощью бесконечной нормы матрицы:

$$a_{ij}^s = a_{ij}, \text{ если } |a_{ij}| > \varepsilon = \|\mathbf{A}\|_{\infty} \cdot \tau / N, i, j = 1, 2, \dots, N \text{ или } i = j, \quad (1.48)$$

где $\| \mathbf{A} \|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}|$, а τ – допуск обнуления. Очевидно, что значительные временные затраты при использовании данного способа связаны с поиском наибольшей суммы строки.

Способ использовался следующим образом. Первоначально система с плотной матрицей преобразовывалась с помощью вейвлетов, после чего она остается достаточно плотной, но большая часть ее элементов имеет небольшие абсолютные значения [564]. Обнуление элементов, по описанному выше правилу, приводило к получению разреженной матрицы СЛАУ. Таким образом, авторы показали возможность приведения СЛАУ с плотной матрицей к разреженному виду, и тем самым возможность применения эффективных итерационных алгоритмов, ориентированных на разреженные системы.

В последующем было предложено использовать этот подход при решении задачи излучения [565, 566], где была показана его эффективность. Вычисления производились на примере излучения цилиндра при использовании МоМ. Было показано, что выбор $\tau = 0,1-0,2$ является оптимальным для минимизации времени решения СЛАУ. Поскольку такое упрощение, дающее ускорение, не всегда обосновано и приемлемо для некоторых классов задач, то исследователи стали использовать это правило обнуления, как способ определения структуры разреженности матрицы предобуславливания, т.е. стали использовать его как предфильтрацию [544, 546, 567, 568].

Способ выбора структуры разреженности из [569] основан на нахождении наибольшего элемента в строке

$$a_{ij}^s = a_{ij}, \text{ если } |a_{ij} / a_i^{\max}| > \varepsilon, i, j = 1, 2, \dots, N \text{ или } i = j. \quad (1.49)$$

где a_i^{\max} – максимальный элемент в i -й строке. Поскольку способ основан на нахождении максимального элемента в каждой строке, порог обнуления является разным для каждой из строк. После того, как максимальный элемент найден, происходит процесс, подобный описанному при использовании подхода (1.47), но вместо всей матрицы сканируется строка матрицы. Очевидно, что при его использовании значительные затраты времени связаны с поиском максимальных элементов строк. В упомянутой работе, в качестве исследуемой использовалась только одна конфигурация: специальная антенная решетка. Решение задачи излучения было сведено к СЛАУ МоМ. Все вычисления проводились при фиксированном значении $\varepsilon = 0,01$. В работе не приведены рекомендации по заданию порога обнуления при изменении рассматриваемой конфигурации. Автору не известны другие работы, в которых использовался бы данный способ предфильтрации.

Еще один способ для решения задач магнитостатики предложен в [570]:

$$a_{ij}^s = a_{ij}, \text{ если } a_{ij} > \varepsilon = \tau \cdot \min(|a_{ij}|, |a_{jj}|), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \text{ или } i = j. \quad (1.50)$$

К сожалению, рекомендаций по выбору допуска обнуления в работе не приведено. Результаты вычислений приведены только при фиксированном значении τ , при котором плотность матрицы A_s составляет 5%.

Как видно из приведенных способов, с течением времени исследователи пытались найти предфильтрацию, адаптивную к различным задачам, возникающим перед ними. Существуют и другие способы предфильтрации. Одни позволяют представить исходную матрицу суммой нескольких разреженных матриц, за счет использования специальных подходов, и в дальнейшем использовать структуру одной из них в качестве структуры матрицы предобуславливания [543, 558, 571]. Другие строятся, используя знание о геометрических или топологических особенностях исследуемой задачи [550, 561].

Отметим, что алгебраическая предфильтрация может сочетаться как со структурной, так и с другими способами динамической. Также понятно, что приведенные способы алгебраической предфильтрации могут быть использованы и при постфильтрации. Таким образом, данный вид предфильтрации является, пожалуй, самым универсальным. Однако априорно трудно сказать, какой способ предпочтительнее как с точки зрения минимизации времени решения СЛАУ, так и стабильности допуска/порога обнуления.

1.6.3.2 Многократное решение СЛАУ

Помимо упомянутых ранее достоинств подпространств Крылова отдельно стоит отметить, что они позволяют строить эффективные итерационные методы для решения СЛАУ с несколькими правыми частями и неизменной матрице

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

где \mathbf{X} и \mathbf{B} матрицы размера $N \times m$, $m \ll N$. Это уравнение является частным случаем (1.38). Очевидно, что для решения таких СЛАУ самым простым способом (с точки зрения реализации) будет последовательное решение СЛАУ с каждой правой частью по отдельности. Однако данный подход характеризуется наибольшими вычислительными затратами [572]. Поэтому для решения таких систем были разработаны разные блочные версии итерационных методов. Так, известны методы, использующие подпространства вида $K_m(\mathbf{R}_0, \mathbf{A})$, где \mathbf{R}_0 – «обобщенная» невязка начального приближения. Укажем только на некоторые из них: BI-CG и BI-BiCG [573], BI-GMRES [574], BI-QMR [575], BI-BiCGStab [576], BI-LSQR [577], BI-IDR(s) [578], BI-GCROT(m, k) [579], BI-CMHR [580]. При этом именно эти методы считаются наиболее подходящими для

решения СЛАУ с плотной матрицей [576]. Также их особенностью является то, что все правые части должны быть одновременно доступны до начала вычислений [577]. Другой подход основан на выборе «опорной» (seed) СЛАУ, построении подпространств Крылова для нее и последующем решении остальных систем путем проектирования их невязок на это подпространство. Впервые этот подход был предложен в [581]. На его основе разработаны Seed-GMRES [582], Seed-EGCR [583], Seed-QMR [584], Seed-MINRES [585], Seed-MEGCR [586], Seed-BiCGStab [587] и др. (здесь для единообразного представления использованы отличающиеся от оригинальных аббревиатуры названий методов). Этот подход считается эффективным, если правые части близки между собой [588]. Рекомендации по выбору «опорной» системы можно найти в [582]. Еще один подход (глобальный) основан на формировании и решении тензоризованных систем [589], например GI-GMRES и GI-FOM [590], GI-BiCG и GI-BiCGStab [591], GI-CMRH [592], GI-SCD [593], GI-CGS [594], GI-BiCR [595]. Последний подход, разработанный недавно, основан на перестановке внутренних циклов (loop-interchanging) [596], что, по сути, является альтернативой последовательному разделённому вычислению с каждой правой частью и позволяет несколько снизить вычислительную сложность одной итерации. Представителем этих методов является Li-BiCG [596].

Особым случаем решения последовательности (1.38) является случай, когда изменяется матрица, а правая часть или постоянна или изменяется несущественно. Подобное многократное решение СЛАУ возникает во многих научных и инженерных приложениях: при восстановлении изображений [376], рекурсивном вычислении наименьших квадратов [597], оптимизации [598], решении нелинейных уравнений [599], в прикладной статистике [379] и др.

Еще раз отметим, что блочные методы применимы, только если все правые части доступны до вычислений. Однако на практике это не всегда выполнимо. Так, часто «новые» матрица и правая часть формируются с использованием предыдущего решения СЛАУ [600]. Для решения последовательности (1.38) с разреженными матрицами (для не электромагнитных задач) разработано несколько подходов, в основном, связанных с построением эффективного предобусловливателя [399]. При этом подавляющее число работ рассматривает задачу решения последовательности «сдвинутых» (shifted) СЛАУ, т.е. когда от матрицы к матрице изменяются только диагональные элементы [601, 602]

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \text{diag}(\delta_1^k, \dots, \delta_N^k), \delta_i^k \geq 0, i = 1, \dots, N, k = 1, 2, \dots, m.$$

Первый основан на перевычислении предобусловливателя для каждой отдельно взятой СЛАУ. Результаты его использования можно найти, например в [603]. Вторым подходом

использует «замороженный» (frozen) предобусловливатель, вычисленный из матрицы первой СЛАУ последовательности (1.38) с одной правой частью, и использующийся для решения остальных систем [604–607]. В работе [607], на примере задач газодинамики, рассмотрено использование такого предобусловливателя в сочетании с фиксированным числом (шагов по времени, p) решаемых СЛАУ, после решения которых, происходит переформирование предобусловливателя. Определение оптимального значения p , с точки зрения минимизации временных затрат на моделирование, выполнено эмпирически и получено, что оно находится в диапазоне от 5 до 10. При этом число шагов по времени не выбиралось априорно, а определялось динамически во время моделирования до достижения стационарности решения. Очевидно, что при $p = 1$ данный подход эквивалентен первому подходу.

Основная мысль следующего подхода достаточно проста. Поскольку повторное использование одного и того же предобусловливателя каждый раз часто приводит к медленной сходимости итерационного решения, тогда как повторное вычисление предобусловливателя для каждой новой системы является вычислительно затратным. Поэтому, очевидно, что для этих двух крайних случаев существуют промежуточные альтернативы. Так, необходимо найти возможность обновления предобусловливателя с меньшими затратами чем на его повторное вычисление. Тогда можно ожидать, что полученный предобусловливатель хоть и будет менее эффективным, чем заново вычисленный, с точки зрения числа итераций, но общая сложность может быть значительно снижена. Так, в работе [608] для решения последовательности (1.38) с симметричными и положительно-определенными матрицами впервые использовалось обновление неполного разложения Холецкого. В работе [609] сформулирован общий подход к вычислению «идеального» предобусловливателя для решения последовательности СЛАУ вида (1.38), не ограничивающийся «сдвинутыми» системами. Для ясности изложения рассмотрим последовательность СЛАУ, где через $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ обозначим первую из них, а с помощью $\mathbf{A}^+\mathbf{x}^+ = \mathbf{b}^+$ одну из последующих. В качестве предобусловливателя используем $\mathbf{M} = \mathbf{LDU}$. Очевидно, что матрица разницы (вариации) будет $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^+$. В работе предложено вычисление приближения для «идеального» предобусловливателя вида $\mathbf{M}^+ = \mathbf{M} - \underline{\mathbf{A}}$, которое является очень затратным. Поэтому для практических вычислений, вместо $\mathbf{M} - \underline{\mathbf{A}}$ рассмотрены приближения, основанные на малости $\|\mathbf{L} - \mathbf{I}\|$ и $\|\mathbf{U} - \mathbf{I}\|$, что справедливо, если матрица \mathbf{A} обладает строгим диагональным преобладанием. Такие последовательности СЛАУ часто встречаются при решении нелинейных уравнений. Тогда, если $\mathbf{M} - \underline{\mathbf{A}}$ неособенная, то она может быть представлена в виде

$$\mathbf{M} - \underline{\mathbf{A}} = \mathbf{L}(\mathbf{DU} - \mathbf{L}^{-1}\underline{\mathbf{A}}) \approx \mathbf{L}(\mathbf{DU} - \underline{\mathbf{A}}) \approx \mathbf{L}(\mathbf{DU} - \text{triu}(\underline{\mathbf{A}}))$$

или

$$\mathbf{M} - \underline{\mathbf{A}} = (\mathbf{LD} - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{U}^{-1})\mathbf{U} \approx (\mathbf{LD} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{U} \approx (\mathbf{LD} - \text{tril}(\underline{\mathbf{A}}))\mathbf{U}.$$

Выбор первого или второго варианта обновления может быть осуществлен с помощью простой оценки малости $\|\mathbf{L} - \mathbf{I}\|$ и $\|\mathbf{U} - \mathbf{I}\|$. Так, если значение $\|\mathbf{L} - \mathbf{I}\|$ меньше чем $\|\mathbf{U} - \mathbf{I}\|$, то более точным является первый вариант, а в противном случае – второй. Такие обновления называются структурированными (structured update). Указанные требования справедливы при решении нелинейных уравнений методами ньютоновского и бройденковского типа. Упрощенным вариантом таких обновлений является

$$\mathbf{M} - \underline{\mathbf{A}} \approx \text{diag}(\mathbf{DU} - \underline{\mathbf{A}}).$$

При этом подход в целом является обобщением для обновления, предложенным в [608], для симметричных матриц. В работе также рассмотрен более общий случай за счет использования трансформаций Гаусса-Жордана. Он разработан специально для случая, когда вариации существенны по всей матрице $\underline{\mathbf{A}}$, а не только по её треугольным частям. В работах [610–616] выполнены обобщения и некоторые совершенствования данного подхода на другие типы матриц и предобусловливателей. При этом при его использовании обновления происходят или периодически или перед началом решения текущей системы.

Еще один подход сочетает в себе идеи предыдущих. Для этого задается диапазон СЛАУ, в течение которого используется вычисленный для первой СЛАУ из диапазона «замороженный» предобусловливатель. При этом количество требуемых для её решения итераций фиксируется ($iter_0$). Далее, если для решения последующей СЛАУ требуемое количество итераций превышает значение $iter_0 + j$, где j – заданный порог, то происходит обновление предобусловливателя [617].

Последний подход основан на адаптивном использовании информации об уже построенных подпространствах Крылова (recycling) для обновления предобусловливателя при решении предыдущих систем [600–619]. Отдельно отметим, что схожая идея использована при разработке итерационных методов, ориентированных на решение «сдвинутых» систем [620–622].

1.7 Цель и задачи работы

Проведенный обзор исследований по моделированию РЭС и уменьшению вычислительных затрат на него показал, что для решения задач электромагнитного поля существуют различные подходы, которые сводятся к аналитическому или численному решению

соответствующих интегральных или дифференциальных уравнений в частотной или временной области. Так показано, что для решения проектирования РЭС целесообразно использовать МоМ и основанное на нём ПО.

При использовании метода моментов требующее решения уравнение сводится к СЛАУ с плотной матрицей путем замены непрерывных функций их дискретными аналогами (построение сетки). Поэтому основные затраты времени и машинной памяти на моделирование приходятся на формирование и решение СЛАУ, что особенно критично при необходимости многовариантного анализа или оптимизации в рамках параметрического синтеза конечного изделия.

На основании выполненного обзора и практики установлено, что современное ПО для проектирования РЭС даже высококвалифицированному пользователю не позволяет изменение некоторых параметров численного метода. В результате эффективность его работы низка. Еще одним недостатком такого ПО является недостаток информации о методе решения, поскольку производители часто скрывают её понятием «рекомендованные настройки». Поэтому пользователь часто лишен возможности ускорить процесс проектирования, что особенно критично при синтезе (многовариантном анализе или оптимизации) оптимального изделия или его элементов.

Таким образом, актуальна разработка новых методов для проектирования и оптимизации РЭС с уменьшенными вычислительными затратами. При этом наиболее перспективным видится поиск путей алгоритмического решения данной проблемы.

Цель работы – разработать методы уменьшения вычислительных затрат на проектирование линейных антенн и полосковых структур с учётом ЭМС.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести обзор существующих методов и подходов в области проектирования РЭС и уменьшения вычислительных затрат на проектирование.
2. Разработать методы уменьшения вычислительных затрат на одновариантный анализ.
3. Разработать методы ускорения многовариантного анализа.
4. Реализовать разработанные методы в программах для анализа РЭС.
5. Выполнить апробацию разработанных методов на конкретных задачах анализа и оптимизации.

2 ПРЕДЛОЖЕННЫЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ НА ОДНОВАРИАНТНЫЙ АНАЛИЗ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

2.1 Совершенствование алгебраической предфильтрации

Поскольку предобусловливание является способом уменьшения количества итераций за счет улучшения сходимости при итерационном решении СЛАУ, то выбор структуры (портрета) разреженности предобусловливателя является важной практической задачей.

Далее описан новый способ предфильтрации [623]. Он основан на идее постфильтрации, предложенной в [547], при формировании матрицы предобусловливания с помощью ЛУТ-разложения, и кратко описанной в подпункте 1.6.3. Она разрабатывалась для ускорения решения разреженных систем и показала свою работоспособность, в том числе, из-за используемой в нем постфильтрации. Предлагаемый способ предфильтрации состоит в следующем.

Разреженная матрица A_S формируется из матрицы A путем игнорирования некоторых элементов (кроме диагональных) согласно следующему правилу. Перед предфильтрацией i -й строки (a_{i*}) вычисляется ее евклидова норма, умножением которой на задаваемый допуск обнуления τ получают i -й порог обнуления ε_i . После того, как все элементы строки будут проверены на малость, необходимо повторить те же действия со следующей $(i + 1)$ -й строкой. Процесс закончится после того, как все строки матрицы A будут обработаны подобным образом, т.е.

$$a_{ij}^s = a_{ij}, \text{ если } |a_{ij}| > \varepsilon_i = \|a_{i*}\|_2 \cdot \tau, i, j = 1, 2, \dots, N, \text{ или } i = j, \quad (2.1)$$

где $\|a_{i*}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2}$ – евклидова норма i -й строки. Таким образом, порог обнуления является своим для каждой из строк, т.е. данный способ относится к группе способов локальной предфильтрации.

Данный способ удобен в случае его использования в сочетании с полным или неполным LU-разложением. Поскольку вычисления при использовании данного способа происходят по строкам, то его сочетание с ijk -версией разложения представляется наиболее оптимальным. Так, после вычисления порога для текущей строки происходит её преобразование в строку матриц L и U , без необходимости перемещения по столбцам.

Недостатком данного подхода является относительная сложность определения порога обнуления, которая связана с необходимостью определения N норм строк матрицы. Поэтому, с целью сокращения числа требуемых арифметических операций, предложен способ (см. следующий подраздел), основанный на нахождении нормы, но не каждой строки, а всей матрицы. Отметим, что допуск обнуления, приводящий к одной структуре разреженности у этих двух способов, будет существенно отличаться.

Другой способ предфильтрации был предложен в работах [624, 625]. Он относится к группе глобальных способов предфильтрации, т.е. полученный порог обнуления является общим для всех элементов матрицы. Способ заключается в следующем.

Разреженная матрица \mathbf{A}_s получается из матрицы \mathbf{A} путем игнорирования некоторых элементов этой матрицы (кроме диагональных) согласно следующему правилу

$$a_{ij}^s = a_{ij}, \text{ если } |a_{ij}| > \varepsilon = \|\mathbf{A}\|_F \cdot \tau, i, j = 1, 2, \dots, N, \text{ или } i = j, \quad (2.2)$$

где $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2}$ – норма Фробениуса [365] матрицы \mathbf{A} , а τ – задаваемый допуск обнуления. Таким образом, структура разреженности сформированной матрицы \mathbf{A}_s может быть использована для вычисления предобусловливателя \mathbf{M} одним из способов, описанных в подпункте 1.6.3. Очевидно, что временные затраты на реализацию данного способа предфильтрации меньше затрат на предфильтрацию (2.1), поскольку здесь необходимо всего один раз осуществить операцию извлечения квадратного корня.

Из теоретических основ МоМ известно, что максимальные элементы матрицы СЛАУ группируются у главной диагонали, т.е. матрица, становится близкой к матрице с преобладающей главной диагональю [447]. Используя это, можно ускорить процесс предфильтрации уже известных способов, приведенных в подпункте 1.6.3.

Очевидно, что предфильтрация (1.46) никак не может быть ускорена, чего не скажешь, например, о способе (1.47). Время предфильтрации при использовании этого подхода можно сократить за счет поиска только на главной диагонали, а не по всей матрице. Также основываясь на знании, что максимальные элементы группируются на главной диагонали, можно видоизменить способ (1.48) с целью получения ускорения:

$$a_{ij}^s = a_{ij}, \text{ если } |a_{ij}| > \varepsilon = \sum_{i=1}^N |a_{ii}| \cdot \tau / N, i, j = 1, 2, \dots, N \text{ или } i = j. \quad (2.3)$$

Аналогично способ (1.49) преобразуется к виду

$$a_{ij}^s = a_{ij}, \text{ если } |a_{ij} / a_{ii}| > \varepsilon, i, j = 1, 2, \dots, N \text{ или } i = j. \quad (2.4)$$

2.2 Уменьшение вычислительных затрат за счёт оптимального выбора сетки

Из приведенного обзора исследований в разделе 1 следует, что моделирование элементов РЭС отличается особой сложностью и требует больших вычислительных затрат. Поэтому, необходимо выявлять ресурсы уменьшения затрат на вычисления. Один из них – выбор метода построения сетки. Такие методы можно условно разделить на методы построения равномерной сетки и неравномерной сеток. Использование излишне густой сетки приводит к существенному увеличению затрат времени на вычисления. Так, учащение сетки в 2 раза ведет примерно к 8-кратному увеличению времени решения СЛАУ методом Гаусса. Поэтому необходим оптимальный выбор сетки для получения требуемого решения с приемлемой точностью.

Итерационное учащение сетки позволяет минимизировать вычислительные затраты и контролировать точность вычисления. Использование грубой сетки требует минимальных затрат и является хорошим начальным приближением. Далее итерационно происходит учащение сетки и анализ полученных результатов. Если эти результаты от итерации к итерации изменяются несущественно (это контролируется параметром *tol*), то итерационный процесс останавливается. Это позволяет в режиме реального времени контролировать ход моделирования. Подобный подход нашел широкое применение при явном решении дифференциальных уравнений методом конечных разностей [261, 277].

Аналогичный подход использован в работе [348], где предложен алгоритм адаптивного итерационного выбора оптимальной сегментации (АИВОС) границ проводников и диэлектриков двумерных структур в задачах электростатики. На примере вычисления параметров МПЛП методом моментов, показано, что АИВОС минимизирует вычислительные затраты на моделирование. Так, существенно сокращены затраты времени при незначительной потере точности. Сравнение выполнено с «ручной» равномерной сегментацией с длиной подынтервала равной трети от толщины проводника (3 подынтервала на торце проводника). Такая длина подынтервалов считается минимальной для получения приемлемой точности решения при минимизации затрат времени на его получение [225]. (В данной работе такая сегментация часто используется для демонстрации эффективности предлагаемых подходов.) Дальнейшее уменьшение длины подынтервалов ведет к существенному росту вычислительных затрат на получение требуемых значений, при этом их уточнение оказывается малозначительным. Для доказательства последнего утверждения рассмотрим симметричную полосковую линию с диэлектрическим заполнением (тонкая металлическая полоса конечной ширины, расположенная в диэлектрике между двумя параллельными металлическими

пластинами на одинаковом расстоянии от них) и связанную МПЛ (2 проводника конечной ширины с одной стороны диэлектрической подложки и слой металла бесконечной ширины с другой её стороны) [626].

Волновое сопротивление симметричной полосковой линии (рисунок 2.1) можно получить по аналитическим формулам [18, 626]. Однако они применимы при нескольких допущениях, одним из которых является бесконечное удаление торцов структуры от проводника ($d \rightarrow \infty$). При решении задачи с помощью численных методов, в частности МоМ, приходится искать компромисс и делать это расстояние конечным. В таблице 2.1 приведено значение волнового сопротивления линии (выражаемого через значения погонных ёмкости и индуктивности линии, см. пункт 1.3.1.3) в зависимости от количества подынтервалов на торце проводника, задаваемого с помощью отношения t/n , при изменении расстояния от края проводника до края структуры, с помощью параметра k [627]. Вычисления выполнены в системе TALGAT. Также приведено значение волнового сопротивления, полученное с помощью формул из [18]. Параметры структуры: $w = 1$ мм, $\epsilon_r = 5$, $b = 50$ мкм, $t = 5$ мкм. Из таблицы 2.1 видно, что при увеличении k , волновое сопротивление сходится к значению, полученному по аналитическим формулам. При этом учащение сегментации ($n > 3$) несущественно влияет на точность решения (среднее различие менее 0,1 %).

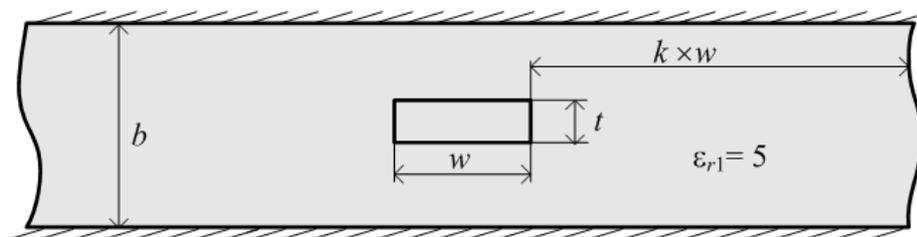


Рисунок 2.1 – Поперечное сечение симметричной полосковой линии

Таблица 2.1 – Значение волнового сопротивления симметричной полосковой линии (Ом) при учащении равномерной сегментации и увеличении расстояния до края структуры

n	k			Аналитика
	5	10	15	
3	16,712	15,972	15,689	15,696
5	16,703	15,962	15,700	
10	16,697	15,957	15,674	

Далее рассмотрим анализ разницы погонных задержек сигнала ($\Delta\tau$) в связанной МПЛ. При вычислениях были приняты следующие параметры линии: $w = 1000$ мкм, $t = 18$ мкм, $s = 100$ мкм, $h = 500$ мкм, расстояние от края структуры до края проводника $d = 3w$, $\epsilon_r = 4,5$. На

рисунке 2.2а приведены значения $\Delta\tau$ и нормированные значения собственных и взаимных коэффициентов электростатической и электромагнитной индукций левого проводника при учащении сегментации (увеличении значения параметра n). Значения взаимных коэффициентов приведены по модулю. При вычислении сигнала на выходе линии (рисунок 2.2б) значения резисторов на концах линии приняты равными 50 Ом, а длина линии $l = 60$ см. Воздействие – импульс с ЭДС 5 В, с фронтом, плоской вершиной и спадом импульса по 50 пс.

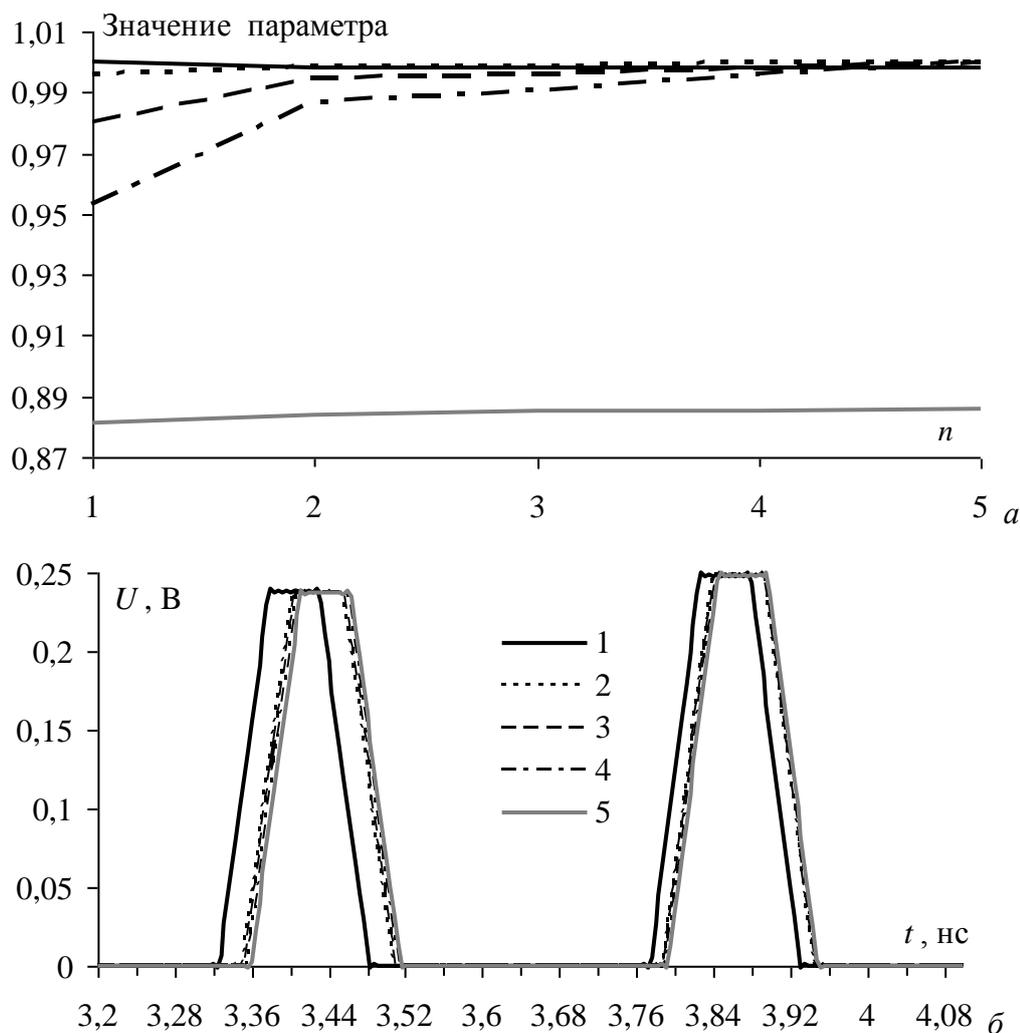


Рисунок 2.2 – Зависимости значений погонных параметров ($\Delta\tau$ (—) в нс/м, нормированные \underline{C}_{11} (· · ·), \underline{C}_{12} (— · —), L_{11} (—), L_{12} (- -)) (а) и сигнала на выходе (б) связанной МПЛ от количества подынтервалов на торце проводника ($n = 1, 2, \dots, 5$) при сегментации

Из рисунка 2.2 видно, что уменьшение длины подынтервала при сегментации больше чем $t/3$ приводит к малым изменениям в значениях погонных параметров (менее 0,2%) и еще меньшим в форме сигнала на выходе линии. При сегментации ниже чем $t/3$ изменения более существенны. Анализ данных показал, что различие в значениях элементов матриц \underline{C} и \underline{L} до 1,5% не оказывает критичного влияния на вторичные параметры структуры. Таким образом,

учащение сегментации выше чем $t/3$, как и говорилось ранее, несущественно влияет на точность результатов, и прежде всего, вторичных параметров структуры (волновое сопротивление, погонная задержка и др.).

Как было показано в разделе 1 и на рассмотренных примерах, получение интересующих параметров линии передачи (без потерь) основано на вычислении матриц \underline{C} и \underline{L} . При этом показано, какие вариации в значениях элементов этих матриц приводят к существенному изменению в значениях параметров линии. В данных примерах для вычислений использована система TALGAT, в которой реализованы модели из работы [211], а для решения СЛАУ используется LU-разложение с последующим решением двух треугольных систем с каждой правой частью. В работах [225, 628] и цитируемых в них источниках приведены результаты, полученные в системе TALGAT, и выполнено их сравнение с результатами измерений и вычислений с помощью других численных методов. Показано, что результаты хорошо согласуются между собой. Поэтому в данной работе для демонстрации эффективности разработанных алгоритмов как по скорости работы, так и по точности вычисления часто используется сравнение с результатами, полученными с системе TALGAT (без использования средств разработанных автором данной работы).

Вернемся к рассмотрению алгоритма АИВОС. Для ясности изложения, далее приведен псевдокод этого алгоритма из работы [348] (в авторской редакции):

- 1 Установить исходные параметры моделирования (tol , параметры структуры)
- 2 Установить длину подынтервала (l), равной ширине проводника w
- 3 Выполнить предварительное вычисление значения контролируемой величины K_0
- 4 Для $i = 1, \dots, N_{ii}^{\max}$
- 5 Уменьшить длину подынтервала в два раза
- 6 Вычислить значение контролируемой величины K_i
- 7 Пока $(K_i - K_{i-1}) / K_{i-1} > tol$
- 8 **Продолжить текущий цикл**
- 9 Увеличить i

Из псевдокода алгоритма видно, что сегментация учащается равномерно, до тех пор, пока сходимость контролируемой величины (K) не будет достигнута. При вычислении ёмкостной матрицы этой величиной является один из коэффициентов электростатической индукции (\underline{C}_{kk} , где k – порядковый номер проводника в структуре). Параметр N_{ii}^{\max} используется для

предотвращения заикливания вычислений. В качестве начальной длины подынтервала (l) используется ширина одного из проводников (w), что является не оптимальным при анализе МПЛП с широкими и тонкими проводниками, из-за особенностей распределения зарядов по поверхности проводников МПЛП [87, 91]. Для подтверждения этого предположения было проведено большое количество вычислений с использованием АИВОС на примере вычисления погонных параметров МПЛП. Для этого в системе TALGAT были построены геометрические модели поперечных сечений 6 стеков МПЛП (печатных плат) с количеством 2, 4, ..., 10 сигнальных проводников в каждом (итого 30 моделей). В таблице 2.2 приведены геометрические размеры элементов стеков (h_1 – толщина подложки; h_2 – толщина препрега; t – толщина фольги; w – ширина проводников; s – расстояние между проводниками). Для наглядности на рисунке 2.3 приведены модели стеков 6-проводных МПЛП.

Таблица 2.2 – Размеры элементов геометрических моделей стеков МПЛП

№ стека	s , мкм	w , мкм	t , мкм	h_1 , мкм	h_2 , мкм
1	500	500	5	50	500
2	500	500	5	50	500
3	500	500	5	50	500
4	500	500	5	50	500
5	500	500	5	50	–
6	500	500	5	50	500

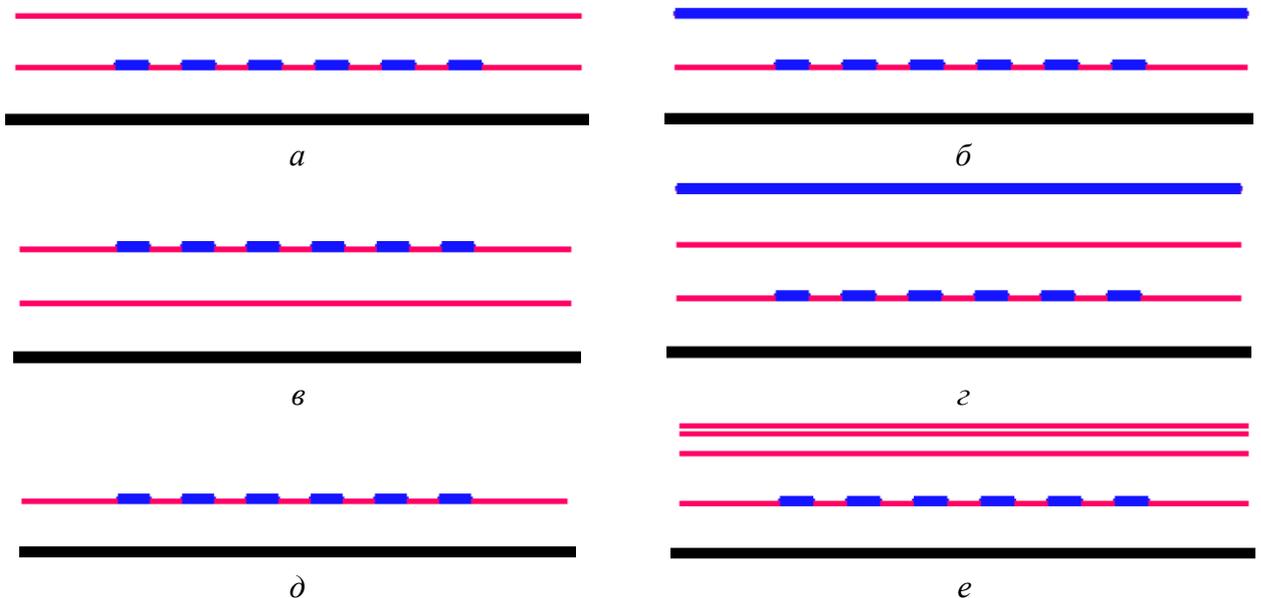


Рисунок 2.3 – Геометрические модели стеков 6-проводных МПЛП: 1 – 6 ($a - e$)

При вычислениях использовалась РС с параметрами: процессор – Intel Core i7-970, тактовая частота – 3,20 ГГц; объем ОЗУ – 24 Гбайт; количество ядер – 6; количество виртуальных процессоров – 12; операционная система – Windows 7×64. Вычисления

выполнены при точности $tol = 0,01$. В качестве контролируемой величины использовано значение собственного коэффициента электростатической индукции первого сигнального проводника (\underline{C}_{it}).

В целом, для всех моделей поперечных сечений получено идентичное поведение алгоритма АИВОС. Для примера в таблице 2.3 представлены результаты вычисления ёмкостной матрицы стека 4 при разном количестве сигнальных проводников в нём (использованные обозначения: T_{it} – общее время вычисления; N – общее число подынтервалов (порядок матрицы СЛАУ); N_{it} – количество итераций, требующихся для сходимости решения (без учёта итерации с начальной сегментацией, дающей предварительное значение контролируемой величины). Для сравнения также приведены результаты (\underline{C} и T) при использовании равномерной сегментации с длиной подынтервала равной трети от толщины проводника (3 подынтервала на торце проводника). Такая длина подынтервалов считается минимальной для получения приемлемой точности решения при минимизации затрат времени на его получение [225]. Дальнейшее уменьшение длины подынтервалов ведет к существенному росту требуемых вычислительных затрат на получение требуемого значения, при этом его уточнение оказывается незначительным.

Таблица 2.3 – Результаты работы алгоритма АИВОС на пример стека МПЛП 4 (рисунок 2.3)

Метод построения сетки	Параметры решения	Количество проводников				
		2	4	6	8	10
Равномерная сегментация ($t/3$)	\underline{C} , пФ/м	97,1158	97,1164	97,1164	97,1164	97,1164
	T , с	2,52	6,38	12,71	22,15	35,15
	N	1162	1714	2266	2818	3370
АИВОС	\underline{C}_{it} , пФ/м	97,1808	97,1814	97,1814	97,1814	97,1814
	T_{it} , с	3,70	9,22	18,38	31,72	50,14
	N	1238	1826	2414	3002	3590
	N_{it}	5	5	5	5	5
	$ \underline{C} - \underline{C}_{it} /\underline{C}$, %	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
	T/T_{it}	0,68	0,69	0,69	0,69	0,70

Из таблицы 2.3 видно, что при анализе рассмотренных стеков МПЛП применение алгоритма АИВОС не эффективно и требуется его усовершенствовать. Для модификации АИВОС, с учетом результатов работы [225], целесообразно в качестве начальной длины подынтервалов вместо ширины проводников (w) использовать их высоту (t) [629]. Далее эта модификация алгоритма АИВОС называется АИВОС-У1.

Использование в качестве контролируемого параметра одного из элементов ёмкостной матрицы представляется не оптимальным, поскольку при квазистатическом анализе МПЛП, используется вся матрица целиком, а не отдельные её элементы. Поэтому в ходе итерационного процесса более эффективно использовать интегральную оценку точности вычислений. Так как порядок ёмкостной матрицы определяется количеством сигнальных проводников в анализируемой структуре, для останова итераций целесообразно использовать её норму Фробениуса [365] (далее АИВОС-У2).

Вторая модификация алгоритма АИВОС основана на особенности вычисления контролируемого параметра (строка 6 псевдокода алгоритма АИВОС). Как было показано в разделе 1 (пункт 1.3.1.3), значения элементов ёмкостной матрицы вычисляются из элементов массива-решения СЛАУ. Этот массив является матрицей, если в структуре несколько сигнальных проводников, или вектором, если в структуре только один сигнальный проводник. Тогда для останова итераций целесообразно использование нормы массива-решения СЛАУ (далее АИВОС-У3). Обе предлагаемые модификации не требуют существенного изменения псевдокода алгоритма АИВОС и поэтому отдельно не представлены.

Как известно, неравномерная сетка более предпочтительна для тщательного учёта изменения зарядов (токов) на отдельных подынтервалах (подобластях). Поэтому, с точки зрения эффективности вычислений, целесообразно угащать сетку на тех подынтервалах, где необходима более детальная информация, а не работать с более густой и равномерной сеткой. При этом следует помнить, что равномерная сегментация более точна. Тогда на подынтервалах с быстрым изменением плотности заряда предпочтение следует отдавать густым равномерным сеткам, а там, где изменение более медленное, редким, но тоже равномерным сеткам. В результате неравномерная сетка используется лишь на переходных подынтервалах [18]. На основании этих особенностей разработан алгоритм неравномерного угащения сегментации [630] (далее АИВОС-У4), псевдокод которого имеет следующий вид:

- 1 Установить исходные параметры моделирования (tol , параметры структуры, ε – точность сегментации, n – количество частей деления подынтервала)
- 2 Для каждой границы структуры установить длину подынтервала (l)
- 3 Выполнить начальную сегментацию структуры (N – общее количество подынтервалов)
- 4 Решить СЛАУ $\mathbf{S}_0 \mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{V}_0$ и вычислить значение контролируемой величины K_0
- 5 Для $i = 1, \dots, N_{it}^{\max}$
- 6 Для $j = 1, \dots, N$

- 7 **Если** «качество» j -го подынтервала неудовлетворительно
- 8 Разбить подынтервал на n частей
- 9 **Увеличить** j
- 10 Решить СЛАУ $\mathbf{S}_i \boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{V}_i$ и вычислить значение контролируемой величины K_i
- 11 **Пока** $(K_i - K_{i-1}) / K_{i-1} > tol$
- 12 **Продолжить текущий цикл**
- 13 **Увеличить** i

Дадим соответствующие пояснения к псевдокоду алгоритма АИВОС-У4. Для проверки «качества» подынтервала (строка 7) используется следующее правило. Если значение плотности заряда (массив-решения СЛАУ) на j -м подынтервале отличается от среднего арифметического значения плотности заряда на соприкасающихся с ним подынтервалах, более чем на значение ε , то «качество» подынтервала считается неудовлетворительным, и он подлежит разбиению.

При этом важным является, какие подынтервалы считать соприкасающимися. Для этого возможно 2 варианта (рисунок 2.4). Выбор варианта обусловлен возможностью учёта принадлежности подынтервалов к разным границам структуры (диэлектрик-диэлектрик или проводник-диэлектрик). Для первого варианта необходима только общая точка, вне зависимости от типа границ (рисунок 2.4а). При втором варианте соприкасающимися считаются все подынтервалы, имеющие с текущим общую точку и принадлежащие тому же типу границ (рисунок 2.4б). При итерациях для анализа «качества» подынтервалов, принадлежащих границам диэлектрик-диэлектрик, используются элементы первого столбца массива-решения СЛАУ.



Рисунок 2.4 – К определению подынтервалов, соприкасающихся (○) с тестируемым (⊗):
принадлежат только одному (а) и произвольному (б) типу границ

2.3 Ускорение заполнения матрицы СЛАУ

В разделе 1 было показано, что основные вычислительные затраты при математическом моделировании приходятся на этапы формирования и решения СЛАУ. Далее выполнено совершенствование первого из них за счет использования параллельных вычислений.

Обзор работ показывает, что широко используемой технологией распараллеливания вычислений является технология CUDA от компании NVIDIA [631], предназначенная для вычислений на графическом процессоре. Этот процессор представляет собой устройство, содержащее значительное количество однородных исполнительных модулей, в которых одна и та же операция применяется одновременно к множеству независимых данных.

В пункте 1.3.1.4 показано, что информационная зависимость данных при вычислении элементов матрицы СЛАУ отсутствует, поэтому каждый элемент может быть вычислен независимо от остальных. Таким образом, с учётом особенностей вычислений на графических процессорах, разработан соответствующий алгоритм, псевдокод которого имеет следующий вид [632]:

- 1 Копировать параметры подынтервалов, полученные после построения сетки, из памяти хоста в память графического ускорителя.
- 2 Вычислить значения элементов матрицы СЛАУ S , каждое в отдельном потоке CUDA, согласно (1.28)–(1.30).
- 3 Копировать полученные значения элементов матрицы СЛАУ из памяти графического ускорителя в память хоста.

2.4 Совершенствование ILU(0)-разложения

В данном подразделе приведены результаты сравнительной оценки нескольких форматов хранения разреженных и неструктурированных матриц. Для этого использованы такие критерии как коэффициент сжатия и плотность матрицы. Полученные оценки позволили выбрать оптимальный формат хранения, отличающийся минимальными требованиями к машинной памяти и универсальности использования в алгоритмах. Далее с учетом его особенностей разработан ряд модификаций ILU(0)-разложения для вычисления предобусловливателя. Подраздел основан на работах [633–639].

Для сравнительной оценки эффективности форматов хранения неструктурированных разреженных матриц использован коэффициент сжатия (k), под которым понимается отношение общего числа N^2 элементов квадратной матрицы порядка N к числу хранимых данных (N_{NZ}). При этом тип данных во внимание не принимался, т.е. хранятся как сами ненулевые элементы, так и вспомогательные указатели (которые требуют меньше бит), обеспечивающих к ним доступ.

Для определения коэффициента сжатия можно воспользоваться подсчетом количества данных конкретной матрицы, хранящейся в сжатом виде, но удобнее использовать

аналитические выражения (формулы), позволяющие получить простую оценку коэффициента сжатия без подсчета. В известной автору литературе такие формулы не приводятся, но их легко получить, исходя из структуры конкретного формата хранения разреженных матриц. В таблицу 2.4 сведены полученные формулы для коэффициента сжатия для 3 форматов. Видно, что разреженный строчный формат имеет наибольший коэффициент сжатия.

Очевидно, что коэффициент сжатия (таблица 2.4) зависит от порядка матрицы и количества ненулевых элементов в ней. Оценить количество ненулевых элементов можно с помощью плотности матрицы, т.е. отношения количества её ненулевых элементов к N^2 . На рисунке 2.5 приведены рассчитанные по полученным формулам зависимости коэффициента сжатия форматов Кнута и CSR от плотности матрицы при $N = 1000$. Видно, что для более плотных матриц оба формата не всегда эффективны, т.е. могут не уменьшать, а увеличивать количество хранимых данных (области на рисунке 2.5, где $k < 1$). Ясно, что для каждого из форматов существует своя граница эффективности (q_b), плотность матрицы при которой $k = 1$. Это значение можно оценить аналитически. Так, в таблицу 2.4 сведены формулы определения плотности матрицы для трёх форматов, ниже которой их использование неэффективно.

Таблица 2.4 – Формулы для определения параметров форматов хранения

Разреженный формат	Коэффициент сжатия (k)	Граница эффективности (q_b), %	Максимальный коэффициент сжатия (k_{max})
Кнута	$\frac{N^2}{5N_{NZ} + 2N}$	$\frac{N^2 - 2N}{5N^2}$	$\frac{100\%}{5q}$
Рейнболдта и Местеньи	$\frac{N^2}{3N_{NZ} + 2N}$	$\frac{N^2 - 2N}{3N^2}$	$\frac{100\%}{3q}$
Разреженный строчный (CSR)	$\frac{N^2}{2N_{NZ} + N}$	$\frac{N^2 - N}{2N^2}$	$\frac{100\%}{2q}$

Коэффициент сжатия зависит от порядка матрицы. На рисунке 2.6 показана его зависимость от порядка матрицы при плотности матрицы $q = 10\%$. Видно, что коэффициент сжатия стремится к максимально возможному значению с ростом N . Тогда предел выражения для коэффициента сжатия при $N \rightarrow \infty$ даёт аналитическую оценку для определения его максимального значения (таблица 2.4). Видно, что разреженный строчный формат является самым эффективным по степени сжатия. Этот формат является также самым эффективным при реализации матрично-векторного умножения, на которое приходятся основные затраты времени при использовании итерационных методов [399, 640]. Поэтому для реализации и дальнейшего использования выбран именно он.

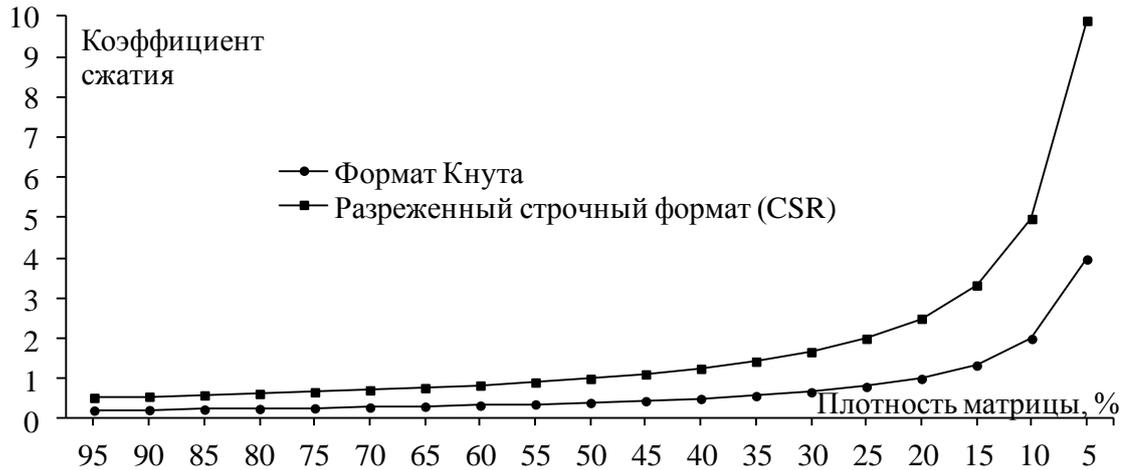


Рисунок 2.5 – Зависимости коэффициента сжатия (k) формата Кнута и разреженного строчного формата от плотности матрицы (q) при $N = 1000$

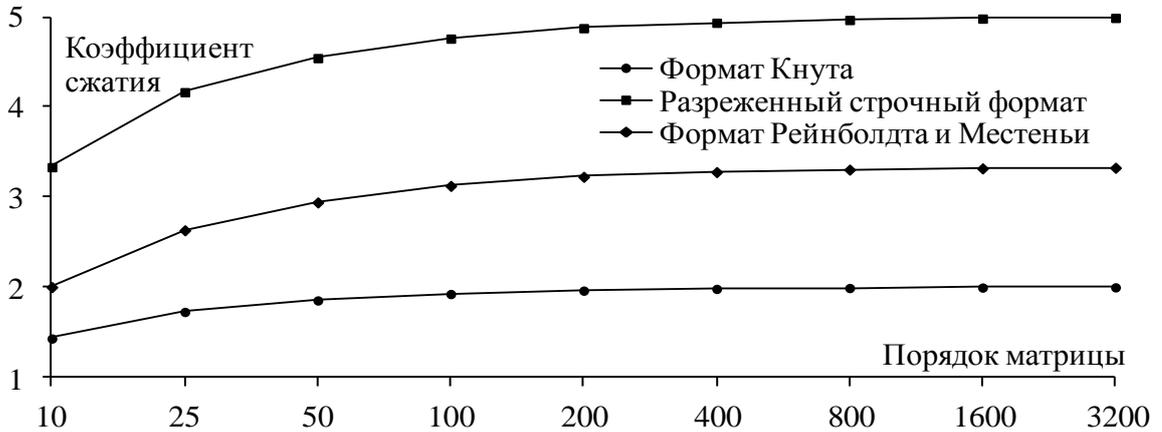


Рисунок 2.6 – Зависимости k от N , при $q = 10\%$ для разных форматов

Как уже упоминалось в пункте 1.6.3 наиболее работоспособные методы построения неявного предобуславливания основаны на LU-разложении. Однако данный метод предполагает неконтролируемое добавление новых элементов, что при использовании разреженных форматов недопустимо, т.к. это ведет к изменению портрета разреженности, и поэтому форматы могут стать неэффективными [395]. Более того, разреженный строчный формат имеет тот недостаток, что добавление новых элементов сложно. Это связано со структурой формата: элементы должны быть отсортированы, следовательно, добавление нового элемента требует операции сдвига всех оставшихся элементов. Это требует дополнительных операций над матрицей и, следовательно, замедляет работу алгоритма. Однако существующий метод $ILU(0)$ -разложения (см. пункт 1.6.3) не требует добавления новых элементов и поэтому наиболее пригоден.

Для реализации $\text{ILU}(0)$ -разложения выбрана ikj -версия алгоритма LU -разложения (см. пункт 1.6.3). Поскольку в этом алгоритме элементы матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} вычисляются по строкам, более эффективно использовать разреженный строчный формат. Для ясности изложения, далее приведен псевдокод алгоритма $\text{ILU}(0)$ -разложения, в более наглядном виде по сравнению с приведенным в пункте 1.6.3 (использование псевдокода является стандартным средством для представления разрабатываемых алгоритмов, относящихся к решению СЛАУ [382, 395, 396, 399, 470]):

```

1     Для  $i = 2, \dots, N$ 
2         Для  $k = 1, \dots, i - 1$ 
3             Если  $a_{ik}^S \neq 0$ 
4                  $a_{ik}^S = a_{ik}^S / a_{kk}^S$ 
5                 Для  $j = k + 1, \dots, N$ 
6                     Если  $a_{ij}^S \neq 0$ 
7                          $a_{ij}^S = a_{ij}^S - a_{ik}^S \cdot a_{kj}^S$ 
8                 Увеличить  $j$ 
9             Увеличить  $k$ 
10        Увеличить  $i$ 

```

После того, как разложение получено, полагается $\mathbf{M} = \mathbf{A}_S$. Данный алгоритм позволяет пересчитать i -ю строку матрицы \mathbf{A}_S в i -ю строку матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} . Первые $j - 1$ строк матрицы \mathbf{A}_S участвуют только в определении j -х строк матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} , но сами больше не модифицируются, что позволяет не использовать при вычислениях дополнительную память для хранения отдельно матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} .

В разреженном строчном формате нет прямого доступа к ненулевому элементу, т.к. не хранится прямой адрес этого элемента. Тогда самый простой вариант доступа к нему – использование поиска, который и был реализован в алгоритме. Алгоритм при этом получился простым, но медленным. Так, время работы двух указанных алгоритмов (первый – $\text{ILU}(0)$ -разложения без использования формата CSR, второй – с его использованием) сравнивалось на матрице порядка $N = 1000$. В результате оказалось, что алгоритм, использующий разреженный строчный формат, работает существенно дольше стандартного. Поэтому этот алгоритм неэффективен и его следует усовершенствовать.

Сначала рассмотрим некоторые особенности алгоритма для поиска путей его совершенствования. Отметив элементы матрицы, которые используются в полном цикле ikj -версии (строки 5–8), получим картину, схематично изображенную на рисунке 2.7. Здесь возможно использование цикла по ненулевым элементам в разреженном строчном формате, тогда от вычислительно затратного поиска элементов можно отказаться и операция (строка 7 алгоритма) будет производиться только с теми элементами строки, у которых равны индексы столбцов. Тогда псевдокод алгоритма будет выглядеть следующим образом:

```
1   Для  $i = 2, \dots, N$ 
2       Для  $k = 1, \dots, i - 1$ 
3           Найти  $s$  – номер элемента  $a_{ik}^s$  в векторе aelem
4           Если aelem( $s$ )  $\neq 0$ 
5               aelem( $s$ ) = aelem( $s$ ) / Find( $k, k$ )
6               Найти  $T$  – номер элемента  $a_{ik}^s$  в векторе aelem
7                $y_1 = T + 1$ 
8               Найти  $T$  – номер элемента  $a_{ik+1}^s$  в векторе aelem
9                $y_2 = T$ 
10               $Pr = \text{Истина}$ 
11              Пока  $Pr = \text{Истина}$ 
12                  Если jptr( $y_1$ ) = jptr( $y_2$ )
13                      aelem( $y_1$ ) = aelem( $y_1$ ) – aelem( $T$ ) · aelem( $y_2$ )
14                      Увеличить  $y_1$  и  $y_2$ 
15                  Если jptr( $y_1$ ) > jptr( $y_2$ )
16                      Увеличить  $y_2$ 
17                  Иначе
18                      Увеличить  $y_1$ 
19                  Если iptr( $k+1$ ) <  $y_2$  или iptr( $i+1$ ) <  $y_2$ 
20                       $Pr = \text{Ложь}$ 
21              Увеличить  $k$ 
22          Увеличить  $i$ 
```

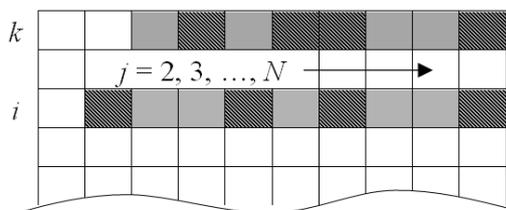


Рисунок 2.7 – Схематичное представление расположения элементов, используемых в ходе одного цикла *ikj*-версии алгоритма ILU(0)-разложения (штриховка – ненулевые, серый – нулевые, белый – не используемые)

В приведенном псевдокоде алгоритма сначала происходит поиск первого элемента (на рисунке 2.7 – это второй элемент строки 3), который используется при нахождении очередного элемента (строка 13), далее его расположение (индекс) фиксируется (переменная *s*). В строке 5 алгоритма имеется функция *Find*, предназначенная для поиска элемента в матрице и возвращающая его значение (на рисунке 2.8). Переменная *Pr* сигнализирует, когда конец строки достигнут. Переменные *y*₁ и *y*₂ содержат соответствующие индексы текущего элемента в строках 1 и 2. Переход от элемента к элементу строк матрицы выполняется по следующему правилу: если значение какой-либо из двух переменных больше другого, то инкрементируется значение второй (строки 15–18); если же значения переменных равны между собой (наличие ненулевых элементов в двух строках текущего столбца), то требуемая операция выполняется (строка 13), а значения этих переменных инкрементируются (строка 14). Разработанный алгоритм представлен на рисунке 2.9.

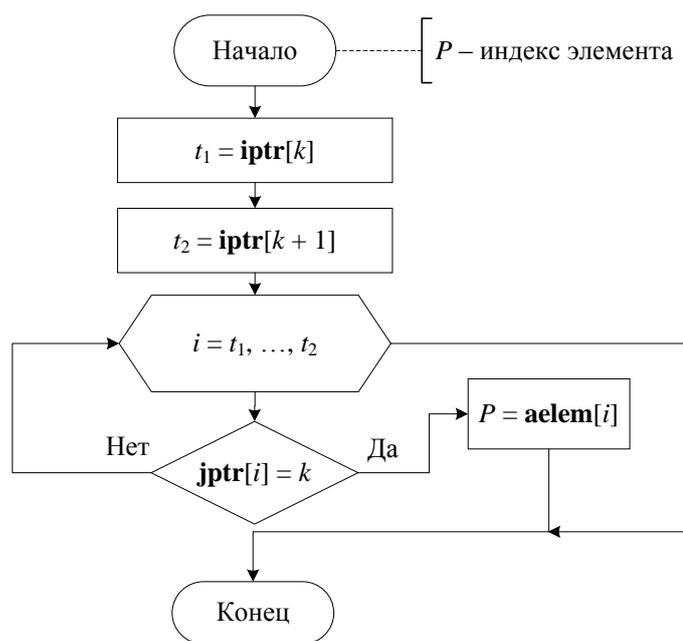


Рисунок 2.8 – Функция *Find* для поиска элемента a_{ik}^S в массиве **aelem**

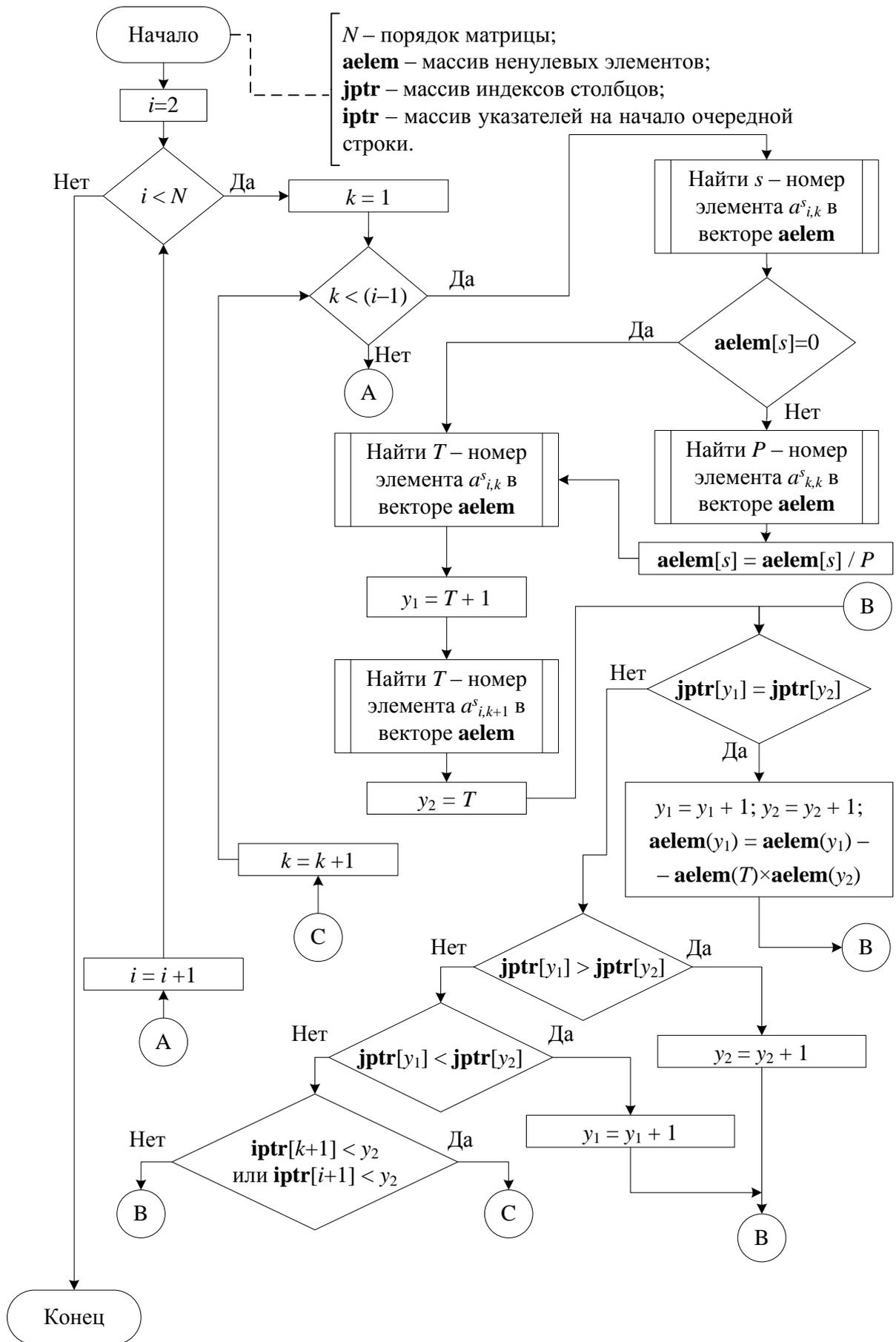


Рисунок 2.9 – Алгоритм ILU(0)-разложения с использованием разреженного строчного формата

Поиск диагонального элемента в строке 5 с помощью функции *Find* существенно увеличивает время работы алгоритма. Поэтому для его ускорения в формат хранения введен дополнительный массив **Diag**, в котором хранятся указатели на диагональные элементы. (Выигрыш, полученный за счет этого, представлен ниже.) С учетом сказанного псевдокод алгоритма примет вид (приведен на рисунке 2.10):

```

1   Для  $i = 2, \dots, N$ 
2       Для  $k = 1, \dots, i - 1$ 
3           Найти  $s$  – номер элемента  $a_{ik}^s$  в массиве aelem
4           Если aelem( $s$ )  $\neq 0$ 
5               aelem( $s$ ) = aelem( $s$ ) / aelem(Diag( $k$ ))
6               Найти  $T$  – номер элемента  $a_{ik}^s$  в массиве aelem
7                $y_1 = T + 1$ 
8               Найти  $T$  – номер элемента  $a_{ik+1}^s$  в массиве aelem
9                $y_2 = T$ 
10               $Pr = \text{Истина}$ 
11              Пока  $Pr = \text{Истина}$ 
12                  Если jptr( $y_1$ ) = jptr( $y_2$ )
13                      aelem( $y_1$ ) = aelem( $y_1$ ) – aelem( $T$ ) · aelem( $y_2$ )
14                      Увеличить  $y_1$  и  $y_2$ 
15                  Если jptr( $y_1$ ) > jptr( $y_2$ )
16                      Увеличить  $y_2$ 
17                  Иначе
18                      Увеличить  $y_1$ 
19                  Если iptr( $k+1$ ) <  $y_2$  или iptr( $i+1$ ) <  $y_2$ 
20                       $Pr = \text{Ложь}$ 
21              Увеличить  $k$ 
22          Увеличить  $i$ 

```

Анализ алгоритма из рисунка 2.10 показал, что он имеет недостаток: поиск ненулевых элементов в блоках 1, 2 и 3. Они необходимы, поскольку в разреженном строчном формате нет прямого доступа к первому ненулевому элементу в цикле по j (строка 5 псевдокода исходного

алгоритма). Таким образом, можно сократить время работы алгоритма, если упростить процедуру поиска.

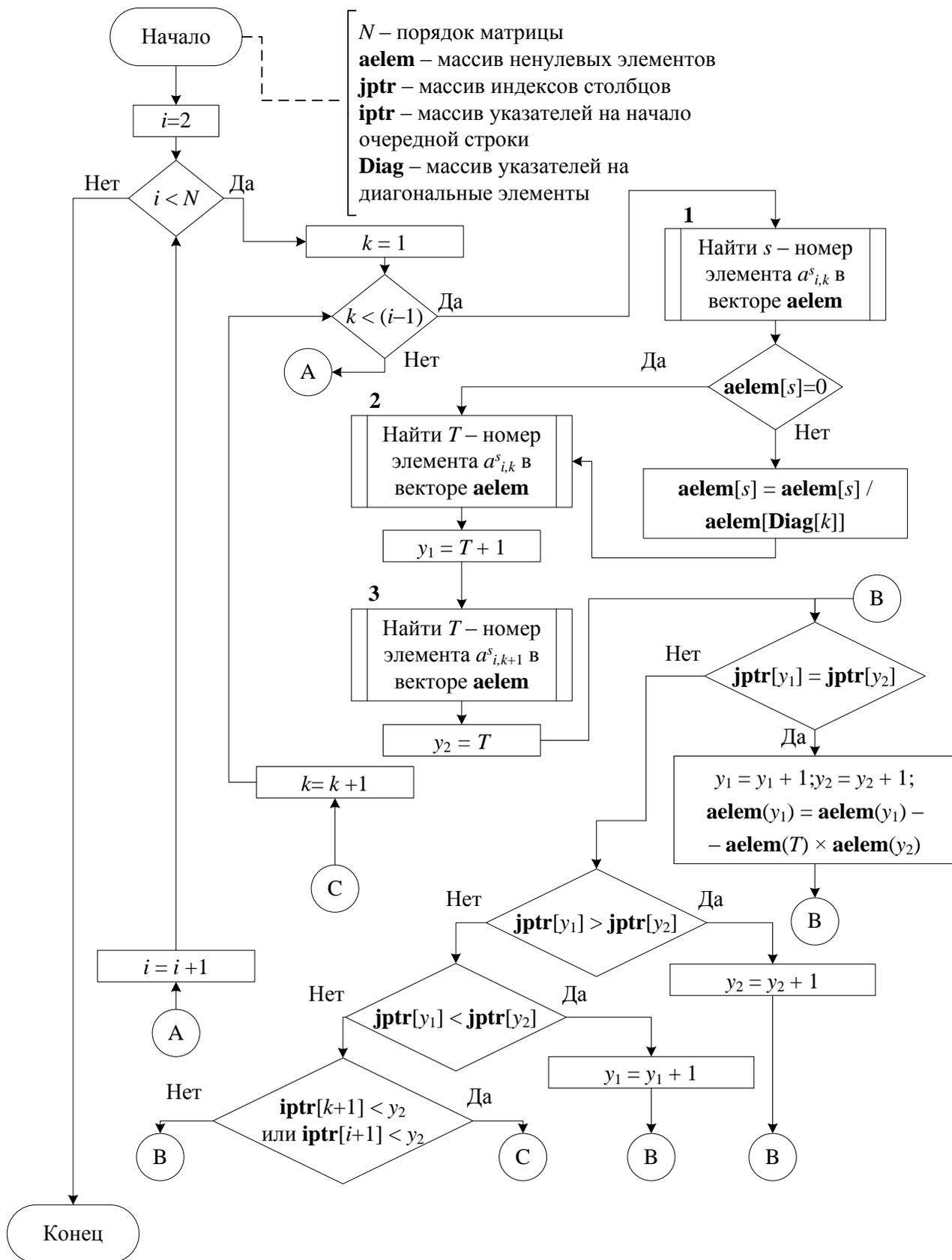


Рисунок 2.10 – Алгоритм ILU(0)-разложения

с использованием разреженного строчного формата и дополнительного массива **Diag**

Для ясности предлагаемых усовершенствований обратимся к псевдокоду исходного алгоритма $ILU(0)$ -разложения и на примере $N = 4$ схематично пометим используемые в нём на каждом шаге (триада $i-j-k$) элементы матрицы (кроме диагональных), как показано на рисунке 2.11. Видно, что текущий элемент a_{ik}^S всегда является первым в строке. С учетом данной особенности не нужно в каждом цикле выполнять поиск элемента a_{ik}^S (блок 1, рисунок 2.10) при $ILU(0)$ -разложении.

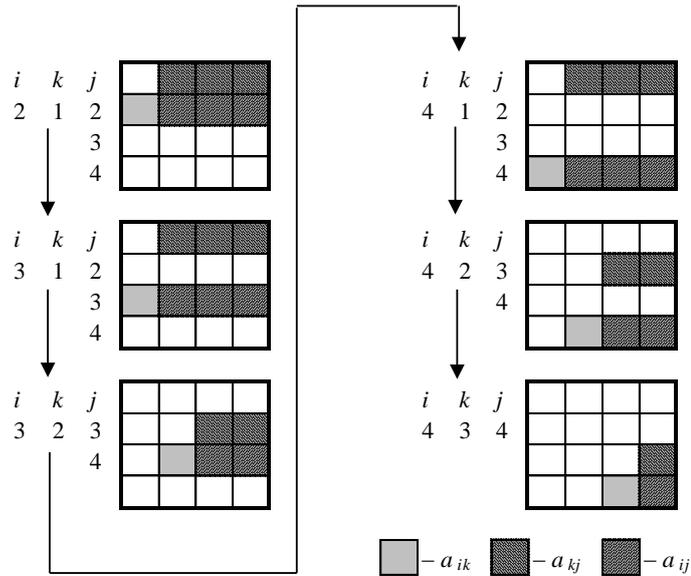


Рисунок 2.11 – Схематичное расположение элементов матрицы при реализации $ILU(0)$ -разложения (верхние индексы элементов матрицы опущены)

Еще одной особенностью алгоритма из рисунка 2.10 является то, что начальный элемент a_{kj}^S циклов $k-j$ всегда находится после соответствующего диагонального элемента (a_{kk}^S). Это позволяет исключить его поиск (блок 3, рисунок 2.10). С учетом сказанного следует, что поиски ненулевых элементов из алгоритма на рисунке 2.10 можно исключить. Тогда псевдокод алгоритма (представлен на рисунке 2.12) примет следующий вид:

- 1 Для $i = 2, \dots, N$
- 2 $s_1 = \mathbf{iptr}(i)$ – номер начального элемента
- 3 $Pr_1 = \text{Истина}$
- 4 Пока $Pr_1 = \text{Истина}$
- 5 $k = \mathbf{jptr}(s_1)$
- 6 Если $k \geq i$
- 7 Прервать текущий цикл

```

8      aelem( $s_1$ ) = aelem( $s_1$ ) / aelem(Diag( $k$ ))
9       $s_2 = s_1$ 
10     Увеличить  $s_1$ 
11      $y_1 = s_1$ 
12      $y_{end1} = \mathbf{iptr}(i+1)$ 
13      $y_2 = \mathbf{Diag}(k)+1$ 
14      $y_{end2} = \mathbf{iptr}(k+1)$ 
15     Если  $y_{end1} \leq y_1$  или  $y_{end2} \leq y_2$ 
16         Продолжить
17      $Pr_2 = \text{Истина}$ 
18     Пока  $Pr_2 = \text{Истина}$ 
19         Если  $\mathbf{jptr}(y_1) = \mathbf{jptr}(y_2)$ 
20             aelem( $y_1$ ) = aelem( $y_1$ ) – aelem( $s_2$ )·aelem( $y_2$ )
21             Увеличить  $y_1$  и  $y_2$ 
22         Если  $\mathbf{jptr}(y_1) > \mathbf{jptr}(y_2)$ 
23             Увеличить  $y_2$ 
24         Иначе
25             Увеличить  $y_1$ 
26         Если  $\mathbf{iptr}(k+1) < y_2$  или  $\mathbf{iptr}(i+1) < y_2$ 
27              $Pr_2 = \text{Ложь}$ 
28     Увеличить  $i$ 

```

Разработанный алгоритм из рисунка 2.12 имеет недостаток: большое количество сравнений в строках 19–27. Так, необходимо выполнять сравнение индексов столбцов ненулевых элементов одной строки с индексами ненулевых элементов из другой строки, и, если требуемое совпадение найдено, над этими элементами происходит операция, схематически изображенная на рисунке 2.13 (результат обозначен как Массив-результат). Для её выполнения требуется поэлементно сравнивать индексы столбцов ненулевых элементов их двух массивов, что крайне неэффективно.

Для этой операции можно воспользоваться временными массивами, так как в разреженном сточном формате хранятся не только значения элементов, но и индексы столбцов их расположения, что позволяет реализовать циклы без дополнительных условий. В результате

предлагаемая модификация алгоритма заключается в разделении операции поиска одинаковых индексов в двух массивах на два этапа.

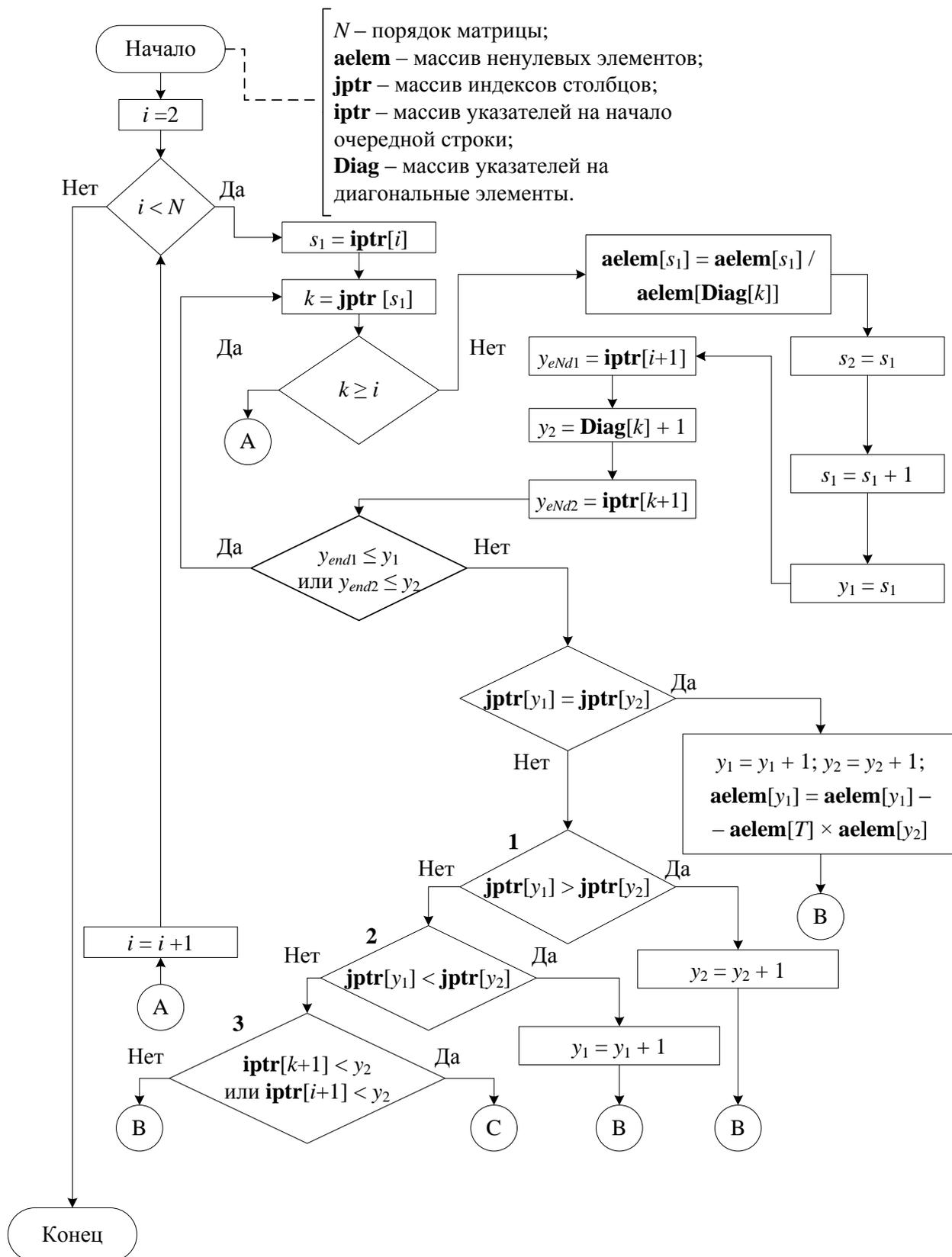


Рисунок 2.12 – Алгоритм LU(0)-разложения

с использованием разреженного строчного формата без поиска ненулевых элементов

На этапе 1 создаются массивы **tmpvec** и **tmpjptr**: первый хранит статусы наличия ненулевых элементов в первой сравниваемой строке **iptr₁**, а второй – соответствующие индексы столбцов этих элементов. На этапе 2 происходит сравнение значений элементов второй строки **iptr₂** со значениями элементов временного массива (**tmpvec**), и если элементы с одинаковыми индексами столбцов найдены, то выполняется требуемая операция со значениями этих элементов. Схематично описанные этапы изображены на рисунке 2.14.

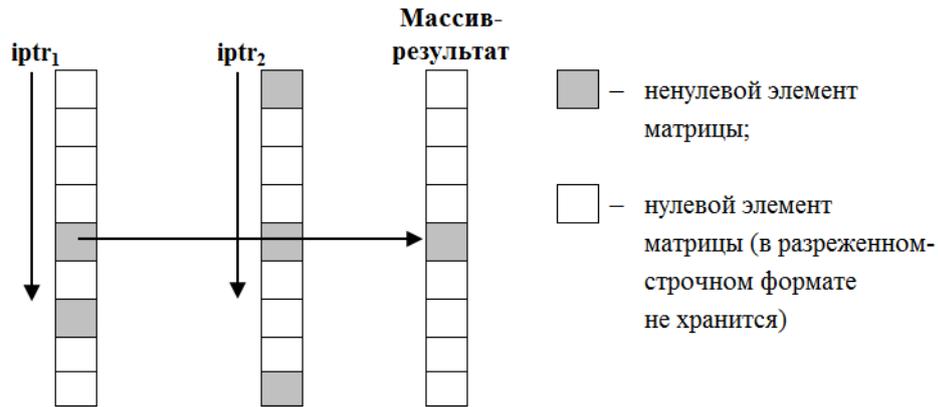


Рисунок 2.13 – Схематичное изображение операции сравнения наличия ненулевых элементов в векторах, используемой в алгоритме из рисунка 2.12

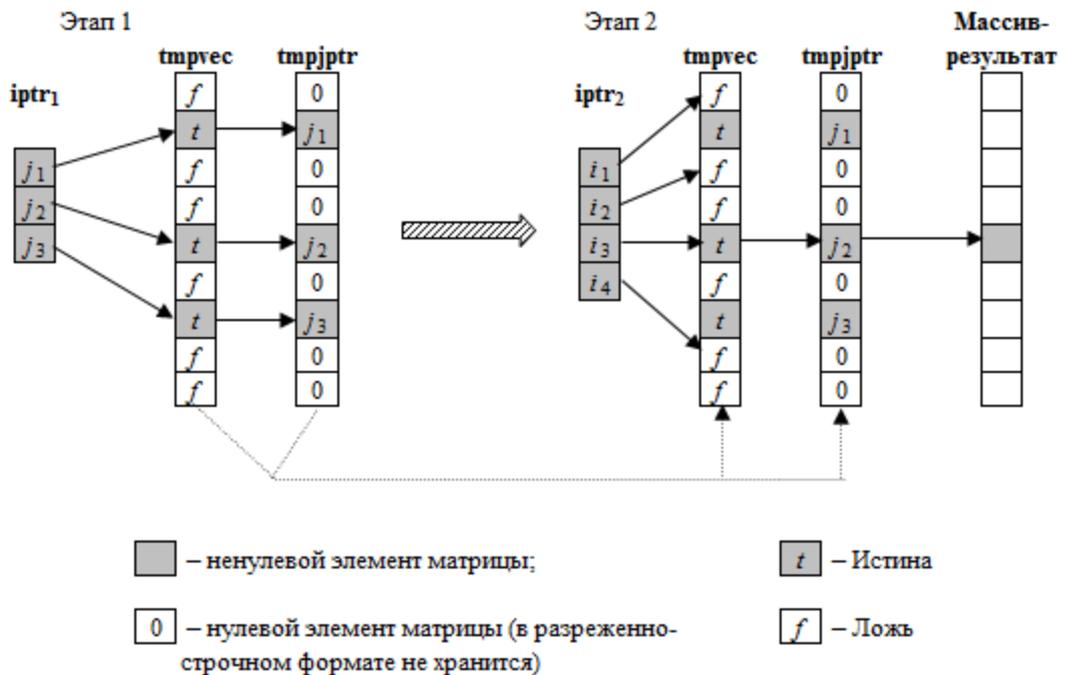


Рисунок 2.14 – Схематичное представление этапов операции поиска ненулевых элементов в алгоритме ILU(0)-разложения с двумя временными массивами **tmpvec** и **tmpjptr**

Очевидно, что в указанные временные массивы выгодно записывать целиком строку i , т.к. она используется в течение всего цикла ik (см. псевдокод исходного алгоритма), т.е. временный

массив будет создаваться один раз и использоваться на протяжении всего цикла. В результате использования временных массивов псевдокод алгоритма примет следующий вид:

```

1   Для  $i = 2, \dots, N$ 
2        $s_1 = \mathbf{iptr}(i)$  – номер начального элемента
3        $Pr_1 = \text{Истина}$ 
4       Для  $j = s_1, \dots, \mathbf{iptr}(i+1)$ 
5            $\mathbf{tmpvec}(\mathbf{jptr}(j)) = \text{Истина}$ 
6            $\mathbf{tmpjptr}(\mathbf{jptr}(j)) = j$ 
7       Увеличить  $j$ 
8       Пока  $Pr_1 = \text{Истина}$ 
9            $k = \mathbf{jptr}(s_1)$ 
10          Если  $k \geq i$ 
11              Прервать текущий цикл
12           $\mathbf{aelem}(s_1) = \mathbf{aelem}(s_1) / \mathbf{aelem}(\mathbf{Diag}(k))$ 
13           $s_2 = s_1$ 
14          Увеличить  $s_1$ 
15           $y_1 = s_1$ 
16           $y_{end1} = \mathbf{iptr}(i+1)$ 
17           $y_2 = \mathbf{Diag}(k)+1$ 
18           $y_{end2} = \mathbf{iptr}(k+1)$ 
19          Если  $y_{end1} \leq y_1$  или  $y_{end2} \leq y_2$ 
20              Продолжить
21          Для  $j = y_2, \dots, y_{end2}$ 
22              Если  $\mathbf{tmpvec}(\mathbf{jptr}(j)) = \text{Истина}$ 
23                   $\mathbf{aelem}(\mathbf{tmpjptr}(\mathbf{jptr}(j))) =$ 
24                   $\mathbf{aelem}(\mathbf{tmpjptr}(\mathbf{jptr}(j))) - \mathbf{aelem}(s_2) \cdot \mathbf{aelem}(j)$ 
25          Увеличить  $j$ 
25  Увеличить  $i$ 

```

Если элемент ненулевой, тогда в массиве **tmpvec** хранится соответствующее ему значение «Истина», а в массиве **tmpjptr** – его адрес (индекс). Из представленного алгоритма следует, что для создания этих двух временных массивов необходима дополнительная память рабочей станции, в которой будут храниться N булевых (массив **tmpvec**) и N целочисленных (массив

tmpjptr) элементов. Такое увеличение требуемой памяти по сравнению с основными затратами является незначительным и в дальнейшем не учитывалось. С учетом этих модификаций разработан алгоритм, приведенный на рисунке 2.15.

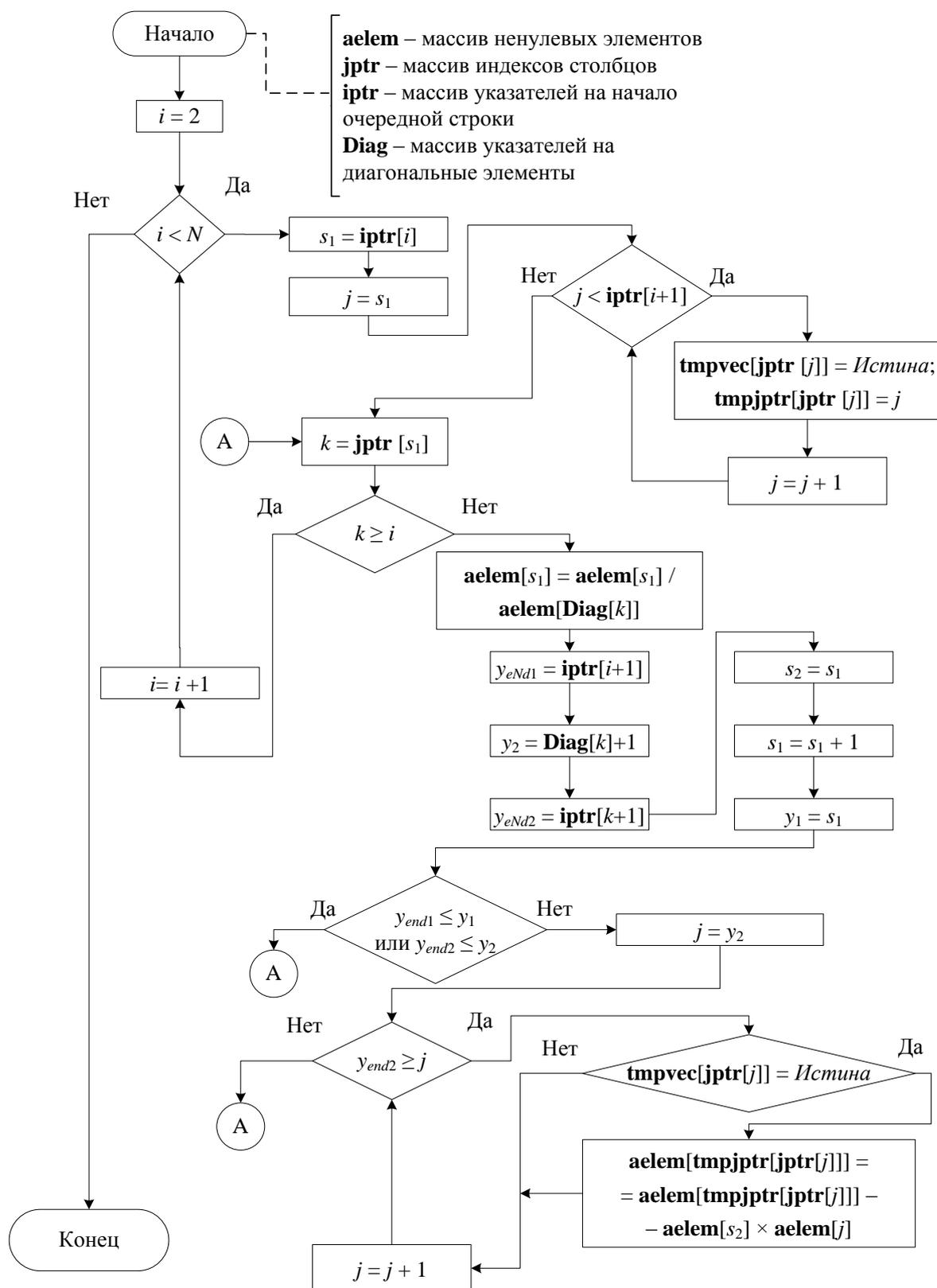


Рисунок 2.15 – Алгоритм ILU(0)-разложения

с использованием разреженного строчного формата и двух временных массивов

Как упоминалось в разделе 1 (пункт 1.6.3) при итерационном решении с неявным предобуславливанием на каждой итерации того или иного метода крыловского типа решается СЛАУ с матрицей \mathbf{M} , которая хранится в разреженном строчном формате в виде массивов **aelem**, **iptr** и **jptr**. Для конкретики обозначим эту СЛАУ как $\mathbf{Mz} = \mathbf{f}$. Тогда с использованием исходного алгоритма $\text{ILU}(0)$ -разложения, приведенного ранее, матрица \mathbf{M} может быть представлена в виде $\mathbf{M} \approx \mathbf{LU}$. Очевидно, что одни элементы массивов **aelem**, **iptr** и **jptr** используются для хранения матрицы \mathbf{L} (обозначим как **aelemL**, **iptrL** и **jptrL**), а другие – \mathbf{U} (**aelemU**, **iptrU** и **jptrU**). Дополнительно для ясности введем 2 массива **DiagL** и **DiagU**, в которых будут храниться диагональные элементы матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} . Тогда решение СЛАУ вида $\mathbf{Mz} = \mathbf{f}$ будет состоять из двух этапов (аналогично стандартному методу исключения Гаусса): прямого (строки 1–6) и обратного (строки 7–12) ходов. Далее внутренние циклы (строки 3 и 9) выполняют обход по элементам матриц. Соответствующий псевдокод алгоритма решения такой СЛАУ имеет следующий вид [395]:

```

1   Для  $i = 1, \dots, N$ 
2       Для  $j = \text{iptrL}(i), \dots, \text{iptrL}(i+1)-1$ 
3            $f(i) = f(i) - \text{aelemL}(j) \cdot z(\text{jptrL}(j))$ 
4       Увеличить  $j$ 
5        $z(i) = f(i) / \text{DiagL}(i)$ 
6   Увеличить  $i$ 
7   Для  $i = N, \dots, 1$ 
8        $z(i) = f(i) / \text{DiagU}(i)$ 
9       Для  $j = \text{iptrU}(i), \dots, \text{iptrU}(i+1)-1$ 
10           $f(i) = f(i) - \text{aelemU}(j) \cdot z(\text{jptrU}(j))$ 
11      Увеличить  $j$ 
12  Уменьшить  $i$ 

```

Из-за особенностей предложенных усовершенствований алгоритма $\text{ILU}(0)$ -разложения, описанных выше, применение этого алгоритма нецелесообразно. Поэтому разработан новый алгоритм решения СЛАУ $\mathbf{Mz} = \mathbf{f}$, псевдокод которого приведен далее. В нем прямому ходу соответствуют строки 1–9, а обратному – 10–18. Во внутренних циклах (строки 5 и 13) реализуется обход по ненулевым элементам. Условия в строках 6 и 14 обеспечивают обход только элементов ниже- и верхнетреугольных матриц соответственно, что обеспечивает нахождение решения СЛАУ без необходимости явного разделения на матрицы \mathbf{L} и \mathbf{U} , как это

сделано в псевдокоде предыдущего алгоритма. Итоговый псевдокод разработанного алгоритма имеет следующий вид:

```

1   Для  $i = 1, \dots, N$ 
2        $s_1 = \mathbf{iptr}(i)$ 
3        $s_2 = \mathbf{iptr}(i+1)$ 
4        $z(i) = f(i)$ 
5       Для  $j = s_1, \dots, s_2$ 
6           Если  $\mathbf{jptr}(j) < i$ 
7                $z(i) = z(i) - \mathbf{aelem}(j) \cdot z(\mathbf{jptr}(j))$ 
8           Увеличить  $j$ 
9   Увеличить  $i$ 
10  Для  $i = N, \dots, 1$ 
11       $s_1 = \mathbf{iptr}(i)$ 
12       $s_2 = \mathbf{iptr}(i+1)$ 
13      Для  $j = s_1, \dots, s_2$ 
14          Если  $\mathbf{jptr}(j) > i$ 
15               $z(i) = z(i) - \mathbf{aelem}(j) \cdot z(\mathbf{jptr}(k))$ 
16          Увеличить  $j$ 
17       $z(i) = z(i) / \mathbf{aelem}(\mathbf{Diag}(i))$ 
18  Уменьшить  $i$ 

```

Как уже упоминалось, предложенные модификации алгоритма LU(0)-разложения использовались только при одноядерных вычислениях, поэтому далее рассмотрена возможность их применения в версиях, использующих многопоточность. Для этого использовался открытый стандарт OpenMP, определяющий набор директив компилятора, библиотечных процедур и пр. для распараллеливания вычислений (программ на языках программирования C, C++, Фортран) на многопроцессорных системах с общей памятью [641, 642].

Для параллельной реализации выбран алгоритм из рисунка 2.15. С целью ускорения работы LU(0)-разложения помимо стандартных массивов разреженного строчного формата **aelem**, **iptr** и **jptr** в нём используются дополнительные массивы **Diag**, **tmpvec** и **tmpjptr**. Для ясности изложения обратимся к псевдокоду этого алгоритма. В нем есть внешний (строки 1–25) и внутренние (строки 4–7, 8–24, 21–24) циклы. Итерации двух из них (строки 1–25 и 8–24)

имеют информационную зависимость от результатов предыдущих итераций, поэтому эти циклы нельзя распараллеливать [643]. Циклы 4–7 и 21–24 не имеют такой зависимости и, тем самым, их можно распараллеливать. Однако вычислительная сложность итераций первого из этих циклов невысока, и поэтому он не рассматривался. Таким образом, параллельная область создавалась только внутри цикла 21–24 с помощью директивы `#pragma parallel for` (в работе использован язык C++).

Отдельно стоит отметить, что другими авторами в работах [644, 645] использована параллельная версия этого алгоритма, где показана его эффективность при решении СЛАУ (из задачи дифракции на двумерных и трёхмерных рассеивателях сложной структуры с помощью МКЭ) методом GMRES. Однако в упомянутой работе не приведен разработанный алгоритм, а также не указано какие технология распараллеливания, язык программирования и компилятор использовались.

2.5 Основные результаты раздела

Предложены 2 новых способа алгебраической предфильтрации. Первый, основанный на евклидовых нормах строк, относится к локальной (строчной), а второй, основанный на евклидовой норме матрицы, относится к глобальной предфильтрации. Предложены модификации 3 известных способов алгебраической предфильтрации, позволяющие сократить время, затрачиваемое на предфильтрацию.

Разработан параллельный алгоритм вычисления значений элементов матрицы СЛАУ с использованием графического ускорителя, позволяющий ускорить процесс её заполнения. Предложено 4 модификации алгоритма итерационного уточнения сетки при решении задач электростатики.

Получены аналитические оценки коэффициента сжатия 3 форматов хранения разреженных матриц и выполнено их сравнение на тестовых задачах. Показано, что использование разреженного строчного формата является наиболее эффективным для экономии машинной памяти и последующей программной реализации. С учётом этого, разработано 3 модификации стандартного алгоритма $ILU(0)$ -разложения. Далее на основании этих модификаций разработана параллельная версия алгоритма $ILU(0)$ -разложения.

3 ПРЕДЛОЖЕННЫЕ МЕТОДЫ УСКОРЕНИЯ МНОГОВАРИАНТНОГО АНАЛИЗА РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

В разделе 1 показано, что на практике достаточно часто возникает необходимость в многовариантном анализе и оптимизации элементов РЭС. Тогда можно воспользоваться разработанными алгоритмами для одновариантного анализа и, повторив такую процедуру m раз (далее m -кратное вычисление), получить требуемое решение. Однако вычислительные затраты существенно возрастают из-за необходимости многократного решения последовательности СЛАУ (далее многократное решение СЛАУ). Альтернативой этому подходу является использование для решения текущей СЛАУ информации, полученной при решении предыдущей(их), и, тем самым, ускорение процесса вычисления. Последующие подразделы работы посвящены развитию именно второго подхода. В них приведены результаты разработки моделей, метода и алгоритмов для многократного решения СЛАУ с использованием как прямых, так и итерационных методов, а также их гибридной версии.

3.1 Общие замечания

Важной практической задачей является вычисление ёмкостной матрицы \underline{C} в диапазоне параметров материалов, таких как относительная диэлектрическая проницаемость (ϵ_r). Это требуется при вычислении временного отклика с учетом частотной зависимости параметров материала подложки, когда для каждой частоты из спектра воздействующего сигнала вычисляются значения ϵ_r . Аналогичное необходимо при многократном вычислении в диапазоне параметров диэлектрика или при оптимизации его параметров. Также при проектировании полосковых структур требуется изменять их геометрические размеры для получения наилучших характеристик. Такие вычисления выполняются средствами многовариантного анализа или оптимизации.

В разделе 1 (пункт 1.3.1.4) описана математическая модель для вычисления ёмкостной матрицы при одновариантном анализе МПЛП. При её построении необходимо решать СЛАУ с плотной матрицей, для чего, как правило, используется метод, основанный на LU-разложении матрицы. В случае многовариантного анализа или оптимизации требуется решать m таких СЛАУ. Тогда затраты времени возрастают в m раз. Учтём, что при $N_{\text{COND}} > 1$, что часто возникает на практике, используется одно LU-разложение исходной матрицы (основные

затраты) и последующее получение решения СЛАУ для каждого из N_{COND} векторов свободных членов (малые затраты на каждое решение).

3.2 Методы ускорения итерационного решения СЛАУ при изменении параметров структуры

Для ясности дальнейшего изложения приведем псевдокод алгоритма m -кратного вычисления ёмкостной матрицы \underline{C} , называемого в этом подразделе исходным (алгоритм 3.1). (Представленные в этом разделе псевдокоды алгоритмов далее называются просто алгоритмами. Также введена их нумерация для удобства использования перекрестных ссылок на них при дальнейшем изложении.) Данный алгоритм является упрощенным представлением части упомянутой выше математической модели, где основной акцент сделан на её самый вычислительно затратный этап: решение СЛАУ. При этом в нем учтена специфика итерационного решения. Сразу оговоримся, что при описании в следующем подразделе разработанного подхода для многократного решения СЛАУ, основанного на использовании прямого метода, будет использовано несколько иное представление исходного алгоритма.

Алгоритм 3.1 – Решение последовательности СЛАУ итерационным методом с предобусловливанием

- 1 Сформировать матрицу A_5 из матрицы A_1 с помощью предфилтрации
- 2 Вычислить предобусловливатель M из матрицы A_5
- 3 Для k от 1 до m
- 4 Решить уравнение $MA_k x_i = Mb$ с требуемой точностью tol
- 5 Увеличить k

Видно, что для решения всей последовательности СЛАУ используется предобусловливатель, вычисляемый из первой матрицы последовательности. Для получения предобусловливателя может быть использован любой из соответствующих методов, например LU(0)-разложение. Отметим, что для простоты изложения, исходный алгоритм 3.1 и последующие разработанные алгоритмы ориентированы на решение последовательности СЛАУ с одной постоянно правой частью. Обобщение на случай нескольких правых частей делается заменой используемой версии итерационного метода на его блочный вариант.

Оценим возможное ускорение от применения итерационного метода с помощью отношения (β) в виде общего времени решения всех m СЛАУ прямым методом (T_D) (где системы

решаются последовательно и независимо друг от друга) ко времени их решения согласно алгоритму 3.1

$$\beta = \frac{mT_D}{T_{PR} + \sum_{k=1}^m T_k}, \quad (3.1)$$

где T_{PR} – время формирования предобусловливателя; T_k – время итерационного решения k -й СЛАУ с заданной точностью. Если предположить, что время решения отдельно взятых СЛАУ варьируется несущественно и, в среднем, оно равно T_A , тогда из (3.1) получим усредненное ускорение

$$\beta_A = \frac{mT_D}{T_{PR} + mT_A} \quad (3.2)$$

и максимально возможное ускорение

$$\beta_A^{\max} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{mT_D}{T_{PR} + mT_A} \right) = \frac{T_D}{T_A}. \quad (3.3)$$

Из формул (3.1) и (3.3) следует 2 важных вывода, используемых при последующей разработке алгоритмов для итерационного многократного решения СЛАУ. Во-первых, при увеличении числа последовательно решаемых СЛАУ итоговое ускорение все меньше зависит от затрат времени на вычисление предобусловливателя. Во-вторых, актуально уменьшение числа итераций, требуемых для решения отдельно взятой СЛАУ, и времени, затрачиваемого на одну итерацию.

Эффективность использования предобусловливания, для ускорения сходимости итерационного метода, сильно зависит от предфильтрации, и в частности, от задаваемого значения допуска обнуления τ . Так, при $\tau = 0$ итерационный процесс сойдется за одну итерацию, поскольку решение предобусловленной СЛАУ будет эквивалентно решению исходной СЛАУ (матрица A_5 и затем M будут аналогичны матрице A). Тогда хранение предобусловливателя с использованием специализированных форматов становится неэффективным, поскольку отсутствует экономия машинной памяти [646]. Поэтому, как будет показано в следующем разделе, при вычислениях для формирования предобусловливателя предпочтительнее использовать полное LU-разложение.

3.2.1 Выбор начального приближения

На примере изменения значения ε_r диэлектрика структуры, рассмотрим влияние еще одного важного параметра итерационного решения: начального приближения. Так, анализ

выражений (1.28)–(1.30) показывает, что процесс многократного вычисления матрицы \underline{C} можно ускорить, используя специфику построения матрицы СЛАУ \mathbf{S} , а точнее – место расположения в ней элементов, зависящих от ε_r . Так, из (1.30) видно, что они расположены только в строках, соответствующих N_D подынтервалам диэлектрик-диэлектрик, причем только на главной диагонали матрицы. При этом структура матрицы СЛАУ \mathbf{S} , согласно пункту 1.3.1.4, может быть представлена в упрощенном виде, как на рисунке 3.1. Таким образом, при многократном изменении относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика изменяются только элементы на главной диагонали нижнего правого блока матрицы \mathbf{S} , соответствующего подынтервалам диэлектрик-диэлектрик. Этот ресурс можно использовать для уменьшения общего времени многократного решения СЛАУ.

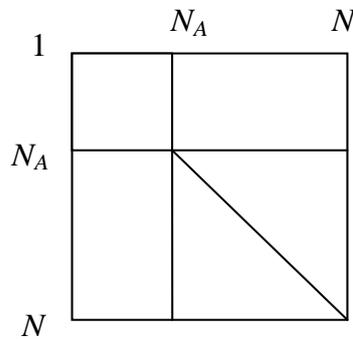


Рисунок 3.1 – Структура матрицы СЛАУ при изменении значения ε_r диэлектрика

Рассмотрим изменение элементов текущей матрицы СЛАУ относительно первой. Поскольку изменяющиеся элементы находятся на главной диагонали, то оценено изменение абсолютного значения максимального из них (Δa) для всех матриц СЛАУ относительно его значения из матрицы первой СЛАУ (рисунок 3.2). Видно, что значение элемента изменяется менее чем на 12%.

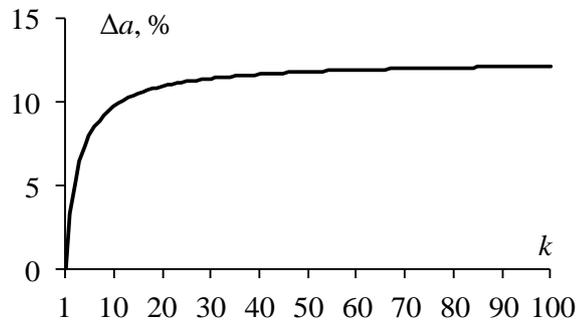


Рисунок 3.2 – Зависимость изменения значения элемента матрицы от порядкового номера СЛАУ

Очевидно, что чем ближе начальное приближение к вектору-решению СЛАУ, тем меньше потребуется итерационному методу количества итераций для его уточнения. Тогда использование вектора-решения предыдущей СЛАУ для начального приближения при решении текущей СЛАУ является эффективным, при небольших изменениях в значениях элементов матрицы.

3.2.2 Переформирование предобусловливателя

Эффективность предобусловливателя, вычисленного из первой матрицы последовательности СЛАУ, часто снижается из-за увеличения различий в значениях элементов матрицы в ходе многократного решения СЛАУ. Это ведет к росту общего количества итераций, требуемых для решения всех СЛАУ, что, в конечном счёте, замедляет процесс многократного решения СЛАУ итерационным методом. Поэтому предложено несколько подходов к переформированию предобусловливателя в ходе многократного решения СЛАУ.

3.2.2.1 Увеличение количества итераций выше порога

Ясно, что общее время решения последовательности СЛАУ сильно зависит от общего количества итераций, требующихся для решения всех СЛАУ этой последовательности. Поэтому для минимизации общего количества итераций требуется переформировывать предобусловливатель, когда количество итераций для решения текущей СЛАУ превышает заданный порог (N_{it}^{\max}), алгоритм 3.2.

Алгоритм 3.2 – Решение последовательности СЛАУ с переформированием предобусловливателя по порогу количества итераций

- 1 Вычислить предобусловливатель \mathbf{M} из матрицы \mathbf{A}_1
- 2 Положить $N_{it} = 0$
- 3 Для k от 1 до m
- 4 **Если** $N_{it} > N_{it}^{\max}$ и $k > 1$
- 5 Вычислить предобусловливатель \mathbf{M} из матрицы \mathbf{A}_k
- 6 Решить уравнение $\mathbf{MA}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{Mb}$ с требуемой точностью tol
- 7 Сохранить число итераций в N_{it}
- 8 **Увеличить** k

В данном алгоритме предфильтрация не использована, поскольку согласно (3.3) алгоритм итерационного решения последовательности СЛАУ эффективен при нулевом допуске

обнуления. Для вычисления предобусловливателя использовано $ILU(0)$ -разложение (из-за высокой плотности матрицы СЛАУ, оно фактически эквивалентно LU -разложению). Видно, что в строке 1 алгоритма происходит вычисление предобусловливателя из матрицы первой СЛАУ. Если количество итераций, требующихся для решения текущей СЛАУ, превышает значение заданного порога (строка 4), то происходит переформирование предобусловливателя (строка 5). Далее вычисленный предобусловливатель используется для решения последующих СЛАУ, пока он не потеряет свою эффективность и его не потребуется переформировать. Таким образом, в алгоритме реализована идея использования «замороженного» предобусловливателя для решения нескольких (по количеству переформирований предобусловливателя) подпоследовательностей СЛАУ. Деление на подпоследовательности происходит динамически с помощью анализа текущего количества итераций и заданного порога.

Оценим влияние значения порога количества итераций на процесс решения всей последовательности СЛАУ. При слишком низком пороге предобусловливатель будет часто переформировываться (для минимизации количества итераций), что приведет к большим затратам общего времени решения. Наоборот, слишком высокий порог минимизирует количество переформирований, но общее количество итераций и затраты времени также будут большими. Из этих предположений следует, что существует оптимальное значение порога количества итераций, дающее минимальные общие затраты времени.

Однако этот подход имеет недостаток, не позволяющий универсально использовать его на практике: априорное определение оптимального значения не представляется возможным или сильно затруднено. Поэтому разработаны другие подходы.

3.2.2.2 Среднее арифметическое время решения

Еще раз вернемся к рассмотрению алгоритма 3.1. Ясно, что эффективность используемого для решения СЛАУ метода (в данном случае итерационного) определяется затратами времени на нахождение вектора-решения. Тогда при многократном решении СЛАУ необходимо оценивать общее время решения всех СЛАУ (T_{Σ}). Так, чем меньше это значение, тем эффективнее алгоритм 3.1.

Общее время многократного решения СЛАУ по алгоритму 3.1 оценивается как

$$T_{\Sigma} = T_{PR} + \sum_{k=1}^m T_k, \quad (3.4)$$

где T_{PR} – время вычисления предобусловливателя из первой матрицы решаемой последовательности СЛАУ, T_k – время решения k -й СЛАУ, m – общее количество СЛАУ.

С помощью (3.4), оценим изменение среднего арифметического времени решения подпоследовательности из k систем

$$\bar{T}(k) = \frac{T_{\Sigma}(k)}{k} = \frac{1}{k} \left(T_{\text{PR}} + \sum_{j=1}^k T_j \right). \quad (3.5)$$

Дополнительно введем вспомогательную величину

$$s_k = kT_{k+1} - \sum_{j=1}^k T_j. \quad (3.6)$$

Теорема 1. Если s_k монотонно возрастает при $k = 1, 2, \dots, k^*, \dots$ и выполнены условия $s_1 < T_{\text{PR}}$ и $s_{k^*} < T_{\text{PR}} \leq s_{k^*+1}$ для некоторого $k^* \geq 1$, то для этого k^* достигается единственный минимум функции $\bar{T}(k)$.

Доказательство. Возьмем разность $\bar{T}(k+1) - \bar{T}(k)$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{T}(k+1) - \bar{T}(k) &= \frac{1}{k+1} \left(T_{\text{PR}} + \sum_{j=1}^{k+1} T_j \right) - \frac{1}{k} \left(T_{\text{PR}} + \sum_{j=1}^k T_j \right) = \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \left[kT_{\text{PR}} - (k+1)T_{\text{PR}} + k \sum_{j=1}^{k+1} T_j - (k+1) \sum_{j=1}^k T_j \right] = \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \left[-T_{\text{PR}} + kT_{k+1} - \sum_{j=1}^k T_j \right] = \frac{1}{k(k+1)} [-T_{\text{PR}} + s_k]. \end{aligned}$$

Ясно, что функция $\bar{T}(k)$ убывает, при $s_k < T_{\text{PR}}$, в противном случае функция $\bar{T}(k)$ возрастает. Для наличия минимума функции $\bar{T}(k)$ достаточным является выполнение условий $s_1 < T_{\text{PR}}$ и, для некоторого конечного k^* , $s_{k^*} < T_{\text{PR}} \leq s_{k^*+1}$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если при $k = 1, 2, \dots, m$ выполняется условие $T_j = t$ и $t < T_{\text{PR}}$, тогда функция $\bar{T}(k)$ убывает и стремится к t .

Доказательство. Пусть $T_j = t$. Из (3.6) следует, что $s_k = 0$. Тогда

$$\bar{T}(k+1) - \bar{T}(k) = \frac{-T_{\text{PR}}}{k(k+1)} < 0,$$

следовательно, функция $\bar{T}(k)$ убывает для всех k . Согласно (3.5) получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{T}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{T_{\text{PR}} + kt}{k} \right) = t.$$

Теорема доказана.

Прокомментируем условия, указанные в теореме 1. Очевидно, что при решении последовательности СЛАУ из-за потери эффективности «замороженного» предобусловливателя

(поскольку он вычислен из матрицы первой СЛАУ, а различие в значениях элементов текущей матрицы относительно первой увеличивается), происходит рост времени решения последующей СЛАУ. При этом время решения первой СЛАУ меньше времени на вычисление предобусловливателя, т.е. $s_1 < T_{PR}$. Тогда у функции $\bar{T}(k)$ будет существовать единственный минимум. Это позволяет сформулировать условие вида

$$\bar{T}(k-1) < \bar{T}(k) \text{ или } \frac{T_{\Sigma}(k-1)}{k-1} < \frac{T_{\Sigma}(k)}{k}$$

для переформирования предобусловливателя. Из теоремы 2 следует, что функция $\bar{T}(k)$ будет постоянно убывать при неизменном времени решения отдельных СЛАУ T_k , что возможно только при постоянном и низком количестве требуемых итераций. При этом предобусловливатель не будет переформировываться, что и не требуется при низком количестве итераций. На основании этих рассуждений разработан алгоритм 3.3.

Алгоритм 3.3 – Решение последовательности СЛАУ с переформированием предобусловливателя по увеличению среднего арифметического времени решения

- 1 Вычислить предобусловливатель \mathbf{M} из матрицы \mathbf{A}_1 за время T_{PR}
- 2 Решить уравнение $\mathbf{MA}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{Mb}$ с требуемой точностью tol за время T_1
- 3 Положить $T_{\Sigma} = T_{PR} + T_1$
- 4 Для k от 2 до m
- 5 Решить уравнение $\mathbf{MA}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{Mb}$ с требуемой точностью tol за время T_k
- 6 Если $T_{\Sigma}/(k-1) < (T_{\Sigma} + T_k)/k$ и $k \neq m$
- 7 Вычислить предобусловливатель \mathbf{M} из матрицы \mathbf{A}_k за время T_{PR}
- 8 Положить $T_{\Sigma} = T_{\Sigma} + T_{PR}$
- 9 Положить $T_{\Sigma} = T_{\Sigma} + T_k$
- 10 Увеличить k

Использование алгоритма 3.3 позволяет без указания дополнительных параметров решения (например, порог количества итераций) адаптивно переформировывать предобусловливатель при потере им эффективности путем проведения дешевых оценок. Так, эта проверка осуществляется в строке 9 с использованием простого выражения.

3.2.2.3 Средняя арифметическая сложность решения

Использование для переформирования предобусловливателя среднего арифметического времени решения последовательности СЛАУ имеет недостаток, связанный со сложностью точной оценки времени вычислений [54]. Поэтому рассмотрена возможность использования арифметической сложности операций.

Общая сложность решения последовательности из m СЛАУ без переформирования предобусловливателя (F_{Σ}) выражается через среднюю сложность решения одной СЛАУ (\bar{F})

$$F_{\Sigma} = m\bar{F}.$$

Тогда вычислительные затраты в ходе многократного решения СЛАУ можно контролировать с помощью текущей средней сложности решения k СЛАУ

$$\bar{F}_k = \frac{F_{\Sigma k}}{k}.$$

Для определения сложности можно использовать арифметическую сложность (Q) и O -нотацию. Такой подход может быть использован с любым итерационным методом. Так, итоговые формулы для оценки сложности LU-разложения, BiCGStab и CGS сведены в таблицу 3.1. При оценивании сложности метода BiCGStab учтено наличие 2 условий для возможного выхода из итерационного процесса. Подробный расчет сложности алгоритмов приведен в [647]. Далее приведен алгоритм многократного решения СЛАУ с переформированием предобусловливателя (для вычисления используется LU-разложение), алгоритм 3.4.

Таблица 3.1 – Сложность методов

Метод	Арифметическая сложность (Q)	O -нотация
LU-разложение	$f_{LU}(N) = (10N^3 - 3N^2 + 16N - 18)/6$	$f_{LU}(N) = N^3/6$
BiCGStab, выход 1	$f(N, N_{it}) = 5N^2 + 13N + 3 + N_{it}(10N^2 + 31N + 16) + (N_{it} - 1)(10N^2 + 33N + 11)$	$f(N, N_{it}) = 4N^2 + 6N + 4(N_{it} - 1)(N^2 + 2N)$
BiCGStab, выход 2	$f(N, N_{it}) = 5N^2 + 8N + 2 + N_{it}(20N^2 + 64N + 37)$	$f(N, N_{it}) = 2N^2 + 2N + 4N_{it}(N^2 + 2N)$
CGS	$f(N, N_{it}) = 10N^2 + 16N + 1 + N_{it}(20N^2 + 43N + 15) + (N_{it} - 1)(10N + 4)$	$f(N, N_{it}) = 2N^2 + N_{it}(8N^2 + 5N)$

Алгоритм 3.4 – Решение последовательности СЛАУ с переформированием предобусловливателя при увеличении средней сложности решения

- 1 Вычислить предобусловливатель \mathbf{M} из матрицы \mathbf{A}_1
- 2 Положить $F_{\Sigma} = f_{LU}(N)$

- 3 Решить уравнение $\mathbf{MA}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{Mb}$ с требуемой точностью tol за N_{it} итераций
- 4 Положить $F_\Sigma = F_\Sigma + f(N, N_{it})$
- 5 Для k от 2 до m
- 6 Решить уравнение $\mathbf{MA}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{Mb}$ с требуемой точностью tol за N_{it} итераций
- 7 Положить $F_k = f(N, N_{it})$
- 8 Если $F_\Sigma / (k-1) < (F_\Sigma + F_k) / k$ и $k \neq m$
- 9 Вычислить предобусловливатель \mathbf{M} из матрицы \mathbf{A}_k
- 10 Положить $F_\Sigma = F_\Sigma + F_k$
- 11 Увеличить k

В переменной F_Σ хранится общая текущая сложность k решенных систем для контроля средней сложности их решения. При её увеличении (алгоритм 3.4, строка 8) предобусловливатель переформируется (алгоритм 3.4, строка 9). Иначе процесс решения продолжается с использованием ранее вычисленного предобусловливателя. Значение сложности самого итерационного метода хранится в переменной F_k (алгоритм 3.4, строка 7). Это значение зависит от используемого метода и вычисляется на основании данных из таблицы 3.1.

3.2.3 Выбор очередности решения

Еще одним ресурсом ускорения итерационного решения последовательности СЛАУ является выбор определенной очередности её решения. Так, очередность решения, как правило, определяется требуемым изменением параметра(ов) анализируемой структуры. При этом если общее время решения всех систем последовательности зависит от очередности решения отдельно взятых систем, то, очевидно, существует некая оптимальная очередность, позволяющая минимизировать общие затраты времени. Наличие этой зависимости следует из специфики итерационного решения последовательности СЛАУ. Ясно, что эта зависимость определяется двумя особенностями решения. Первая особенность – это выбор матрицы для вычисления предобусловливателя (оказывает непосредственно влияние на количество итераций, требуемых для решения всех последующих систем). Второй особенностью является использование для начального приближения текущей системы решения предыдущей (близость начального приближения к искомому решению уменьшает количество требуемых итераций).

В ходе многовариантного анализа часто используется несколько видов изменения анализируемого параметра: линейное, логарифмическое и задаваемое пользователем. При

использовании оптимизации это изменение может быть произвольным. Для ясности рассмотрим линейное изменение значения контролируемого параметра, являющееся самым простым, однако широко используемым на практике. Тогда очередность решения всей последовательности СЛАУ определяется возрастанием значения этого параметра (прямой порядок) или его убыванием (обратный порядок). Это позволяет выявить оптимальный порядок очередности решения последовательности СЛАУ. С учётом сказанного, разработан общий алгоритм 3.5. Как и ранее, для вычисления предобусловливателя используется LU-разложение.

Алгоритм 3.5 – Решение последовательности из m СЛАУ с выбором очередности решения

- 1 Задать очередность решения СЛАУ
- 2 Вычислить предобусловливатель \mathbf{M} из матрицы \mathbf{A}_1
- 3 Для k от 1 до m
- 4 Решить уравнение $\mathbf{MA}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{Mb}$ с требуемой точностью tol
- 5 Увеличить k

Сразу оговоримся, что такое изменение параметра не обязательно сопровождается монотонным изменением значений элементов матрицы СЛАУ или её норм(ы), но часто наблюдается на практике. Тем не менее, необходим анализ типовых структур.

3.2.4 Выбор матрицы для вычисления предобусловливателя

Как было сказано выше, одной из особенностей, оказывающих влияние на процесс итерационного решения последовательности СЛАУ, является выбор матрицы для вычисления предобусловливателя. Ясно, что общие затраты времени зависят от этого выбора, поскольку предобусловливатель будет различен. На практике изменение параметра структуры часто осуществляется в фиксированном диапазоне, что даёт возможность выбрать одно из значений этого параметра для вычисления предобусловливателя. Так, наиболее простым способом является использование среднего значения из рассматриваемого диапазона. На основе этих рассуждений разработан алгоритм 3.6, который легко использовать совместно с алгоритмом 3.5.

Алгоритм 3.6 – Решение последовательности СЛАУ с выбором матрицы для вычисления предобусловливателя

- 1 Выбрать матрицу i -й СЛАУ для вычисления предобусловливателя, например, $i = m / 2$
- 2 Вычислить предобусловливатель \mathbf{M} из матрицы \mathbf{A}_i
- 3 Для k от 1 до m

- 4 Решить уравнение $\mathbf{M}\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{M}\mathbf{b}$ с требуемой точностью tol
- 5 Увеличить k

3.3 Использование метода блочного LU-разложения для ускорения решения СЛАУ при изменении параметров структуры

3.3.1 Изменение диэлектрической проницаемости диэлектрика

3.3.1.1 Основной алгоритм

Как было показано в подразделе 3.2, при многократном изменении ϵ_r диэлектрика изменяются только элементы, соответствующие подынтервалам диэлектрик-диэлектрик (главная диагональ нижнего правого блока матрицы СЛАУ). Этот ресурс можно использовать для уменьшения общего времени многократного решения СЛАУ с использованием не только итерационного, но и прямого метода. Так, вычислив один раз матрицу \mathbf{S} (при $k = 1$), на следующем шаге, соответствующем изменению ϵ_r , необходимо лишь модифицировать диагональные элементы матрицы в её строках, соответствующих подынтервалам диэлектрик-диэлектрик. Тогда, при изменении ϵ_r , пересчет элементов матрицы \mathbf{S} сводится к модификации некоторого (определенного, для каждой конфигурации) количества диагональных элементов.

Для ясности дальнейшего изложения, приведем псевдокод алгоритма m -кратного вычисления ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ (в этом подразделе далее – исходный алгоритм), алгоритм 3.7. Как и в случае итерационного подхода, данный алгоритм является упрощенной частью математической модели из пункта 1.3.1.4, где основной акцент сделан на её самый вычислительно затратный этап: решение СЛАУ. (При представлении алгоритмов, для обозначения порядкового номера решаемой СЛАУ использованы верхние индексы у векторов и матриц, относящиеся к процессу её решения. Нижние индексы используются для индикации конкретного столбца матрицы, её блока или соответствующего вектора в последовательности СЛАУ.)

Алгоритм 3.7 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ (исходный алгоритм)

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^k
- 3 Выполнить LU-разложение матрицы \mathbf{S}^k
- 4 Для i от 1 до N_{COND}

- 5 Вычислить элементы вектора воздействия \mathbf{v}_i
- 6 Решить уравнение $\mathbf{S}^k \boldsymbol{\sigma}_i^k = \mathbf{v}_i$
- 7 Вычислить элементы i -го столбца ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 8 **Увеличить i**
- 9 **Увеличить k**

Как известно, LU-разложение – широко используемый метод решения СЛАУ вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, являющийся альтернативной формулировкой метода исключения Гаусса. При этом исходная матрица СЛАУ \mathbf{A} сначала декомпозируется на произведение двух треугольных матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} , и затем, последовательно с этими матрицами, решаются две СЛАУ. В результате вычисляется вектор неизвестных \mathbf{x} . Из анализа приведенного алгоритма 3.7, видно, что от внутреннего цикла по i формально можно уйти, заменив векторы $\boldsymbol{\sigma}_i$ и \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N_{\text{COND}}$) матрицами $\boldsymbol{\Sigma}$ и \mathbf{V} , размером $N \times N_{\text{COND}}$ (упоминались в предыдущем подразделе). Изменение параметров структуры приводит к изменению элементов матрицы \mathbf{S}^k , но не матрицы \mathbf{V}^k , поэтому её нижний индекс далее опущен. Тогда алгоритм m -кратного вычисления матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ примет следующий вид.

- 1 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 2 Для k от 1 до m
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^k
- 4 Выполнить LU-разложение матрицы \mathbf{S}^k
- 5 Решить уравнение $\mathbf{S}^k \boldsymbol{\Sigma}^k = \mathbf{V}$
- 6 Вычислить элементы ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 7 **Увеличить k**

Для наглядного представления других усовершенствований, рассмотрим алгоритм блочного LU-разложения. Если представить матрицу \mathbf{S}^k , соответствующую некоторому значению диэлектрической проницаемости ε_r , в блочном виде (индекс k опущен)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{A} – блок размера $N_A \times N_A$, \mathbf{B} – $N_A \times N_D$, \mathbf{C} – $N_D \times N_A$ и \mathbf{D} – $N_D \times N_D$, то, как отмечено выше, при смене значения ε_r изменится только часть элементов матрицы, а именно элементы блока \mathbf{D} . Очевидно, что изменение данного блока приведет к изменению LU-разложения матрицы \mathbf{S}^k и,

соответственно, решения СЛАУ (матрицы Σ). Алгоритм, с учетом модификаций только элементов блока \mathbf{D} , можно представить следующим образом.

Алгоритм 3.8 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ при изменении диагональных элементов блока \mathbf{D}

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 5 Иначе
- 6 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
- 7 Вычислить значения диагональных элементов блока \mathbf{D}^k
- 8 Выполнить LU-разложение матрицы \mathbf{S}^k
- 9 Решить уравнение $\mathbf{S}^k \Sigma^k = \mathbf{V}$
- 10 Вычислить ёмкостную матрицу $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 11 Увеличить k

Далее представим первую матрицу в виде произведения матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} , т.е.

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

где $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{L}_{10} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} \\ 0 & \mathbf{U}_{11} \end{bmatrix}$, а \mathbf{I} – единичная матрица. Тогда, для ускорения многократного

решения СЛАУ при изменении элементов блока \mathbf{D} , можно использовать блочное LU-разложение. Для подтверждения этого сначала оценим временные затраты, приходящиеся на: многократное LU-разложение, однократное LU-разложение и решения для N_{COND} векторов свободных членов, а также многократное LU-разложение и решения для каждого вектора свободных членов.

Алгоритм блочного LU-разложения и последующего решения СЛАУ имеет вид:

- 1 $\mathbf{U}_{00} = \mathbf{A}$, $\mathbf{U}_{01} = \mathbf{B}$.
- 2 $\mathbf{L}_{10} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ относительно \mathbf{L}_{10} .
- 3 $\mathbf{U}_{11} = \mathbf{D} - \mathbf{L}_{10}\mathbf{U}_{01}$ (дополнение Шура).
- 4 Решить $\mathbf{U}_{00}\mathbf{Y}_0 = \mathbf{V}_0$.
- 5 $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{L}_{10}\mathbf{Y}_0$.
- 6 Решить $\mathbf{U}_{11}\Sigma_1 = \mathbf{Y}_1$.

- 7 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{U}_{01}\mathbf{\Sigma}_1.$
- 8 Решить $\mathbf{U}_{00}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_0.$
- 9 $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{Y}_0 - \mathbf{Z}.$

Данный алгоритм блочного LU-разложения использует матрично-матричные операции (базовые подпрограммы линейной алгебры, BLAS3), которые предпочтительны для получения высокой производительности [451]. При изменении блока \mathbf{D} и использовании многократного LU-разложения реализуется только одна операция вычитания, так как произведение $\mathbf{L}_{10}\mathbf{U}_{01}$ уже получено и сохранено.

Для численных оценок использовано LU-разложение из библиотеки линейной алгебры Eigen [410], написанной на языке C++, а также блочный алгоритм, реализованный с помощью функций данной библиотеки. Все вычислительные эксперименты выполнены с помощью матриц порядка $N = 1000$.

Сначала оценено время, затрачиваемое на 1000 LU-разложений [648]. При использовании LU-разложения из библиотеки Eigen затраты составили 196 с. Затраты времени на блочное LU-разложение, в зависимости от N_A/N , сведены в таблицу 3.2. Видно, что затраты времени на последовательное LU-разложение многократно превышают затраты на блочное разложение, поскольку один раз выполняется полный расчет элементов, а далее многократно пересчитывается только блок \mathbf{D} . При увеличении отношения N_A/N ускорение увеличивается, поскольку размер блока \mathbf{D} уменьшается, и операции с ним занимают меньшую часть общего времени решения.

Таблица 3.2 – Затраты времени на блочное LU-разложение при изменении отношения N_A/N

N_A/N	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
T, c	5,72	4,1	3,34	2,5	1,79	1,19	0,71	0,281	0,11

Далее оценено время однократного LU-разложения, стандартного библиотечного (LU) и блочного (Block LU), и последующих решений при $N_{COND} = 5, 10, 15$ в диапазоне изменения N_A/N . Полученные результаты приведены на рисунке 3.3. Видно, что минимальное время при использовании стандартного разложения по сравнению блочным в 2 раза меньше, а на краях диапазона N_A/N это отношение достигает 4 раз. Минимальное время при использовании блочного разложения в точке $N_A/N = 0,5$ связано с делением исходной матрицы на блоки равного размера. Таким образом, для однократного решения СЛАУ с N_{COND} правыми частями (векторами свободных членов) блочный алгоритм использовать неэффективно.

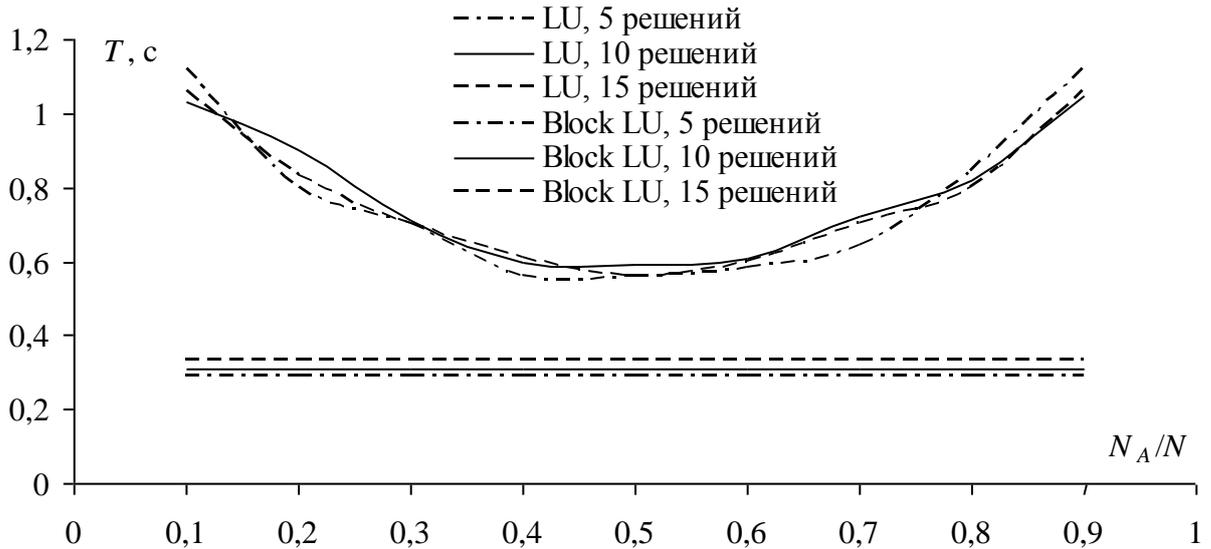


Рисунок 3.3 – Время LU-разложения с вычислением с помощью него решений СЛАУ для 5, 10, 15 правых частей в зависимости от N_A/N

(горизонтальные линии – время при использовании стандартного разложения)

Поскольку, как показано выше, для многократного решения СЛАУ с изменяющимся блоком **D** предпочтительнее использовать блочное разложение, а для однократного – стандартное, то далее выполнена оценка затрат времени на многократное решение СЛАУ с несколькими правыми частями ($N_{COND} = 5, 10, 15$). Полученные результаты приведены на рисунке 3.4. Количество повторений LU-разложения принято равным 2^k , где $k = 8, 9$ и 10 .

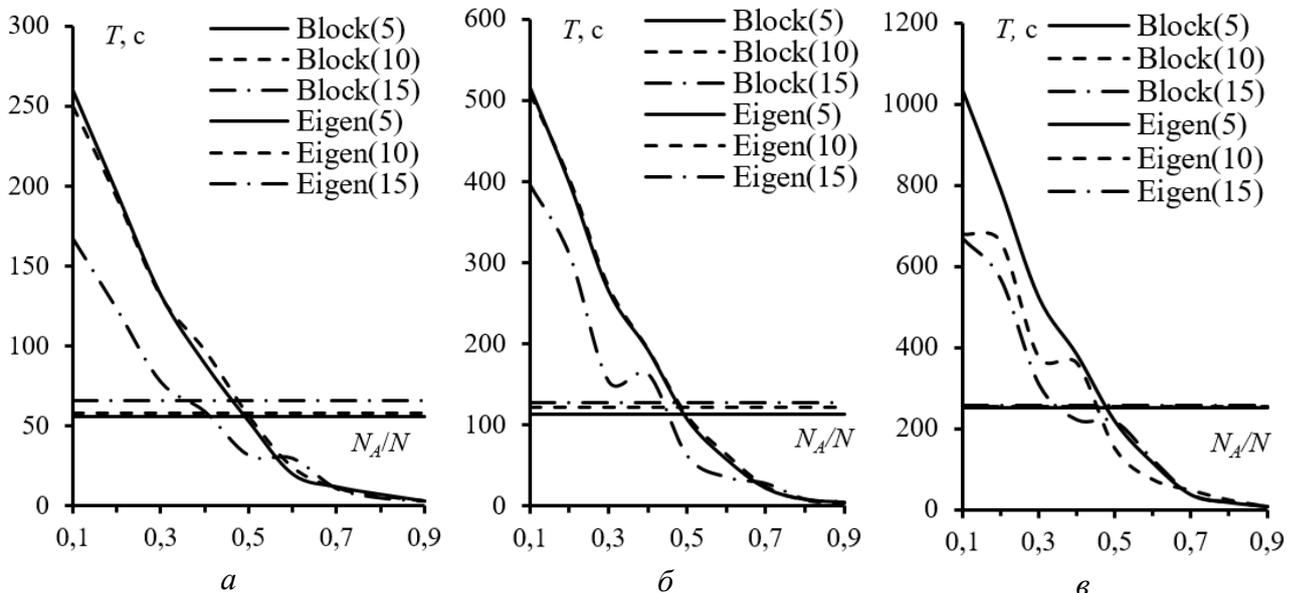


Рисунок 3.4 – Время (T , с) решения 2^k СЛАУ с 5, 10, 15 правыми частями

при $k = 8$ (*a*), 9 (*б*), 10 (*в*) в зависимости от N_A/N

(горизонтальными линиями показано время при использовании стандартного разложения)

Из рисунка 3.4 видно, что при малых значениях N_A/N время решения СЛАУ с помощью блочного разложения в несколько раз превышает время решения с помощью стандартного. В зависимости от количества правых частей и k , поведение зависимостей различно. При этом, начиная со значения $N_A/N \approx 0,53$, использование блочного разложения предпочтительнее. Вычислительные оценки ускорения, при использовании блочного разложения относительно стандартного, сведены в таблицу 3.3. Видно, что ускорение с ростом N_A/N до 0,9 возрастает до 20 раз, а с ростом k – до 35 раз.

Таблица 3.3 – Вычислительные оценки решения 2^k СЛАУ ускорения при использовании блочного разложения относительно стандартного

N_A/N	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$T_{\text{Eigen}}/T_{\text{Block}}, k = 8$	1,3	2,4	5,5	9,2	20
$T_{\text{Eigen}}/T_{\text{Block}}, k = 9$	1,4	2,4	5	16	30
$T_{\text{Eigen}}/T_{\text{Block}}, k = 10$	1,4	2,4	6,25	17,3	35

Таким образом, использование блочного LU-разложения для повышения быстродействия решения последовательности СЛАУ со слабо меняющейся матрицей может быть эффективно. Так, с ростом N_A/N это ускорение значительно возрастает. На практике существуют структуры, для которых это ускорение будет достигать десятков раз. Например, для структур с большим числом границ проводник-диэлектрик, а также малым числом границ диэлектрик-диэлектрик, или для структур с большим числом диэлектриков, но изменяющейся ϵ_r только одного из них.

Как было показано выше, для реализации предложенного блочного разложения надо дважды найти \mathbf{A}^{-1} . Поэтому, для сокращения вычислительных затрат, алгоритм можно изменить следующим образом:

$$\mathbf{U}_{00} = \mathbf{A}^{-1}; \mathbf{U}_{01} = \mathbf{U}_{00}\mathbf{B}; \mathbf{L}_{10} = \mathbf{C}; \mathbf{U}_{11} = \mathbf{D} - \mathbf{L}_{10}\mathbf{U}_{01} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{U}_{00}\mathbf{B}.$$

Видно, что тогда при изменении блока \mathbf{D} в разложении изменяется только \mathbf{U}_{11} . Таким образом, при модификации ϵ_r , используя данное представление матрицы, необходимо пересчитывать только элементы матрицы \mathbf{U}_{11} , при этом второй раз обращать матрицу не надо. Поскольку матрицы \mathbf{L} и \mathbf{U} , полученные после LU-разложения, хранятся на месте исходной матрицы \mathbf{S} , т.е. записываются на ее место, то алгоритм вычислений примет вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}; \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}; \mathbf{D} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{B}.$$

Далее рассмотрим решение СЛАУ с матрицей, полученной после разложения по описанной последовательности.

$$\mathbf{S}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{V}.$$

Обозначив $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{X}$, получим

$$\mathbf{LX} = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{10} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{V}_0; \mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{L}_{10}\mathbf{X}_0 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{L}_{10}\mathbf{X}_0 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{L}_{10}\mathbf{V}_0,$$

где \mathbf{V}_0 и \mathbf{X}_0 – блоки размера $N_A \times N_{\text{COND}}$, а \mathbf{V}_1 и \mathbf{X}_1 – $N_D \times N_{\text{COND}}$. Делая обратную подстановку, получим

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_0 \\ \boldsymbol{\Sigma}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = (\mathbf{U}_{11})^{-1}\mathbf{X}_1; \boldsymbol{\Sigma}_0 = (\mathbf{U}_{00})^{-1}(\mathbf{X}_0 - \mathbf{U}_{01}\boldsymbol{\Sigma}_1) = (\mathbf{U}_{00})^{-1}\mathbf{X}_0 - (\mathbf{U}_{00})^{-1}\mathbf{U}_{01}\boldsymbol{\Sigma}_1 = (\mathbf{U}_{00})^{-1}\mathbf{V}_0 - (\mathbf{U}_{00})^{-1}\mathbf{U}_{01}\boldsymbol{\Sigma}_1.$$

Объединив ранее полученные выражения, получим

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}; \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}; \mathbf{D} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{B};$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}\mathbf{V}_0; \mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}\mathbf{X}_0;$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_1; \boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_1.$$

Тогда алгоритм m -кратного вычисления матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ примет вид, алгоритма 3.9.

Алгоритм 3.9 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ с использованием блочного LU-разложения

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$
- 6 $\mathbf{B}^1 = \mathbf{A}^1\mathbf{B}^1$
- 7 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1\mathbf{V}_0$
- 8 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^1\mathbf{X}_0$
- 9 Иначе
- 10 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
- 11 Вычислить диагональные элементы блока \mathbf{D}^k
- 12 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{C}^k\mathbf{B}^k$
- 13 $\boldsymbol{\Sigma}_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1}\mathbf{X}_1$
- 14 $\boldsymbol{\Sigma}_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}_1\boldsymbol{\Sigma}_1^k$
- 15 Вычислить ёмкостную матрицу $\underline{\mathbf{C}}_k$
- 16 Увеличить k

Если в структуре отсутствует бесконечная заземленная плоскость, то при изменении ε_r , помимо изменения значений элементов, расположенных на диагонали матрицы, соответствующих N_D подынтервалам диэлектрик-диэлектрик, также меняются элементы последней «дополнительной» строки. Данный факт приводит к тому, что при $k = 1$ полученное произведение блоков **CB** нет смысла запоминать, для возможности дальнейшего использования, поскольку изменение ε_r приводит к изменению блока **C**, и соответственно всего произведения.

Таким образом, при решении задачи многократного вычисления ёмкостной матрицы анализируемой структуры может как присутствовать, так и отсутствовать плоскость земли. В первом случае, при изменении ε_r , меняются только диагональные элементы блока **D**, а во втором – диагональные элементы блока **D** и элементы последней «дополнительной» строки матрицы. Далее рассмотрим более подробно каждый из этих вариантов в отдельности.

3.3.1.2 Наличие в анализируемой структуре плоскости земли

Поскольку при изменении значения ε_r изменяются только элементы главной диагонали блока **D**, то это можно использовать для совершенствования алгоритма 3.9. Для этого представим матрицу СЛАУ в виде

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Diag} \end{bmatrix},$$

где **Diag** – диагональная матрица размера $N_D \times N_D$. Очевидно, что

$$\mathbf{D} = \underline{\mathbf{D}} + \mathbf{Diag}$$

и, в данном случае, диагональные элементы матрицы **D** равны нулю, а диагональная матрица **Diag** необходима для хранения изменяющихся элементов матрицы. Таким образом, выражение $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k$ (строка 12 алгоритма 3.9) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{D}^k = \underline{\mathbf{D}}^k + \mathbf{Diag}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k.$$

Поскольку в данном случае (структура с плоскостью земли) элементы блоков **D**, **C** и **B** не зависят от k (изменение ε_r), то последнее выражение преобразуется к виду

$$\mathbf{D}^k = \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{CB} + \mathbf{Diag}^k.$$

Таким образом, если вычислить $\mathbf{D} = \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{CB}$ при $k = 1$, то, каждый раз добавляя диагональную матрицу **Diag**^k, будем получать требуемую матрицу **D**^k. Тогда СЛАУ можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^k & \mathbf{B}^k \\ \mathbf{C}^k & \underline{\mathbf{D}} + \mathbf{Diag}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_0^k \\ \Sigma_1^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix}.$$

Размеры блоков Σ_0^k и $\mathbf{V}_0 - N_A \times N_{\text{COND}}$, а Σ_1^k и $\mathbf{V}_1 - N_D \times N_{\text{COND}}$, $N = N_A + N_D$. С учетом этого алгоритм 3.9 можно представить в виде алгоритма 3.10.

Алгоритм 3.10 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ с использованием блочного LU-разложения при изменении диагональных элементов блока \mathbf{D}

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1 и сохранить значения элементов главной диагонали блока \mathbf{D} в дополнительной диагональной матрице \mathbf{Diag}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$
- 6 $\mathbf{B}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^1$
- 7 $\mathbf{D}^1 = \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{C}^1 \mathbf{B}^1$
- 8 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$
- 9 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{X}_0$
- 10 Иначе
- 11 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
- 12 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k + \mathbf{Diag}^k$
- 13 $\Sigma_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$
- 14 $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}_1 \Sigma_1^k$
- 15 Вычислить ёмкостную матрицу $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 16 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{Diag}^k$
- 17 Вычислить элементы матрицы \mathbf{Diag}^{k+1}
- 18 Увеличить k

3.3.1.3 Отсутствие в анализируемой структуре плоскости земли

Как отмечалось выше, если плоскость земли отсутствует, изменение ϵ_r приводит к изменению блока \mathbf{C} и соответственно всего произведения \mathbf{CB} . Поскольку в данном случае в блоке \mathbf{C} изменяется только последняя «дополнительная» строка, то с учетом этого усовершенствован алгоритм 3.9. Для пояснения сути изменений, представим первую матрицу СЛАУ в виде (индекс матрицы опущен)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{A} – блок размера $N_A \times N_A$, $\mathbf{B} – N_A \times N_D^*$, $\mathbf{E} – N_A \times 1$, $\mathbf{C} – N_D^* \times N_A$, $\mathbf{D} – N_D^* \times N_D^*$, $\mathbf{F} – N_D^* \times 1$, $\mathbf{G} – 1 \times N_A$, $\mathbf{H} – 1 \times N_D^*$, $\mathbf{I} – 1 \times 1$, $N_A = N - N_D$, $N_D^* = N_D - 1$.

Таким образом, с изменением ε_r при анализе структуры, у которой отсутствует плоскость земли, изменятся не только элементы главной диагонали блока \mathbf{D}^k , но и элементы последней строки, а именно блоков \mathbf{G} , \mathbf{H} и \mathbf{I} . Тогда алгоритм 3.9 можно преобразовать к виду (без учета изменения диагональных элементов блока \mathbf{D}^k).

- 1 Для k от 1 до m
- 2 **Если** $k = 1$
- 3 Вычислить элементов матрицы \mathbf{S}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$
- 6 $\mathbf{B}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^1$
- 7 $\mathbf{E}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{E}^1$
- 8 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$
- 9 $\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{E}^1$
- $\mathbf{D}^1 = \mathbf{D}^1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{B}^1$
- 10 **Иначе**
- 11 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
- 12 Вычислить диагональные элементы блока \mathbf{D}^k
- 13 Вычислить элементы блока \mathbf{G}^k
- 14 Вычислить элементы блока \mathbf{H}^k
- 15 Вычислить элементы блока \mathbf{I}^k
- 16 $\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{B}^1$
- 17 $\mathbf{I}^k = \mathbf{I}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{E}^1$
- 18 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 \\ \mathbf{G}^k \end{bmatrix} \mathbf{X}_0$
- 19 Решить СЛАУ $\begin{bmatrix} \mathbf{D}^k & \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{H}^k & \mathbf{I}^k \end{bmatrix} \Sigma_1^k = \mathbf{X}_1$
- 20 $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{E}_1] \Sigma_1^k$

- 21 Вычислить элементы ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$
 22 Увеличить k

В данном алгоритме аналогично предыдущему случаю (когда в структуре присутствует плоскость земли) можно использовать дополнительную диагональную матрицу (**Diag**), для сокращения числа арифметических операций. Тогда окончательно алгоритм примет следующий вид.

- 1 Для k от 1 до m
 2 Если $k = 1$
 3 Вычислить значения элементов матрицы \mathbf{S}^1 и сохранить значения элементов
 4 главной диагонали блока \mathbf{D} в дополнительной диагональной матрице \mathbf{Diag}^1
 5 Вычислить значения элементов матрицы \mathbf{V}
 6 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$
 7 $\mathbf{B}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^1$
 8 $\mathbf{E}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{E}^1$
 9 $\mathbf{D}^1 = \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{C}^1 \mathbf{B}^1$
 10 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$
 11 $\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{E}^1$
 12 Иначе
 13 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
 14 Вычислить элементы блока \mathbf{G}^k
 15 Вычислить элементы блока \mathbf{H}^k
 16 Вычислить элементы блока \mathbf{I}^k
 17 $\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{B}^1$
 18 $\mathbf{I}^k = \mathbf{I}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{E}^1$
 19 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k + \mathbf{Diag}^k$
 20 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 \\ \mathbf{G}^k \end{bmatrix} \mathbf{X}_0$
 21 Решить СЛАУ $\begin{bmatrix} \mathbf{D}^k & \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{H}^k & \mathbf{I}^k \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1^k = \mathbf{X}_1$
 22 $\boldsymbol{\Sigma}_0^k = \mathbf{X}_0 - [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{E}_1] \boldsymbol{\Sigma}_1^k$
 23 Вычислить элементы ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$

- 23 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{Diag}^k$
 24 Вычислить элементы матрицы \mathbf{Diag}^{k+1}
 25 **Увеличить** k

Дополнительно может быть усовершенствован еще один шаг алгоритма – строка 19. Для этого представим блоки матриц \mathbf{V}_1 и \mathbf{X}_1 размера $N_D \times N_{\text{COND}}$ в виде

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{10} \\ \mathbf{V}_{11} \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{10} \\ \mathbf{X}_{11} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{V}_{10} и \mathbf{X}_{10} – блоки размера $N_{D^*} \times N_{\text{COND}}$, а \mathbf{V}_{11} и \mathbf{X}_{11} – $1 \times N_{\text{COND}}$, тогда

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 \\ \mathbf{G}^k \end{bmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{10} - \mathbf{C}^1 \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{V}_{11} - \mathbf{G}^k \mathbf{X}_0 \end{bmatrix},$$

или

$$\mathbf{X}_{10} = \mathbf{V}_{10} - \mathbf{C}^1 \mathbf{X}_0 \text{ и } \mathbf{X}_{11} = \mathbf{V}_{11} - \mathbf{G}^k \mathbf{X}_0.$$

3.3.1.4 Обобщенный алгоритм

Объединив алгоритмы для обоих случаев (когда в анализируемой структуре может присутствовать или отсутствовать плоскость земли), получим обобщенный алгоритм для вычисления емкостных матриц.

Алгоритм 3.11 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ произвольной структуры с использованием блочного LU-разложения

- 1 Для k от 1 до m
- 2 **Если** $k = 1$
- 3 Вычислить значения элементов матрицы \mathbf{S}^1 и сохранить значения элементов главной диагонали блока \mathbf{D} в дополнительной диагональной матрице \mathbf{Diag}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$
- 6 $\mathbf{V}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}^1$
- 7 $\mathbf{D}^1 = \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{C}^1 \mathbf{V}^1$
- 8 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$
- 9 **Если** в структуре присутствует плоскость земли
- 10 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{X}_0$
- 11 **Иначе**

- 12 $\mathbf{E}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{E}^1$
- 13 $\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{E}^1$
- 14 $\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}^1 - \mathbf{G}^1 \mathbf{B}^1$
- 15 $\mathbf{I}^1 = \mathbf{I}^1 - \mathbf{G}^1 \mathbf{E}^1$
- 16 $\mathbf{X}_{10} = \mathbf{V}_{10} - \mathbf{C}^1 \mathbf{X}_0$
- 17 **Иначе**
- 18 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
- 19 **Если** в структуре отсутствует плоскость земли
- 20 Вычислить элементы блока \mathbf{G}^k
- 21 Вычислить элементы блока \mathbf{H}^k
- 22 Вычислить элементы блока \mathbf{I}^k
- 23 $\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{B}^k$
- 24 $\mathbf{I}^k = \mathbf{I}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{E}^k$
- 25 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k + \mathbf{Diag}^k$
- 26 **Если** в структуре присутствует плоскость земли
- 27 $\Sigma_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$
- 28 $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}_1 \Sigma_1^k$
- 29 **Иначе**
- 30 $\mathbf{X}_{11} = \mathbf{V}_{11} - \mathbf{G}^k \mathbf{X}_0$
- 31 Решить СЛАУ $\begin{bmatrix} \mathbf{D}^k & \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{H}^k & \mathbf{I}^k \end{bmatrix} \Sigma_1^k = \mathbf{X}_1$
- 32 $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{E}_1] \Sigma_1^k$
- 33 Вычислить элементы ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 34 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{Diag}^k$
- 35 Вычислить элементы матрицы \mathbf{Diag}^{k+1}
- 36 **Увеличить k**

Далее получены аналитические оценки арифметической сложности и ускорения при использовании алгоритма 3.10 (алгоритм 3.11 при наличии плоскости земли) относительно алгоритма 3.8 (матричная версия исходного алгоритма 3.7) [649]. В случае изменения диагональных элементов блока \mathbf{D} изменятся только элементы блока \mathbf{U}_{11} , а все остальные блоки (\mathbf{U}_{00} , \mathbf{U}_{01} , \mathbf{L}_{10}) останутся неизменными. За счет этого достаточно лишь однократно вычислить \mathbf{U}_{00}^{-1} и $\mathbf{L}_{10} \mathbf{U}_{01}$. Таким образом, при выполнении m вычислений будет однократно выполняться

вычислительно затратное разложение матрицы СЛАУ (требующее приведения матрицы к пригодному для дальнейших вычислений виду) и выполняются последующие $m - 1$ вычислений блока U_{11} .

Для оценки ускорения рассмотрим отношение (β) общего времени решения m СЛАУ по алгоритму 3.8 (последовательные LU-разложения) ко времени вычисления по алгоритму 3.10 (блочное LU-разложение):

$$\beta = \frac{mT_{LU}}{T_1 + (m-1)T_S}, \quad (3.7)$$

где T_1 – время первого решения; T_S – время последующего решения СЛАУ (время решения СЛАУ при готовом LU-разложении примем равным для обоих алгоритмов). Тогда с помощью (3.7) получим оценку максимально возможного ускорения:

$$\beta_{\max} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{mT_{LU}}{T_1 + (m-1)T_S} = \frac{T_{LU}}{T_S}. \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) видно, что с ростом m итоговое ускорение решения всей последовательности СЛАУ всё меньше зависит от времени решения первой системы. Также видно, что ускорение обратно пропорционально времени вычисления блока U_{11} , которое определяется его порядком. Так, при больших m и малых N_D можно получить значительное ускорение многократных вычислений, в то время как при малых m и больших N_D ускорение будет незначительным или его вообще не будет.

Из алгоритма 3.10 видно, что при решении первой СЛАУ ($k = 1$) происходит приведение её матрицы S к блочному виду, а при решении последующих СЛАУ ($k > 1$) выполняются обращения блоков D^k , с изменяющимися диагональными элементами, для нахождения требуемых матриц Σ^k . Таким образом, только при первом (при $k = 1$) вычислении ёмкостной матрицы требуются большие вычислительные затраты.

Для детальной оценки требуемых вычислительных затрат и возможного итогового ускорения решения последовательности СЛАУ за счёт предложенных модификаций далее выполнена аналитическая оценка арифметических затрат на реализацию исходного и предложенного алгоритмов. Перед выполнением этой оценки отметим, что модифицированный алгоритм содержит несколько вспомогательных шагов, которые необходимы для вычисления элементов матрицы СЛАУ на основании параметров анализируемой структуры, последующей модификации этой матрицы для каждого нового ($k > 1$) значения ε_r , а также для вычисления ёмкостной матрицы. Эти затраты далее не учитывались, т.к. они намного меньше затрат, приходящихся на само решение СЛАУ.

Как было показано ранее, в исходном алгоритме для вычисления серии ёмкостных матриц используется последовательное LU-разложение, поэтому сначала выполнена оценка арифметической сложности (Q) этого разложения. Так, его сложность состоит из затрат на операции, реализующие прямой (Q_{FW}) и обратный (Q_{BW}) ходы [650]:

$$Q_{FW} = \frac{4N^3 - 3N^2 - N}{6}, \quad Q_{BW} = 2N^2 - N. \quad (3.9)$$

С учётом этого, общая сложность вычисления серии из m ёмкостных матриц согласно исходного алгоритма 3.8 составит

$$Q_{LU} = Q_{FW} + N_{COND}Q_{BW}. \quad (3.10)$$

Из алгоритма 3.10 следует, что при вычислении ёмкостной матрицы требуется однократно обратиться блок \mathbf{A} , а на каждом последующем k -м шаге – блок \mathbf{D}^k . Если для обращения матрицы порядка N используется LU-разложение с последующим решением N СЛАУ с двумя треугольными матрицами, тогда с учетом (3.9) сложность обращения исходной матрицы составляет

$$Q_{INV} = Q_{FW} + NQ_{BW} = \frac{8}{3}N^3 - \frac{3}{2}N^2 - \frac{1}{6}N. \quad (3.11)$$

Оценим сложность перемножения матриц и матричного вычитания. Так, на умножение матриц размером $N_1 \times N_2$ и $N_2 \times N_3$ требуется

$$Q_{MM} = N_3N_1(2N_2 - 1) \quad (3.12)$$

операций, а на вычитание матриц размером $N_1 \times N_2$ –

$$Q_{SM} = N_1N_2. \quad (3.13)$$

В таблицу 3.4 сведены операции алгоритма 3.10 (арифметические действия, требуемые для решения СЛАУ), а также их сложность, согласно (3.11)–(3.13). Учитывались только операции, направленные на решение СЛАУ. При вычислениях полагалось $N = N_A + N_D$. Номера матриц (верхние индексы) опущены.

Далее, используя данные из таблицы 3.4, оценим арифметическую сложность решения первой СЛАУ при наличии в структуре N_{COND} проводников

$$Q_f = Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{16}$$

и последующих $(m-1)$ вычислений

$$Q_{m-1} = (m-1)(Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{16}).$$

Тогда для m -кратного решения СЛАУ при использовании алгоритма 3.10 для вычисления ёмкостной матрицы требуется

$$Q_{BLU} = Q_f + Q_{m-1} = Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_9 + Q_{10} + m(Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{16}) \quad (3.14)$$

операций. Таким образом, получим аналитическое выражение для оценки ускорения (β_Q) m -кратного вычисления ёмкостной матрицы в виде отношения количества операций алгоритма 3.8 к количеству операций алгоритма 3.10:

$$\beta_Q = \frac{mQ_{LU}}{Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_9 + Q_{10} + m(Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{16})}. \quad (3.15)$$

Согласно (3.8), получим оценку максимально возможного ускорения:

$$\beta_{Q_{\max}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_Q = \frac{Q_{LU}}{Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{16}}. \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что ускорение, в первую очередь, определяется сложностью шага 13 алгоритма, поскольку сложность шага 14 и, тем более, шагов 12 и 16 много меньше её. Тогда, для получения большего ускорения, надо минимизировать сложность шага 13. (Предложения по совершенствованию вычислений приведены ниже.)

Таблица 3.4 – Арифметическая сложность шагов алгоритма 3.10

№ шага	Действие	Арифметическая сложность (Q)
Однократно выполняемые операции		
5	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$	$Q_5 = \frac{8}{3}N_A^3 - \frac{3}{2}N_A^2 - \frac{1}{6}N_A$
6	$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}$	$Q_6 = N_D N_A (2N_A - 1)$
7	$\mathbf{D} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{B}$	$Q_7 = 2N_A N_D^2$
9	$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}\mathbf{V}_0$	$Q_9 = N_A N_{\text{COND}} (2N_A - 1)$
10	$\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}\mathbf{X}_0$	$Q_{10} = 2N_A N_D N_{\text{COND}}$
Множественно выполняемые операции ($m - 1$)		
12	$\mathbf{D} = \mathbf{D} + \mathbf{Diag}$	$Q_{12} = N_D$
13	$\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_1$	$Q_{13} = \frac{8}{3}N_D^3 + N_D^2 \left(2N_{\text{COND}} - \frac{3}{2} \right) + N_D \left(N_{\text{COND}} - \frac{1}{6} \right)$
14	$\mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}\mathbf{\Sigma}_1$	$Q_{14} = 2N_A N_D N_{\text{COND}}$
16	$\mathbf{D} = \mathbf{D} - \mathbf{Diag}$	$Q_{16} = N_D$

Для получения пороговых значений параметров СЛАНУ, после которых предложенный алгоритм 3.10 эффективнее исходного алгоритма 3.8, выполнен ряд оценок по (3.15). Так, в таблице 3.5 приведены оценки при $N = 1000$, $N_A = 100, 500, 900$, $N_{\text{COND}} = 1, 2, 10$ и $m = 100, 200, \dots, 1000$.

Из результатов таблицы 3.5 следует ряд выводов. Для однократных вычислений, как и было показано ранее, алгоритм 3.10 неэффективен, что объясняется большими затратами, которые требуются для обращения блоков \mathbf{A} и \mathbf{D} . Данный алгоритм может быть неэффективен и для множественных вычислений. Так, при $N_A = 100$ для всех m и N_{COND} его затраты

приблизительно в 3 раза больше затрат алгоритма 3.8. Однако, для многократных вычислений при $N_A = 500$ ускорение составляет 2 раза. Наибольшие ускорения достигаются при $N_A = 900$ – 101 раз при $N_{COND} = 10$ и 134 раза при $N_{COND} = 1$.

Таблица 3.5 – Аналитические оценки ускорения по (3.15) при $N = 1000$

m	1	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$N_{COND} = 1$											
$N_A = 100$	0,31	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
$N_A = 500$	0,57	1,95	1,98	1,98	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99
$N_A = 900$	0,31	27,73	49,59	67,26	81,84	94,1	104,52	113,5	121,32	128,18	134,27
$N_{COND} = 2$											
$N_A = 100$	0,31	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
$N_A = 500$	0,57	1,95	1,97	1,98	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99
$N_A = 900$	0,31	27,56	48,98	66,1	80,1	91,75	101,6	110,05	117,37	123,77	129,42
$N_{COND} = 10$											
$N_A = 100$	0,32	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
$N_A = 500$	0,59	1,95	1,98	1,98	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99
$N_A = 900$	0,32	26,33	44,68	58,20	68,58	76,80	83,47	88,98	93,63	97,58	101,00

3.3.2 Изменение высоты диэлектрика

Выше рассмотрена специфика матрицы СЛАУ и её решение при изменении диэлектрика. Показано, что использование блочного LU-разложения позволяет сократить затраты времени на вычисление серии ёмкостных матриц МПЛП. При этом в матрице СЛАУ изменялись лишь диагональные элементы блока, соответствующего диэлектрическим границам.

Очевидно, что изменение некоторого параметра моделируемой структуры приводит к изменению лишь части элементов матрицы СЛАУ системы, а остальные элементы при этом остаются неизменными. Например, при моделировании в диапазоне параметров структуры возможно изменение не только ϵ_r , но и её размеров. Так, например, при оптимизации связанной линии передачи может изменяться толщина диэлектрика (h_C) между проводниками (рисунок 3.5a), где диапазон изменения h_C снизу ограничен величиной h , а сверху – суммой h и t (w и t – ширина и толщина проводников, s – расстояние между проводниками, h – толщина диэлектрической подложки, h_C – толщина диэлектрика между проводниками).

Из рисунка 3.5a видно, что есть 11 границ раздела двух сред: 8 на проводниках и 3 на диэлектриках. Подынтервалы, на которые разделены границы проводник-диэлектрик, пронумерованы от 1 до N_A , а границы диэлектрик-диэлектрик – от $N_A + 1$ до N . При изменении высоты границы раздела между воздухом и диэлектрической подложкой, находящейся между проводниками, изменяется только часть элементов матрицы, расположение которых

схематично показано на рисунке 3.5б. В этом случае $N_D = N_D^{\text{const}} + N_D^{\text{var}}$, т.е. N_D состоит из количества подынтервалов с постоянными и изменяющимися параметрами соответственно. При этом количество неизменяющихся элементов составляет $N^{\text{const}} = N_C + N_D^{\text{const}}$ и $N = N^{\text{const}} + N_D^{\text{var}}$. Далее N^{const} соответствует N_A , а $N_D^{\text{var}} - N_D$.

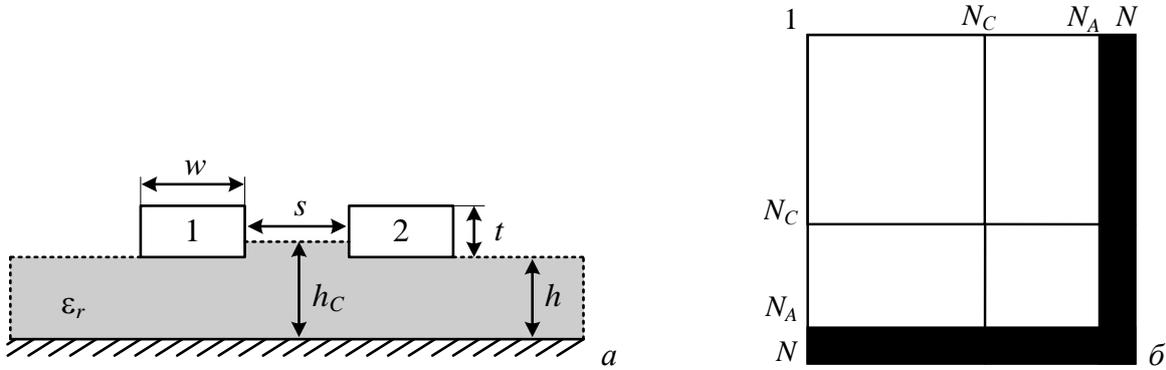


Рисунок 3.5 – Поперечное сечение связанной МПЛ (а) и схематичный вид структуры матрицы СЛАУ при изменении h_C (б) (для наглядности чёрным выделены строки и столбцы, содержащие изменяемые элементы)

В общем случае, перед основными вычислениями, для того чтобы изменяемые подынтервалы нумеровались последними, надо изменить последовательность нумерации границ анализируемой структуры (перенумерация рассмотрена в следующем подразделе). Тогда алгоритм вычисления серии ёмкостных матриц по аналогии с алгоритмом 3.10 может быть представлен как алгоритм 3.12 [651].

Алгоритм 3.12 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы \underline{C} с использованием блочного LU-разложения при изменении высоты диэлектрического слоя

- 1 Для k от 1 до m
- 2 **Если** $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$ (\mathbf{A} – блок размера $N_A \times N_A$)
- 6 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$ (\mathbf{X}_0 и \mathbf{V}_0 – блоки размера $N_A \times N_{\text{COND}}$)
- 7 $\mathbf{B}^k = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^k$ (\mathbf{B} – блок размера $N_A \times N_D$)
- 8 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k$ (\mathbf{D} – блок размера $N_D \times N_D$, $\mathbf{C} - N_D \times N_A$)
- 9 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^k \mathbf{X}_0$ (\mathbf{X}_1 и \mathbf{V}_1 – блоки размера $N_D \times N_{\text{COND}}$)
- 10 $\Sigma_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$ (Σ_1 – блок размера $N_D \times N_{\text{COND}}$)

- 11 $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}^k \Sigma_1^k$ (Σ_0 – блок размера $N_A \times N_{\text{COND}}$)
- 12 Вычислить элементы емкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 13 Вычислить элементы изменяющихся блоков \mathbf{B}^{k+1} , \mathbf{C}^{k+1} и \mathbf{D}^{k+1}
- 14 **Увеличить k**

Далее получены формулы для оценки арифметической сложности алгоритма 3.12 [652]. Для этого, как и ранее, использованы выражения (3.11)–(3.13). Полученные оценки приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Арифметическая сложность шагов алгоритма 3.12

№ шага	Действие	Арифметическая сложность (Q)
Однократно выполняемые операции		
5	$\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$	$Q_5 = \frac{8}{3} N_A^3 - \frac{3}{2} N_A^2 - \frac{1}{6} N_A$
6	$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$	$Q_6 = N_A N_{\text{COND}} (2N_A - 1)$
Множественно выполняемые операции		
7	$\mathbf{B}^k = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^k$	$Q_7 = N_D N_A (2N_A - 1)$
8	$\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k$	$Q_8 = 2N_A N_D^2$
9	$\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^k \mathbf{X}_0$	$Q_9 = 2N_A N_D N_{\text{COND}}$
10	$\Sigma_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$	$Q_{10} = \frac{8}{3} N_D^3 + N_D^2 \left(2N_{\text{COND}} - \frac{3}{2} \right) + N_D \left(N_{\text{COND}} - \frac{1}{6} \right)$
11	$\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}^k \Sigma_1^k$	$Q_{11} = 2N_A N_D N_{\text{COND}}$

Тогда для аналитической оценки ускорения решения СЛАУ относительно алгоритма 3.8 справедливо выражение

$$\beta_Q = \frac{m Q_{LU}}{(Q_5 + Q_6) + m(Q_7 + Q_8 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11})}. \quad (3.17)$$

С его помощью получены оценки ускорения вычислений (таблица 3.7) для $N = 1000, 2000, 3000$ и $m = 10, 20, \dots, 100$ при $N_A/N = 0,9; 0,99; 0,999$ и $N_{\text{COND}} = 2$. Количество СЛАУ m выбрано исходя из ограничения числа изменений матрицы значением t , которое ограничено типовыми значениями, в данном случае, от 5 до 105 мкм [653].

Из таблицы 3.7 видно, что итоговое ускорение слабо зависит от N (в рассматриваемом диапазоне). Наименьшее ускорение наблюдается при малых N_A . Так, при $N_A = 900$ ускорение увеличивается от 1,77 до 3,3 раза. Однако оно существенно возрастает при увеличении N_A и стремлении его к N . Так, при изменении N_A от 900 до 999 при $m = 100$ итоговое ускорение чуть более 23 раз. При этом по мере роста m от 10 до 100 ускорение существенно возрастает. Так, при $N_A = 900$ рост составляет 1,86 раза, а при $N_A = 999$ – 9,37 раза. Проведенный анализ показал, что

ключевыми параметрами, оказывающими влияние на общее время вычисления, являются размеры блока A и количество требуемых решений m .

Таблица 3.7 – Аналитические оценки ускорения многократного решения СЛАУ при использовании алгоритма 3.12

N	N_A	m									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1000	900	1,77	2,39	2,70	2,89	3,02	3,11	3,17	3,23	3,27	3,30
	990	2,40	4,49	6,31	7,92	9,35	10,63	11,78	12,83	13,78	14,64
	999	2,50	4,96	7,39	9,78	12,13	14,46	16,75	19,00	21,23	23,42
2000	1800	1,77	2,39	2,70	2,89	3,01	3,10	3,17	3,22	3,27	3,30
	1980	2,40	4,48	6,30	7,91	9,33	10,61	11,76	12,81	13,75	14,62
	1998	2,49	4,95	7,37	9,76	12,11	14,43	16,71	18,96	21,18	23,37
3000	2700	1,77	2,38	2,70	2,88	3,01	3,10	3,17	3,22	3,27	3,30
	2970	2,40	4,47	6,29	7,90	9,33	10,61	11,76	12,80	13,75	14,61
	2997	2,49	4,95	7,37	9,75	12,10	14,42	16,70	18,95	21,17	23,35

Отметим, что использование аналитических оценок итогового ускорения позволяет быстро и априорно оценить эффективность и целесообразность использования того или иного алгоритма. Поэтому далее оценено, при каких граничных значениях параметров решения целесообразно использование алгоритма 3.12. Согласно таблице 3.7 для m это значение составляет меньше 10, поэтому далее получены детальные оценки для $m < 10$. На рисунке 3.6 приведены полученные зависимости для $N = 1000$, из которого видно, что ускорение имеет место с $m = 4$ при $N_A = 999, 990, 900$ и наблюдается при уменьшении N_A до 700, несмотря на его стагнацию с ростом m .

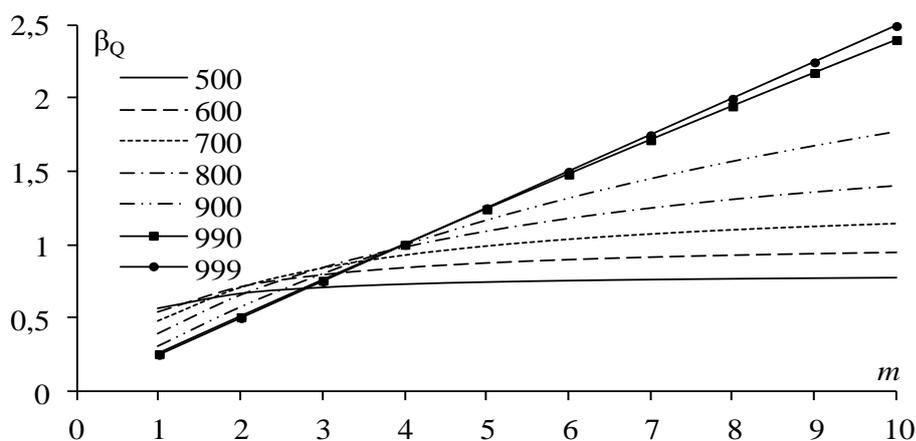


Рисунок 3.6 – Аналитические оценки ускорения за счет использования алгоритма 3.12

в зависимости от m для $N = 1000$ при изменении N_A от 500 до 999

3.3.3 Произвольное изменение геометрических параметров

Как было показано ранее, матрица \mathbf{S} состоит из блоков, разделённых по типу подынтервалов, соответствующих проводниковым и диэлектрическим границам (рисунок 3.1). Если при многовариантном анализе изменяемые элементы расположены в последних строках и столбцах матрицы \mathbf{S} (рисунок 3.5б), то возможно непосредственное применение блочного LU-разложения. Ситуация осложняется, когда требуется изменять параметр структуры, например толщину одного из проводников, приводящий к такому изменению элементов, что матрица не имеет структурированного вида, как схематично показано на рисунке 3.7 и, тем самым, становится невозможным использование описанных выше алгоритмов и требуется полный пересчет.

Для расширения применимости разработанных алгоритмов, далее использована перестановка строк и столбцов (переупорядочивание матрицы), что соответствует перенумерации подынтервалов. Так, при использовании перенумерации, матрица, как и раньше, делится на блоки, но теперь, в зависимости от изменения её элементов при многовариантном анализе (многократном решении СЛАУ). Количество неизменяемых элементов обозначим N_A . При использовании перенумерации, элементы матрицы \mathbf{S} , описывающие изменяющиеся подынтервалы, расположены в последних строках и столбцах матрицы \mathbf{S} . В результате матрица принимает вид, приведенный на рисунке 3.5б [654].

Для организации переупорядочивания (перенумерации), с помощью ассоциативного массива задаётся соответствие между номерами «старых» и «новых» сегментов. На примере МПЛ продемонстрируем работу алгоритма при изменении высоты проводника t (рисунок 3.7а).

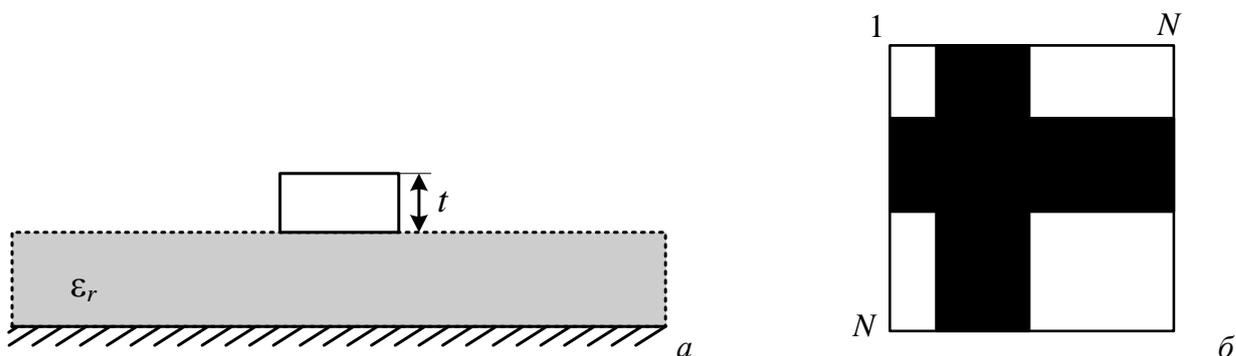


Рисунок 3.7 – Поперечное сечение МПЛ (а) и схематичный вид структуры матрицы СЛАУ при изменении t (б) (для наглядности чёрным выделены строки и столбцы, содержащие изменяемые элементы)

На рисунке 3.8а и рисунке 3.8б приведены исходные матрицы **S** для $t = 1$; и 1,5 мм соответственно при самой грубой сегментации (каждому интервалу соответствует один подынтервал), а на рисунках 3.8в и 3.8г – результирующие матрицы. Видно, что после перенумерации неизменяемые элементы группируются в блоке **A**.

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>8,2</td><td>1,2</td><td>5,4</td><td>1,2</td><td>1,2</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>5,6</td><td>6,0</td><td>0,7</td><td>4,2</td><td>0,8</td></tr> <tr><td>5,4</td><td>1,7</td><td>12,0</td><td>1,7</td><td>1,8</td><td>1,8</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,7</td><td>6,0</td><td>5,6</td><td>0,8</td><td>4,2</td></tr> <tr><td>-0,6</td><td>0,1</td><td>-1,0</td><td>0,1</td><td>-10,5</td><td>-0,2</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>-0,1</td><td>1,0</td><td>-0,1</td><td>0,2</td><td>-8,3</td></tr> </table> <p style="text-align: center;"><i>a</i></p>	8,2	1,2	5,4	1,2	1,2	1,2	4,5	5,6	6,0	0,7	4,2	0,8	5,4	1,7	12,0	1,7	1,8	1,8	4,5	0,7	6,0	5,6	0,8	4,2	-0,6	0,1	-1,0	0,1	-10,5	-0,2	0,6	-0,1	1,0	-0,1	0,2	-8,3	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>8,2</td><td>1,8</td><td>4,5</td><td>1,8</td><td>1,2</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>4,2</td><td>7,6</td><td>6,4</td><td>1,3</td><td>3,9</td><td>0,8</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>2,9</td><td>13,3</td><td>2,9</td><td>1,8</td><td>1,8</td></tr> <tr><td>4,2</td><td>1,3</td><td>6,4</td><td>7,6</td><td>0,8</td><td>3,9</td></tr> <tr><td>-0,6</td><td>0,0</td><td>-1,1</td><td>0,1</td><td>-10,5</td><td>-0,2</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>-0,1</td><td>1,1</td><td>0,0</td><td>0,2</td><td>-8,3</td></tr> </table> <p style="text-align: center;"><i>б</i></p>	8,2	1,8	4,5	1,8	1,2	1,2	4,2	7,6	6,4	1,3	3,9	0,8	4,5	2,9	13,3	2,9	1,8	1,8	4,2	1,3	6,4	7,6	0,8	3,9	-0,6	0,0	-1,1	0,1	-10,5	-0,2	0,6	-0,1	1,1	0,0	0,2	-8,3
8,2	1,2	5,4	1,2	1,2	1,2																																																																				
4,5	5,6	6,0	0,7	4,2	0,8																																																																				
5,4	1,7	12,0	1,7	1,8	1,8																																																																				
4,5	0,7	6,0	5,6	0,8	4,2																																																																				
-0,6	0,1	-1,0	0,1	-10,5	-0,2																																																																				
0,6	-0,1	1,0	-0,1	0,2	-8,3																																																																				
8,2	1,8	4,5	1,8	1,2	1,2																																																																				
4,2	7,6	6,4	1,3	3,9	0,8																																																																				
4,5	2,9	13,3	2,9	1,8	1,8																																																																				
4,2	1,3	6,4	7,6	0,8	3,9																																																																				
-0,6	0,0	-1,1	0,1	-10,5	-0,2																																																																				
0,6	-0,1	1,1	0,0	0,2	-8,3																																																																				
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>8,2</td><td>1,2</td><td>1,2</td><td>1,2</td><td>5,4</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>-0,6</td><td>-10,5</td><td>-0,2</td><td>0,1</td><td>-1,0</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,2</td><td>-8,3</td><td>-0,1</td><td>1,0</td><td>-0,1</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>4,2</td><td>0,8</td><td>5,6</td><td>6,0</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>5,4</td><td>1,8</td><td>1,8</td><td>1,7</td><td>12,0</td><td>1,7</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,8</td><td>4,2</td><td>0,7</td><td>6,0</td><td>5,6</td></tr> </table> <p style="text-align: center;"><i>в</i></p>	8,2	1,2	1,2	1,2	5,4	1,2	-0,6	-10,5	-0,2	0,1	-1,0	0,1	0,6	0,2	-8,3	-0,1	1,0	-0,1	4,5	4,2	0,8	5,6	6,0	0,7	5,4	1,8	1,8	1,7	12,0	1,7	4,5	0,8	4,2	0,7	6,0	5,6	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>8,2</td><td>1,2</td><td>1,2</td><td>1,8</td><td>4,5</td><td>1,8</td></tr> <tr><td>-0,6</td><td>-10,5</td><td>-0,2</td><td>0,0</td><td>-1,1</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,2</td><td>-8,3</td><td>-0,1</td><td>1,1</td><td>0,0</td></tr> <tr><td>4,2</td><td>3,9</td><td>0,8</td><td>7,6</td><td>6,4</td><td>1,3</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>1,8</td><td>1,8</td><td>2,9</td><td>13,3</td><td>2,9</td></tr> <tr><td>4,2</td><td>0,8</td><td>3,9</td><td>1,3</td><td>6,4</td><td>7,6</td></tr> </table> <p style="text-align: center;"><i>г</i></p>	8,2	1,2	1,2	1,8	4,5	1,8	-0,6	-10,5	-0,2	0,0	-1,1	0,1	0,6	0,2	-8,3	-0,1	1,1	0,0	4,2	3,9	0,8	7,6	6,4	1,3	4,5	1,8	1,8	2,9	13,3	2,9	4,2	0,8	3,9	1,3	6,4	7,6
8,2	1,2	1,2	1,2	5,4	1,2																																																																				
-0,6	-10,5	-0,2	0,1	-1,0	0,1																																																																				
0,6	0,2	-8,3	-0,1	1,0	-0,1																																																																				
4,5	4,2	0,8	5,6	6,0	0,7																																																																				
5,4	1,8	1,8	1,7	12,0	1,7																																																																				
4,5	0,8	4,2	0,7	6,0	5,6																																																																				
8,2	1,2	1,2	1,8	4,5	1,8																																																																				
-0,6	-10,5	-0,2	0,0	-1,1	0,1																																																																				
0,6	0,2	-8,3	-0,1	1,1	0,0																																																																				
4,2	3,9	0,8	7,6	6,4	1,3																																																																				
4,5	1,8	1,8	2,9	13,3	2,9																																																																				
4,2	0,8	3,9	1,3	6,4	7,6																																																																				

Рисунок 3.8 – Матрица **S** до и после перенумерации при $t = 1$ (*a*, *в*); и 1,5 (*б*, *г*) мм (изменяемые элементы отмечены фоном)

Тогда алгоритм 3.12 с учетом перенумерации пример вид алгоритма 3.13.

Алгоритм 3.13 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы **C с использованием блочного LU-разложения и перенумерации**

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3' Перенумеровать границы структуры так, чтобы изменяющиеся нумеровались последними
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$ (\mathbf{A} – блок размера $N_A \times N_A$)
- 6 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$ (\mathbf{X}_0 и \mathbf{V}_0 – блоки размера $N_A \times N_{\text{COND}}$)
- 7 $\mathbf{B}^k = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^k$ (\mathbf{B} – блок размера $N_A \times N_D$)
- 8 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k$ (\mathbf{D} – блок размера $N_D \times N_D$, $\mathbf{C} - N_D \times N_A$)

- 9 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^k \mathbf{X}_0$ (\mathbf{X}_1 и \mathbf{V}_1 – блоки размера $N_D \times N_{\text{COND}}$)
- 10 $\Sigma_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$ (Σ_1^k – блок размера $N_D \times N_{\text{COND}}$)
- 11 $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}^k \Sigma_1^k$ (Σ_0^k – блок размера $N_A \times N_{\text{COND}}$)
- 12 Вычислить элементы емкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 13 Вычислить элементы изменяющихся блоков \mathbf{B}^{k+1} , \mathbf{C}^{k+1} и \mathbf{D}^{k+1}
- 14 **Увеличить k**

При перенумерации формируется структура данных в виде ассоциативного массива, для реализации соответствия номеров интервалов изменяемых границ до и после перенумерации. Тогда сложность составляет N_G операций, где N_G – количество интервалов (границ) структуры. Для обратного соответствия формируется еще один ассоциативный массив, с такими же затратами. Также формируется массив для хранения «старых» индексов изменяемых подынтервалов (N_D операций) и массив для установления соответствия между «старыми» номерами подынтервалов и «новыми» (N операций). Таким образом, сложность алгоритма перенумерации оценивается выражением [655]

$$Q_3 = 3N_G + N + N_D.$$

Тогда выражение (3.17) за счет использования перенумерации примет вид

$$\beta_Q = \frac{mQ_{LU}}{(Q_5 + Q_6) + m(Q_7 + Q_8 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11}) + Q_3}. \quad (3.18)$$

Далее выполнена оценка затрат на формирование блоков матрицы \mathbf{S} . Затраты на первое формирование матрицы \mathbf{S} (шаг 3 алгоритма 3.13) совпадают с затратами на её формирование при использовании последовательного LU-разложения, т.е. $Q_3 = Q_S$, а затраты на переформирование блоков \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , на основании данных из пункта 1.3.1.4, оцениваются следующим выражением [656]

$$Q_{13} = \frac{1325}{3}(N^2 - N_A^2) + \frac{29}{3}NN_G + 11N + \frac{62}{3}N_G + \frac{49}{3}.$$

Тогда ускорение за счет использования алгоритма 3.13 оценивается следующим выражением (затраты Q_4 и Q_{12} не учитывались ввиду их малости)

$$\beta_Q = \frac{m(Q_{LU} + Q_S)}{Q_3 + Q_3 + Q_5 + Q_6 + m \sum_{i=7}^{11} Q_i + (m-1)Q_{13}}.$$

3.4 Гибридизация прямого и итерационного методов

Рассмотрим возможное совершенствование алгоритмов 3.11, 3.12 и 3.13, на примере алгоритма 3.10 (частный случай алгоритма 3.11 при наличии в структуре плоскости земли). Для этого действие на шаге 13 перепишем в виде $\mathbf{D}^k \boldsymbol{\Sigma}_1^k = \mathbf{X}_1$. Тогда для решения данной системы можно воспользоваться LU-разложением матрицы \mathbf{D}^k с последующим решением N_{COND} раз с разными правыми частями, состоящими из столбцов матрицы \mathbf{X}_1 . Далее алгоритм 3.10 с учетом этих изменений будем называть алгоритм 3.10-У1. При этом вычислительная сложность шага 13 алгоритма 3.10 вместо

$$Q_{13} = \frac{8}{3} N_D^3 + N_D^2 \left(2N_{\text{COND}} - \frac{3}{2} \right) + N_D \left(N_{\text{COND}} - \frac{1}{6} \right)$$

будет

$$Q_{13} = \frac{1}{6} (4N_D^3 + 3N_D^2 (4N_{\text{COND}} + 1) - N_D (6N_{\text{COND}} + 1)).$$

При этом общая вычислительная сложность алгоритма 3.10-У1 также изменится.

Еще раз рассмотрим шаг 13 алгоритма 3.10-У1, т.е. СЛАУ вида $\mathbf{D}^k \boldsymbol{\Sigma}_1^k = \mathbf{X}_1$, при неком значении k . Для её решения воспользуемся итерационным методом. Поскольку СЛАУ, в общем случае, состоит из N_{COND} правых частей, то используем блочный метод, например, BI-BiCGStab [657]. Алгоритм 3.10-У1, в котором используется итерационное решение СЛАУ на шаге 13, далее называется алгоритмом 3.10-У2 [658]. Тогда вычислительные затраты на шаг 13 пропорциональны произведению требуемого числа итераций и квадрата порядка решаемой СЛАУ и оцениваются как

$$10N_D^2 N_{\text{COND}} (2 + N_{it}).$$

3.5 Математические модели для многократного вычисления ёмкостной матрицы проводных и полосковых структур методом моментов

Для пояснения модификации исходной математической модели вычисления ёмкостной матрицы двумерной структуры проводников и диэлектриков методом моментов (см. пункт 1.3.1.4) в диапазоне изменения её параметров, запишем её в виде

$$\underline{\mathbf{C}}_i = F(x_i, y_i, z_i, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $\underline{\mathbf{C}}_i$ – ёмкостная матрица, соответствующая значениям варьируемых параметров x_i, y_i, z_i, \dots , а m – общее количество этих вариаций. Тогда с использованием разработанных в данном

подразделе алгоритмов многократного решения СЛАУ конкретным итерационным методом эта модель может быть представлена в виде

$$\underline{C}_i = F(x_i, y_i, z_i, \dots, O, N_M, K, tol),$$

где O – параметр, определяющий порядок вычисления серии требуемых ёмкостных матриц (решения последовательности СЛАУ); N_M – порядковый номер матрицы СЛАУ, используемой для вычисления предобусловливателя, K – критерий переформирования предобусловливателя и tol – параметр, задающий требуемую точность решения СЛАУ. Очевидно, что дополнительные параметры не изменяют сути вычисления ёмкостной матрицы, а лишь ускоряют этот процесс, за счет совершенствования этапа решения СЛАУ с контролируемой точностью.

При использовании алгоритмов многократного решения СЛАУ с использованием блочного LU-разложения исходная модель представляется в виде

$$\underline{C}_i = F(x_i, y_i, z_i, \dots, N_{INT}),$$

где N_{INT} – параметр, определяющий список изменяемых границ структуры. Очевидно, что при использовании гибридного метода, представленные модели могут быть использованы совместно. Кроме того, эти модели без изменений могут быть использованы и для многократного вычисления матрицы \mathbf{G} (при изменении электрофизических и геометрических параметров структуры).

3.6 Основные результаты раздела

Разработаны алгоритмы для решения последовательности СЛАУ с изменяемой матрицей при анализе полосковых структур. Для решения СЛАУ предложено учитывать специфику изменений в матрице для уменьшения затрат времени (ускорения) при использовании прямого и итерационных методов, а также их совместной реализации (гибридный метод).

При разработке алгоритмов на основе итерационных методов предложено 2 способа уменьшения затрат времени: использование для всей последовательности СЛАУ предобусловливателя, вычисленного из первой матрицы; использование результата решения предыдущей СЛАУ в качестве начального приближения для решения текущей. Для повышения эффективности использования предобусловливателя предложены 3 условия его переформирования (перевычисления) в ходе решения последовательности СЛАУ: по заданному порогу количества итераций; по увеличению среднего арифметического времени и средней арифметической сложности решения СЛАУ. Также разработаны алгоритмы решения серии

СЛАУ с выбором очередности их решения и матрицы для вычисления предобусловливателя (используемого для решения всей последовательности).

Рассмотрено 2 частных случая, приводящих к частичному изменению значений элементов матрицы СЛАУ: изменение относительной диэлектрической проницаемости и высоты диэлектрика структуры. Это позволило, за счёт использования прямого метода решения СЛАУ и перенумерации интервалов структуры, разработать общий алгоритм многократного вычисления ёмкостной матрицы при изменении параметров структуры. Далее, за счёт ранее разработанных алгоритмов, предложен гибридный метод вычисления.

На основе полученных результатов предложены 3 математические модели для многократного вычисления ёмкостной матрицы (а также матрицы \mathbf{G}) полосковой структуры в диапазоне изменения её геометрических и электрофизических параметров.

4 СОЗДАНИЕ ПРОГРАММ ДЛЯ АНАЛИЗА РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ С УМЕНЬШЕННЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ ЗАТРАТАМИ

На основании результатов разделов 2 и 3 разработано ПО, предназначенное для уменьшения вычислительных затрат на анализ элементов РЭС. Часть этого ПО вошла в состав комплекса программ «Система моделирования электромагнитной совместимости TALGAT» (далее система TALGAT) [659–675] путем совершенствования имеющихся и разработки новых модулей. Вторая часть реализована как в виде отдельных приложений, так и интегрирована в TALGAT [676–680], а третья в виде отдельного комплекса программ [681–689].

4.1 Программы для итерационного решения СЛАУ

Разработаны программы для итерационного решения СЛАУ, написанные на языке C++ и логически объединенных в программные модули. Для разработки использована среда MSVS 2013. На рисунке 4.1 приведена функциональная схема разработанного комплекса программ.

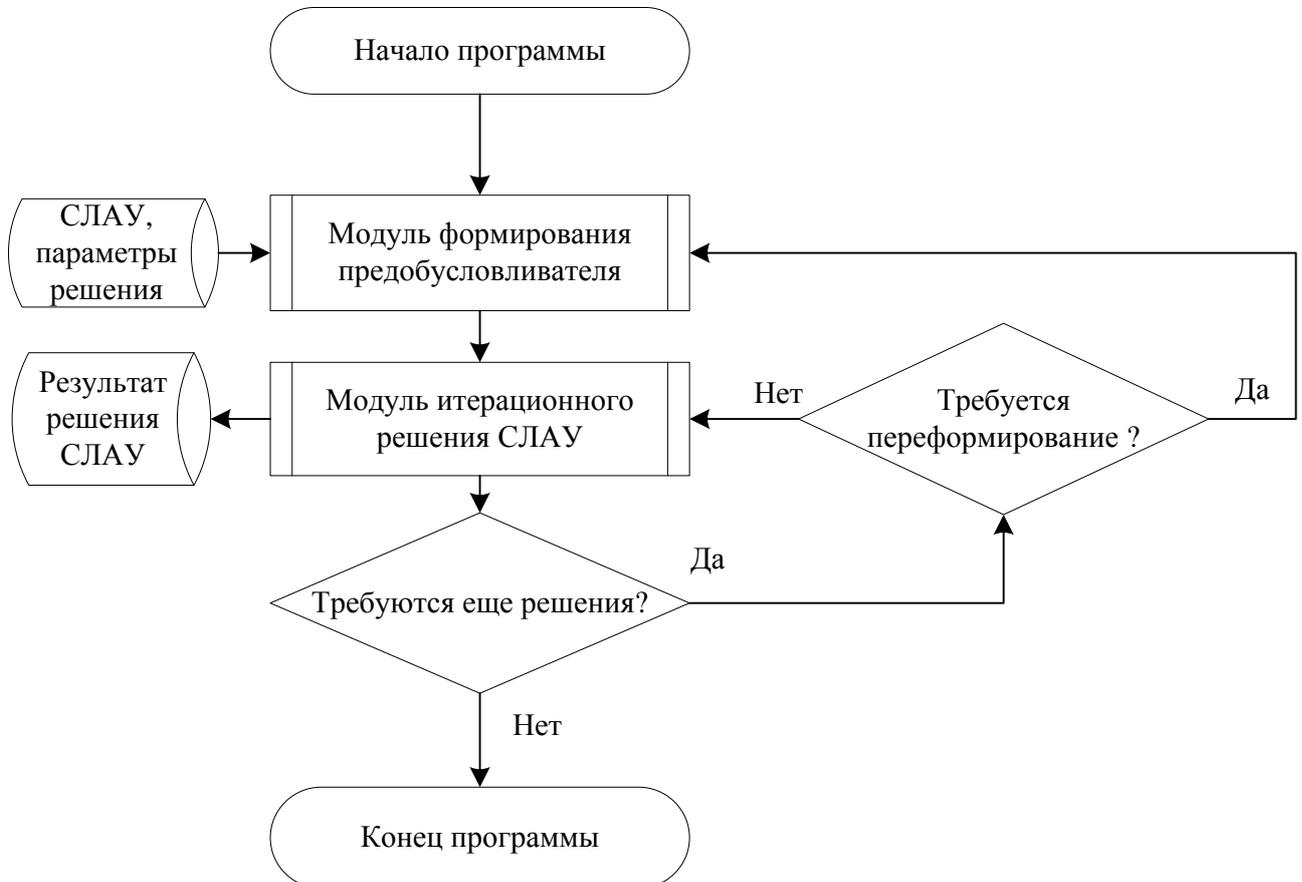


Рисунок 4.1 – Функциональная схема комплекса программ

Входными данными являются СЛАУ, сформированные, например, в системе TALGAT и хранящиеся текстовом формате. Загрузка осуществляется с помощью программы LoadMatrix. После загрузки матрицы вычисляется предобусловливатель из матрицы согласно выбранному сценарию. Здесь под сценарием подразумеваются однократное или многократное решения СЛАУ. Так, при однократном решении предобусловливатель вычисляется из загруженной матрицы, а при многократном – из матрицы, номер которой определяется выбранным алгоритмом. Далее СЛАУ решается выбранным итерационным методом (BiCGStab или CGS). Если текущая СЛАУ не является последней, то производится загрузка очередной матрицы. Также, по мере многократного решения СЛАУ, на основании полученных данных и выбранного алгоритма определяется необходимость переформирования предобусловливателя.

Для реализации модуля вычисления предобусловливателя использован алгоритм из рисунка 2.15 (с использованием разреженного строчного формата и двух временных массивов). Его параметры: N – порядок матрицы (тип данных int); **aelem_MatrM** – одномерный массив ненулевых элементов исходной матрицы (тип double); **jptr_MatrM** – одномерный массив указателей на ненулевые элементы матрицы (тип int); **iptr_MatrM** – одномерный массив указателей на начало очередной строки исходной матрицы (тип int); **UdiagM** – одномерный массив указателей на диагональные элементы (тип int). Результатом работы модуля является вычисленный с помощью $ILU(0)$ -разложения предобусловливатель.

Модуль итерационного решения даёт решение с помощью выбранного пользователем метода. Параметры процедур итерационных методов: **A** – двумерный массив исходной матрицы (тип double); **ALU** – двумерный массив предобусловливателя, вычисленного с помощью $ILU(0)$ -разложения (тип double); N – порядок матрицы (тип int); tol – требуемая точность вычислений (тип double); $Nitmax$ – максимальное количество итераций (тип int). Результатом работы модуля является **x** – одномерный массив, содержащий вектор решения СЛАУ (тип double) и требуемое количество итераций *NumIter* (тип double).

При многократном решении СЛАУ пользователь до начала вычислений определяет используемый алгоритм. Далее приведены блок-схемы алгоритмов многократного решения СЛАУ с переформированием предобусловливателя по порогу количества итераций (рисунок 4.2), увеличению среднего арифметического времени решения (рисунок 4.3) и средней арифметической сложности решения (рисунок 4.4). Блок-схемы для алгоритмов с выбором очередности решения и матрицы для вычисления предобусловливателя приведены на рисунке 4.5.

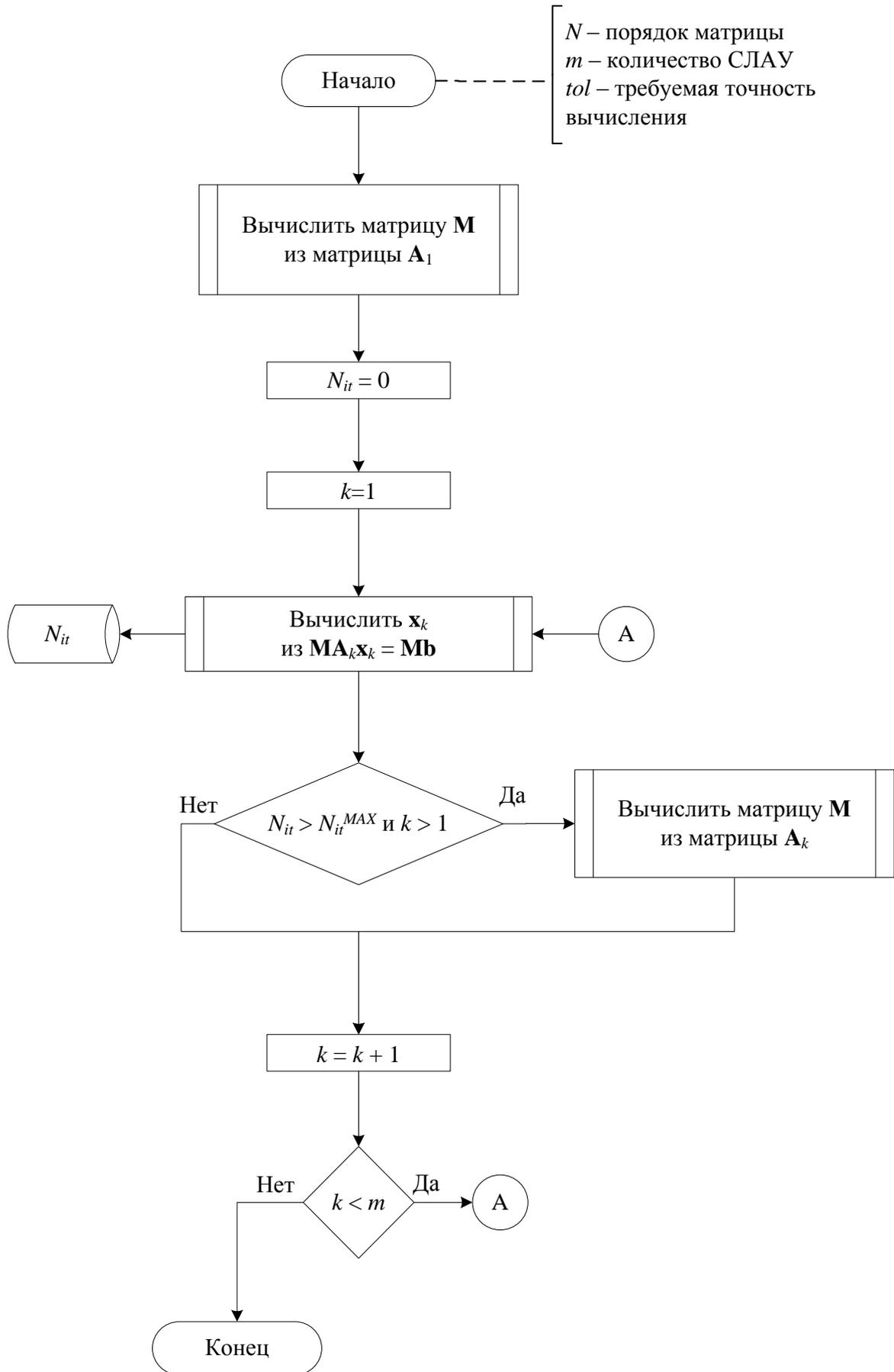


Рисунок 4.2 – Решение последовательности СЛАУ с преобразованием предобусловливателя по порогу количества итераций

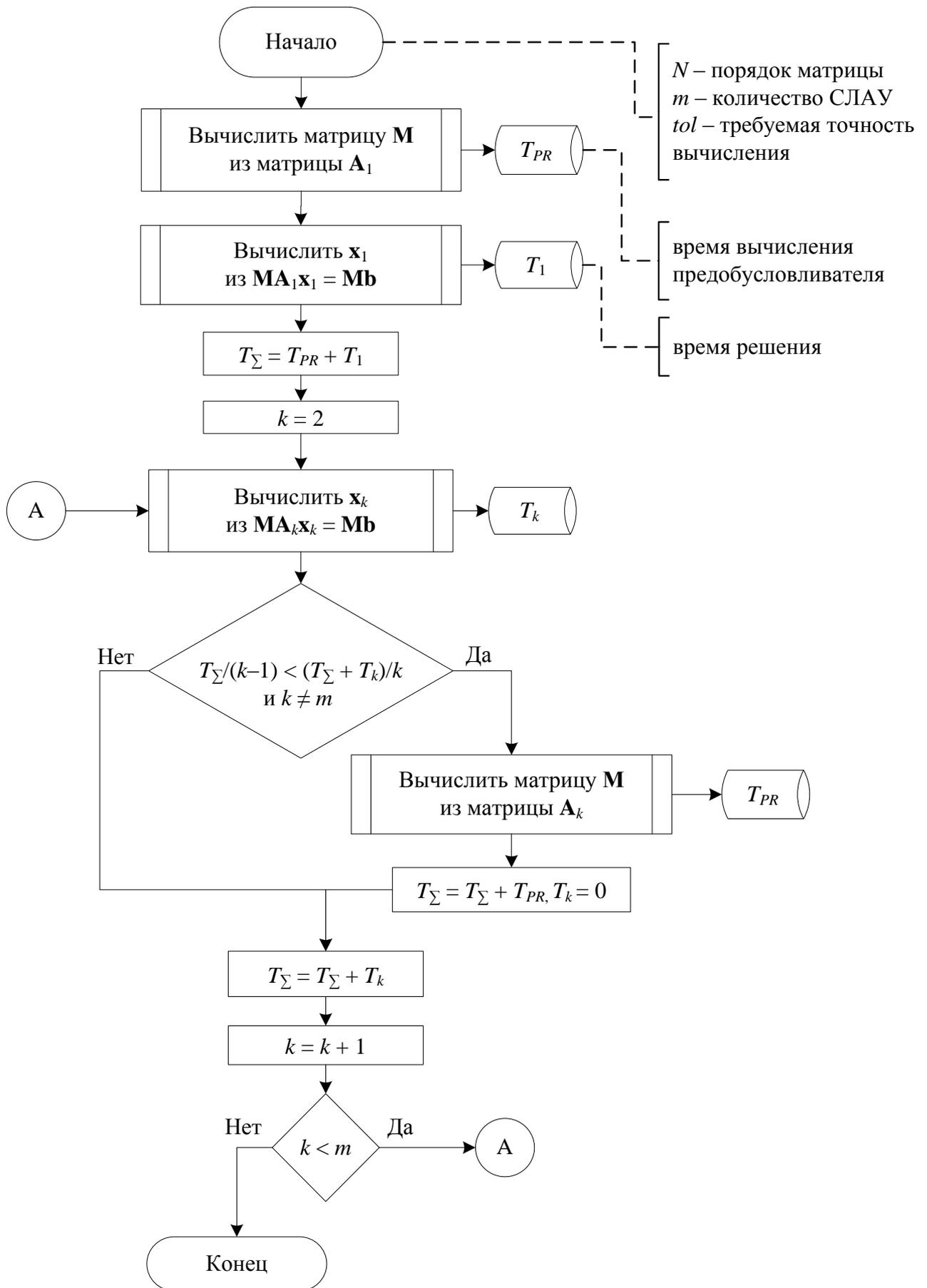


Рисунок 4.3 – Решение последовательности СЛАУ с преобразованием предобусловливателя по увеличению среднего арифметического времени решения

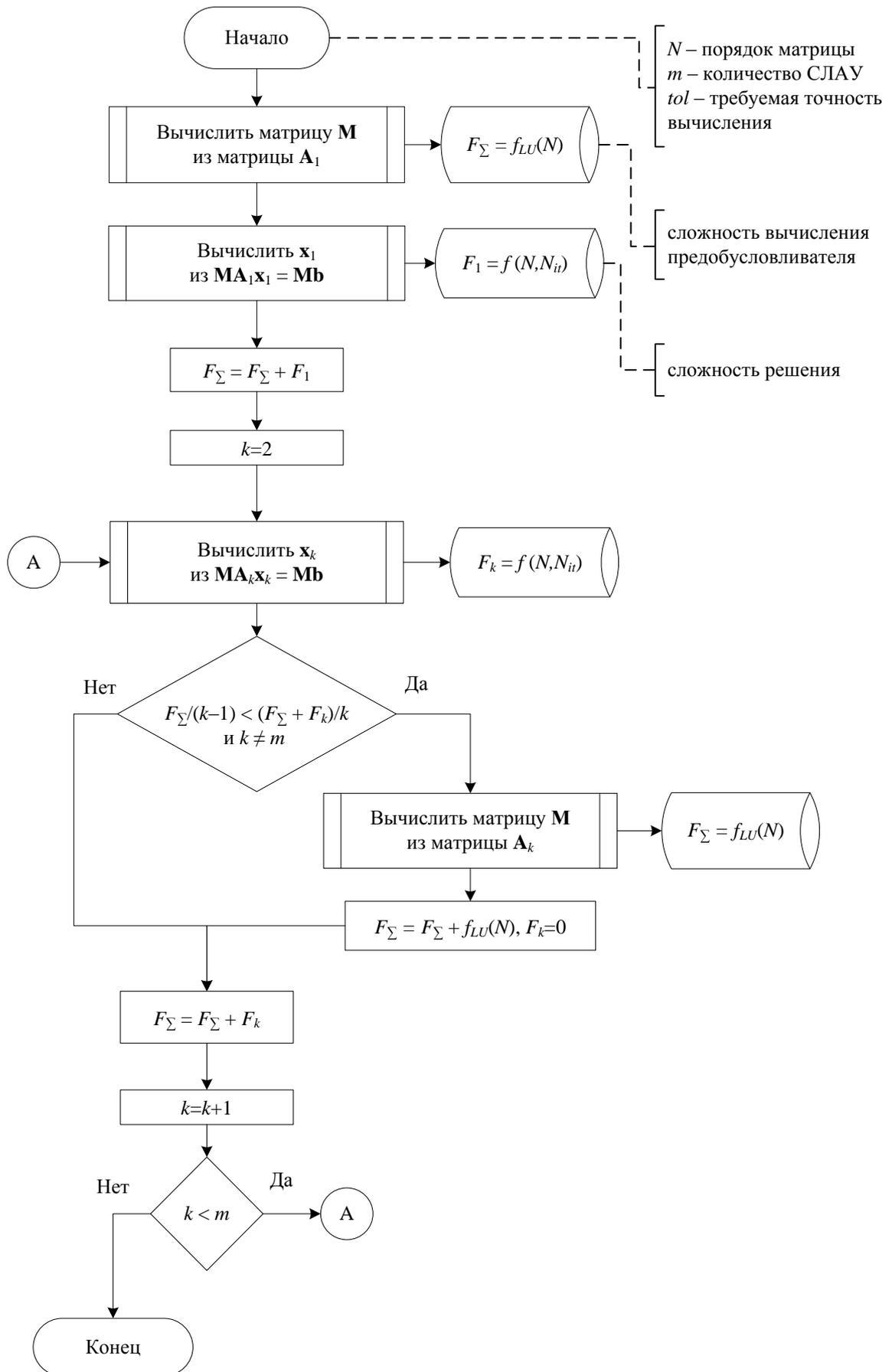
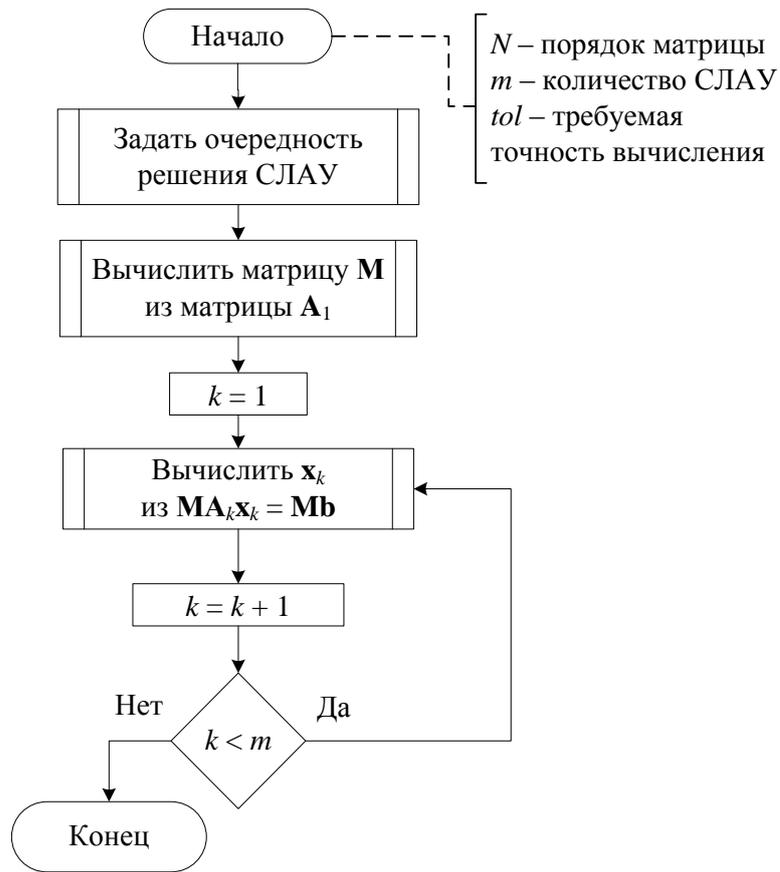
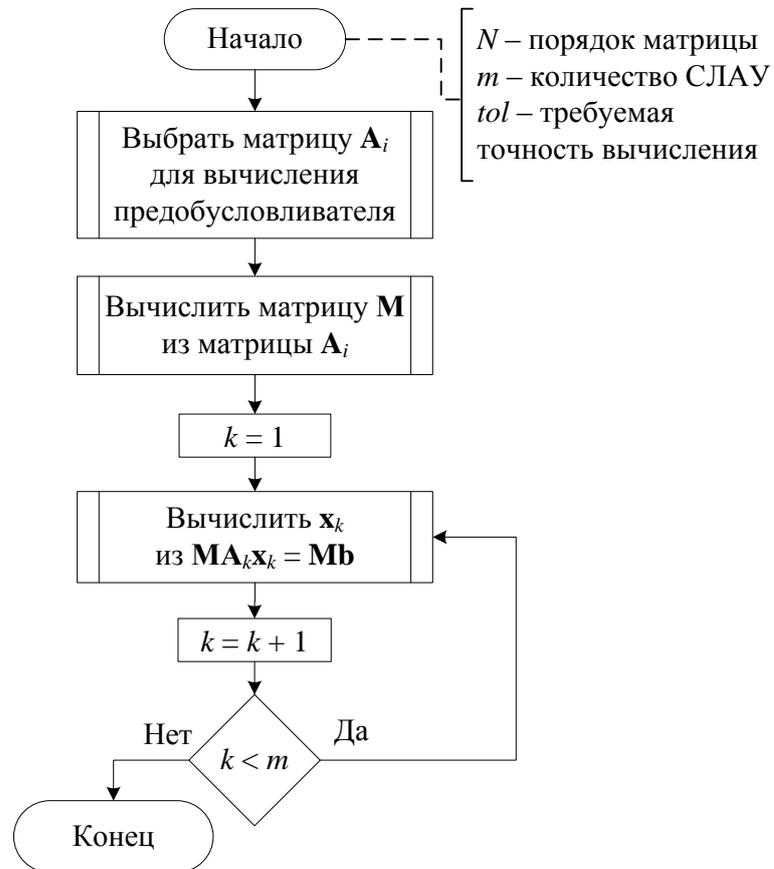


Рисунок 4.4 – Решение последовательности СЛАУ с переформированием предобусловливателя по увеличению средней арифметической сложности решения



a



б

Рисунок 4.5 – Решение последовательности СЛАУ с выбором очередности решения (a) и матрицы для вычисления предобусловливателя (б)

4.2 Система TALGAT

4.2.1 Функциональные возможности

Система TALGAT базируется на математических моделях на основе МоМ (практически все вычисления сведены к матричным операциям) и разрабатывается с 2002 г. на базе собственных научных исследований её авторов с использованием языка программирования C++. Системе присуща модульная архитектура, позволяющая при разработке нового модуля использовать все ранее реализованные возможности системы.

Для ясности изложения далее приведены краткие сведения и функциональные возможности системы TALGAT (без учёта разработок автора). Система предназначена для компьютерного моделирования различных задач ЭМС с использованием: вычисления откликов схем из отрезков МППП произвольной сложности на основе вычисления матриц погонных параметров двумерных и трехмерных структур из проводников и диэлектриков; электродинамического анализа структур из проводов с RLC-нагрузками; структурно-параметрической оптимизации с указанными видами анализа.

Одной из особенностей системы TALGAT является возможность задания большого количества параметров для возможности проведения различного рода исследований с её использованием, что делает её очень гибкой. При этом практически все параметры имеют значения по умолчанию, что позволяет избежать долгих и рутинных расчётов по выявлению их значений и сразу приступить к использованию системы и вычислениям в ней. Это особенно критично при использовании системы новыми исследователями и в образовательных целях.

Система TALGAT включает следующие модули [225]: вычислительные для двумерных и трехмерных структур проводников и диэлектриков с произвольными границами (MOM2D, MOM3D), трехмерных проводных структур (MOMW); оптимизации с помощью генетических алгоритмов (GA) и эволюционных стратегий (ES); утилит (UTIL); интерпретации инфиксных выражений (INFIX); расширений (TLX). Также включены графический интерфейс пользователя (VisualClient), программа для управления системой из командной строки (BasiClient) и ядро системы (TLCORE). В программе VisualClient реализована возможность использования DHTML диалогов. Для «общения» пользователя с системой используется интерпретируемый скриптовый язык TALGAT_Script, использующий префиксную запись выражений.

В системе TALGAT матрицы относятся к типу данных matrix. При этом вещественные матрицы (тип данных double) номинально обозначаются как тип real_matrix, а комплексные

матрицы (типа данных `complex`) – `complex_matrix`. Если команда требует параметр типа `matrix`, то ей можно передавать параметры типа `real_matrix` или `complex_matrix`. Если команда явно требует параметр типа `real_matrix`, то ей нельзя передавать параметр типа `complex_matrix`, и наоборот. Индексация столбцов и строк матриц в системе начинается с нуля (C/C++ подобный синтаксис). Векторы в системе представляются матрицами с одной строкой.

4.2.2 Модуль матричных операций

С учётом требований системы TALGAT и полученных результатов, разработан модуль матричных операций MATRIX, который предназначен для выполнения различных операций над матрицами, решения СЛАУ прямыми и итерационными методами с возможностью задания различных параметров метода, требуемой точности решения и параметров для вычисления предобусловливателя.

4.2.2.1 Прямые методы решения СЛАУ

Кратко опишем особенности использования прямых методов для однократного решения СЛАУ. Сначала в системе TALGAT инициализируется матрица, например `real_m` для вещественного случая и `complex_m` для комплексного случая. Далее инициализируется вектор свободных членов: `right_r` и `right_c` для действительного и комплексного случаев соответственно. Далее производится присвоение элементам матрицы и вектора свободных членов необходимых значений, после этого можно запускать команды решения СЛАУ. Так, пример использования метода Гаусса в системе TALGAT будет иметь вид: для вещественных матриц **SET "solve" GE_r real_m right_r**; для комплексных – **SET "solve" GE complex_m right_c**.

Далее приведены примеры использования только для случая вещественных матриц (вариант для комплексных матриц аналогичен методу Гаусса). При необходимости использования метода Гаусса с перестановками (частичное упорядочивание по столбцам) можно воспользоваться командой: **SET "solve" PGE_r real_m right_r**.

Реализована еще одна из модификаций метода Гаусса, предложенная Жорданом, позволяющая получить решение с помощью только прямого хода. Для использования данного метода необходимо воспользоваться командами: без выбора ведущего элемента (**SET "solve" GJE_r real_m right_r**); с частичным упорядочиванием по столбцам (**SET "solve" PGJE_r real_m right_r**).

Также реализовано LU-разложение матриц. Для представления исходной матрицы в виде произведения двух матриц, хранящихся на месте исходной (при единичной диагонали нижней треугольной матрицы) разработана команда: **SET "solve" LU_FACT_r real_m**

При необходимости решения СЛАО с помощью LU-разложения, в системе реализовано несколько команд: без выбора ведущего элемента (**SET "solve" LU_SOLVE_r LU_FACT_r real_m right_r**); с частичным упорядочиванием по столбцам (**SET "solve" PLU_r r real_m right_r**); с частичным упорядочиванием по строкам (**SET "solve" LUP_r r real_m right_r**). Также в системе предусмотрена возможность обращения матриц с помощью LU-разложения: **SET "solve" LU_INV_r real_m**.

Все реализованные и описанные методы используются, как правило, когда матрица является несимметричной. Как известно, существует модификация метода Гаусса, учитывающая симметрию матрицы. Данный метод носит название разложение Холецкого. Для его использования в системе необходимо воспользоваться командой: **SET "solve" CHOL_SOLVE_r CHOL_FACT_r real_m right_r**.

4.2.2.2 Итерационные методы решения СЛАО

Для удобства описания, первоначально приведем список аргументов команд реализующих итерационные методы (однократного) решения СЛАО.

Первые 2 параметра – это матрицы СЛАО и правой части. Требуемое начальное приближение решения является параметром 3, требуемая точность решения (tol) – параметром 4, а максимальное количество итераций (N_{it}^{max}) – параметром 5. Если используется метод GMRES, то необходимо, чтобы пользователь определил размерность m (параметр 6).

Параметр 7 определяет, с каким типом предобусловливания использовать метод: **None** – использование метода без предобусловливания; **LUld** – полное LU-разложения в сочетании с предфильтрацией (1.46); **LUdm** – (1.47); **LUinr** – (1.48); **LUdmr** – (1.49); **LUnr** – (2.1); **LUnm** – (2.2); **LUind** – (2.3); **LUdmd** – (2.4); **LUddm** – с усовершенствованной предфильтрацией (1.47); **LUkm** – с выбором структуры разреженности, основанном на нахождении k максимальных элементов в каждом столбце. При использовании $ILU(0)$ - и $ILU(p)$ -разложений команды имеют аналогичный синтаксис (например, **ILU0ld** – $ILU(0)$ -разложение с предфильтрацией (1.46), и **ILUpnr** – $ILU(p)$ -разложение с предфильтрацией (2.1)). Также реализована возможность использования диагонального, блочно-диагонального и ленточного предобусловливателей.

Вспомогательный параметр для определения структуры (портрета) разреженности матрицы предобуславливания (порог ε , допуск обнуления τ или число максимальных элементов в столбце) определяется значением параметра 8. Параметр 9 задается только тогда, когда используется $ILU(p)$ -разложение и определяет значение параметра p для разложения.

Пример использования метода $GMRES(m)$ с вращениями Гивенса: **SET "solve" GMRES_r real_m right_r 0. 1.e-8 150 15 LUnr 1.e-4.**

Приведем примеры использования других реализованных в системе итерационных методов. Команды этих методов имеют одинаковые аргументы. Рассмотрим их на примере метода BiCG. Первые 5 параметров метода совпадают с аналогичными параметрами метода GMRES. Далее задается тип предобуславливания, вспомогательный параметр для определения структуры разреженности матрицы предобуславливания и значение параметра p . Пример использования метода BiCG: **SET "solve" BICG_r real_m right_r 0. 1.e-8 250 ILU0dm 1.e-4.** Аналогичные команды реализованы для методов BiCGStab (**BICGSTAB_r**), QMR (**QMR_r**), CGS (**CGS_r**), а также CG (**CG_r**) для СЛАУ с симметричной и положительно определенной матрицей.

4.2.2.3 DHTML диалоги

Для более удобного использования методов решения СЛАУ в системе предусмотрена возможность их применения с помощью DHTML диалогов, в том числе с учётом возможности использования системы в образовательных целях. Стартовый диалог приведен на рисунке 4.6. Видно, что пользователь может задать, какой метод ему использовать.

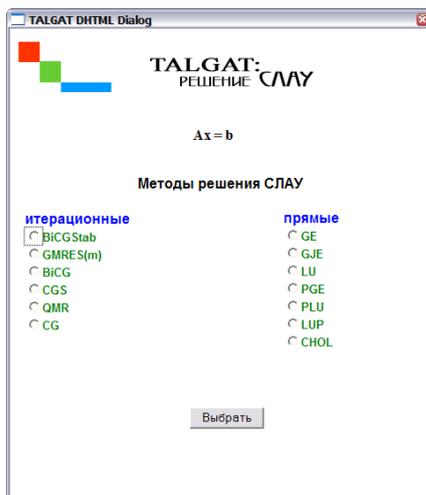


Рисунок 4.6 – Стартовый DHTML диалог при выборе метода решения СЛАУ

Рассмотрим дальнейшие действия при выборе, например, метода Гаусса-Жордана (GJE). После выбора метода и нажатия кнопки «Выбрать» будет вызван второй диалог, приведенный

на рисунке 4.7а. После задания имен матрицы и правой части и нажатия кнопки «START_GJE» на экране появится найденное решение. Диалоги остальных прямых методов аналогичны описанному выше.

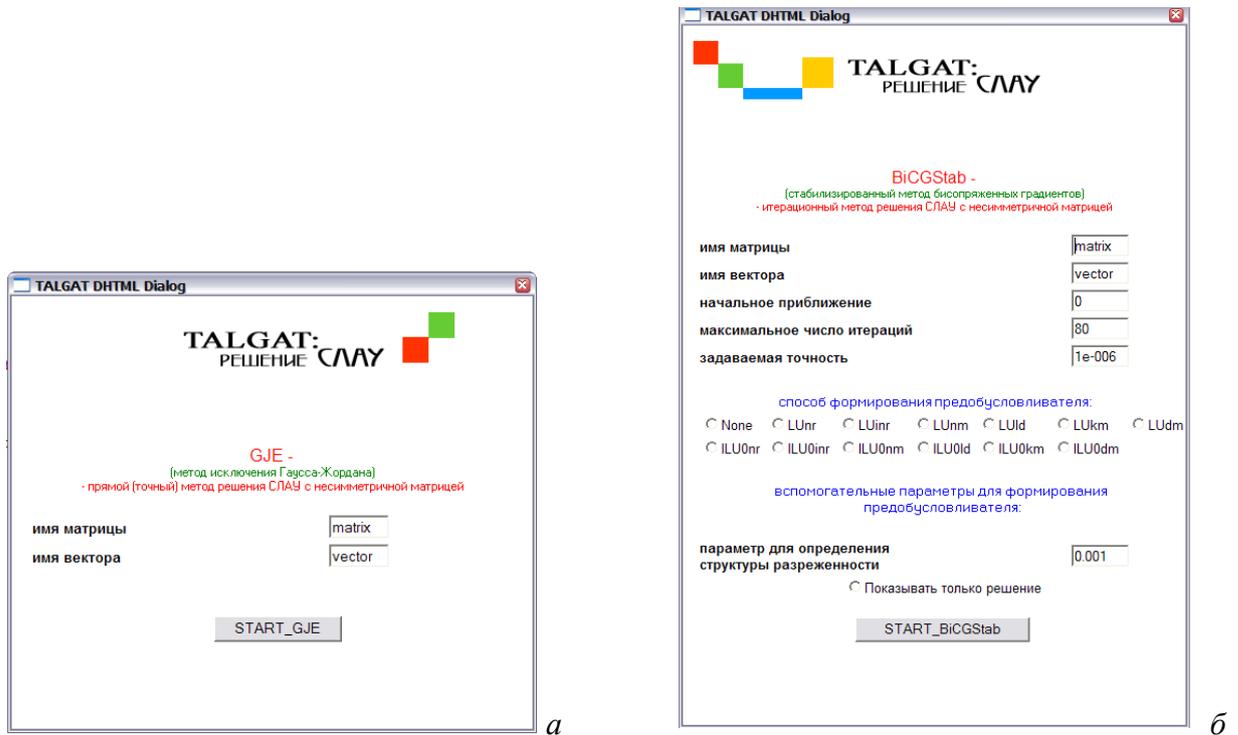


Рисунок 4.7 – DHTML диалог решения СЛАУ методами Гаусса-Жордана (а) и BiCGStab (б)

Рассмотрим случай, когда в стартовом диалоге выбирается итерационный метод BiCGStab. После выбора метода в стартовом диалоге и нажатия кнопки «Выбрать» будет вызван диалог, показанный на рисунке 4.7б. После задания имен матрицы СЛАУ и правой части, а также параметров метода и решения, и нажатия кнопки «START_BiCGStab» на экране появится найденное решение. Диалоги других методов аналогичны рассмотренному.

4.2.2.4 Визуализация матриц

При вычислении предобусловливателя важен выбор структуры (портрета) разреженности. Для визуальной оценки выбранной структуры в системе предусмотрена возможность визуализации матриц. Элементы, абсолютные значения которых ниже предписанного порога (обнуляемые), отображаются белым цветом, а выше – черным. Для использования этой возможности необходимо задать: матрицу, которую необходимо отобразить, способ выбора структуры разреженности: **ld** – использование предфильтрации (1.46); **dm** – (1.47); **inr** – (1.48); **dmr** – (1.49); **nr** – (2.1); **nm** – (2.2); **ind** – (2.3); **dmd** – (2.4); **ddm** – усовершенствованной предфильтрации (1.47); **km** – предфильтрации, основанной на нахождении k максимальных элементов в каждом столбце. Третьим параметром необходимо задать вспомогательный

параметр для определения структуры разреженности матрицы предобусловливания: порог/допуск обнуления или число максимальных элементов в столбце.

Пример визуализации матрицы, после предфильтрации в системе TALGAT: **DRAW_MATRIX_r real_m nm 1.e-4**. На рисунке 4.8 приведен пример визуализация матрицы (321 × 321) для линейной антенны «чайка».

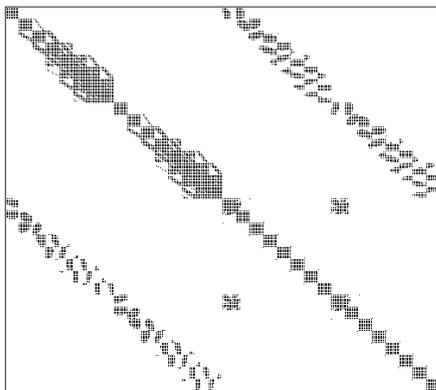


Рисунок 4.8 – Визуализация матрицы в системе TALGAT на примере антенны «чайка»

При необходимости визуальной оценки вычисленной матрицы предобусловливания можно воспользоваться специально реализованными командами. После задания матрицы для отображения, необходимо задать способ формирования матрицы предобусловливания и порог/допуск обнуления или максимальное число элементов в каждом столбце. Пример визуализации матрицы предобусловливания: **DRAW_PRECOND_MATRIX_r real_m LU nm 1.e-4**.

4.2.2.5 Обоснование выбора матричной библиотеки

На примере тестовых задач выполнено сравнение нескольких бесплатно распространяемых библиотек линейной алгебры. Это сделано для внедрения наиболее эффективной из них в систему TALGAT для последующей реализации с помощью её функций разработанных алгоритмов многократного решения СЛАУ.

В последние годы активно создаются и внедряются математические библиотеки, реализующие параллельные алгоритмы матричных операций. При этом для повышения производительности программного кода используется не только распараллеливание и другие вычислительные процедуры, но и различные режимы компиляции. Таким примером является библиотека Intel MKL, распространяемая на коммерческой основе [411]. Другая, но уже бесплатно распространяемая, библиотека ATLAS позволяет достичь высокой производительности путем оптимизации программного кода в ходе компиляции под используемую рабочую станцию [690]. Еще одна свободно распространяемая библиотека Eigen

реализует использование параллелизации кода в сочетании с технологией OpenMP, а также поддержку инструкций семейства SSE (технологии, позволяющей расширить возможности процессора) [410]. Также стоит упомянуть исторически появившуюся первой бесплатную библиотеку LAPACK [691], а также коммерческую библиотеку AOCL, разработанную корпорацией AMD [692].

Далее приведены результаты, полученные на двух PC, параметры которых приведены в таблице 4.1, при $N = 1000, 2000, \dots, 10000$ с использованием компилятора MSVS 2008 при двух наборах ключей компиляции: «А» – разрешена только оптимизация кода компилятором; «В» – оптимизация компилятора с поддержкой инструкций SSE2 и многопоточности (OpenMP) [693, 694].

Время вычисления при изменении порядка СЛАУ для наборов ключей компиляции «А» и «В» приведено на рисунке 4.9. Использование библиотеки Eigen при наборе ключей компиляции «А» приводит к наибольшим временным затратам по сравнению с другими библиотеками вне зависимости от используемой PC. При наборе ключей «В» наблюдается обратная ситуация: использование библиотеки Eigen приводит к наименьшим временным затратам. Таким образом, можно сделать вывод, что из рассмотренных библиотек выбор Eigen является оптимальным (по критерию минимальных затрат времени) в совокупности с компилятором, поддерживающим выполнение вычислений согласно инструкций SSE2, и многоядерной PC. Далее выполнены тестовые вычисления с использованием еще двух дополнительных наборов ключей (оптимизация и поддержка вычислений с использованием инструкций SSE2; оптимизация и поддержка многопоточности согласно OpenMP) выявили, что эффективность этой библиотеки, главным образом определяется возможностью совместного использования оптимизации и инструкций SSE2.

Таблица 4.1 – Характеристики используемых рабочих станций (PC)

PC	Процессор	Тактовая частота процессора, ГГц	Объем ОЗУ, Гбайт	Количество ядер/потоков	Операционная система
1	Intel Core i7-970	3,2	12	6/12	Windows 7
2	Intel Core 2Duo-4400	2	2	2/2	Windows XP

Далее выполнено тестирование производительности тех же библиотек при использовании различных типов данных (вещественного и комплексного с двойной точностью) и наборе компиляции «В».

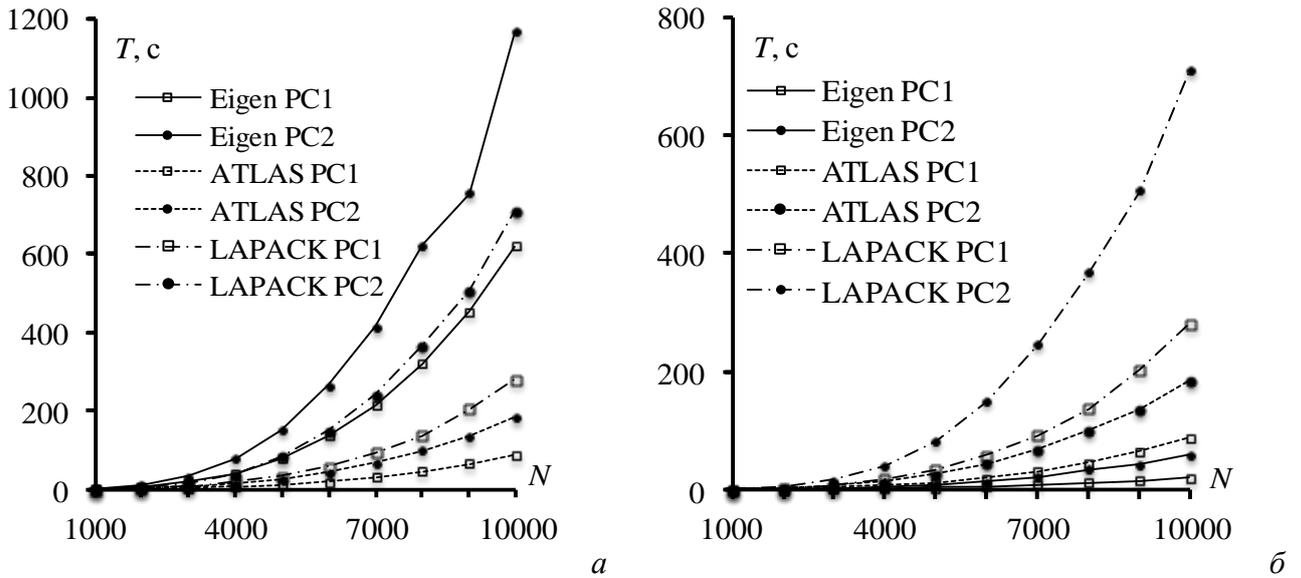


Рисунок 4.9. Время решения СЛАУ (T , с) с использованием библиотек при наборе ключей компиляции «А» (а) и «В» (б)

Время решения СЛАУ при использовании вещественных чисел при $N = 1000, 2000, \dots, 5000$ приведено на рисунке 4.10а. Аналогичные результаты, полученные при использовании комплексных чисел, приведены на рисунке 4.10б. Видно, что переход от действительных чисел к комплексным увеличивает затраты времени до 4,4 раза для Eigen, 4,3 – ATLAS и 4 – LAPACK. Наибольшей производительностью обладает библиотека Eigen, вне зависимости от используемого типа данных.

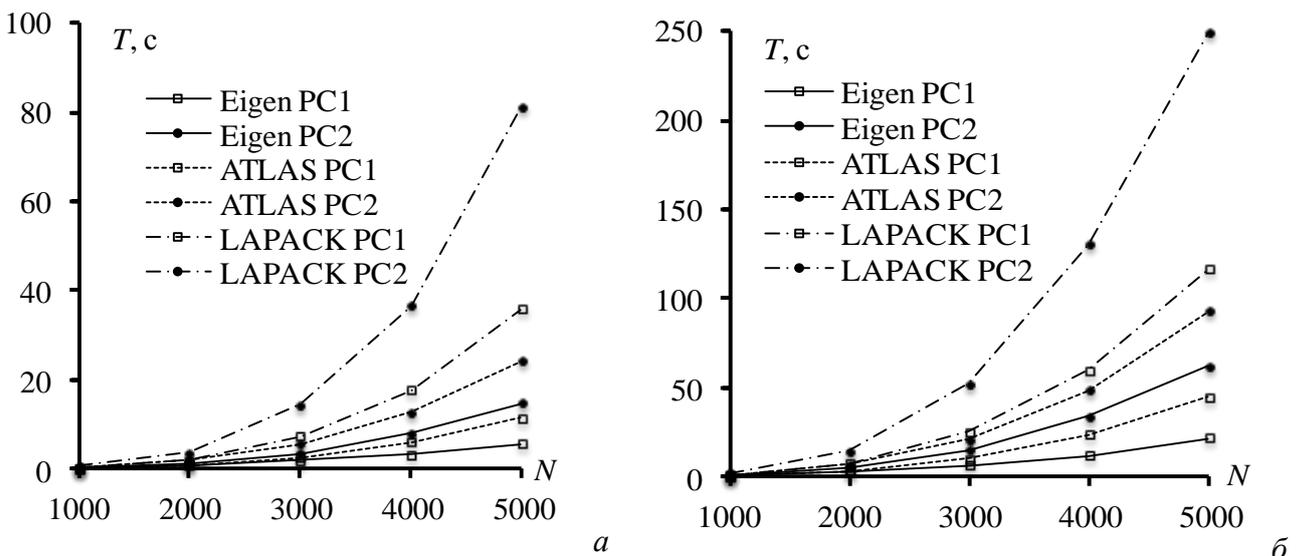


Рисунок 4.10 – Время решения СЛАУ (T , с) при использовании вещественных (а) и комплексных (б) матриц

Таким образом, при включении поддержки всех инструкций наиболее производительна, по сравнению с LAPACK и ATLAS, библиотека Eigen. Поэтому далее выполнено сравнение производительности её и другой бесплатной библиотекой BOOST [695].

BOOST – собрание расширяющих C++ библиотек, свободно распространяемых по лицензии Boost Software License совместно с исходным кодом. Проект известен как «испытательный полигон» для тестирования различных расширений языка, а некоторые библиотеки являются кандидатами на включение в последующие версии стандарта C++. Это собрание библиотек в основном ориентировано на апробирование и расширяемость. В состав BOOST входит библиотека процедур линейной алгебры uBLAS, которая содержит реализацию различных матрично-векторных операций. Также к BOOST могут быть подключены другие специализированные библиотеки, оптимизированные для конкретной вычислительной платформы и позволяющие повысить производительность исполняемого кода.

Для тестирования алгоритмов LU-разложения, из библиотек Eigen и BOOST/uBLAS, использован компилятор Microsoft Visual Studio (MSVS) 2008 и вещественные матрицы. Используются 4 различных конфигурации проекта (таблица 4.2) и PC 1 (таблице 4.1) [696]. Вычисления производились при $N = 1000, 2000, 3000, 4000$. Полученные результаты сведены в таблицу 4.3. На рисунке 4.11 для примера приведены зависимости времени выполнения LU-разложения от порядка матрицы СЛАУ для конфигурации «D».

Таблица 4.2 – Конфигурации проекта MSVS 2008 (поддержка: + включена, – отключена)

Конфигурация	Оптимизация	SSE	OpenMP
A	+	–	–
B	–	+	–
C	–	–	+
D	+	+	+

Из результатов видно, что затраты времени при использовании библиотеки Eigen значительно ниже, по сравнению с BOOST. При поддержке всех инструкций и директив (конфигурация «D») отношение времени увеличивается до 35 раз. Необходимо отметить, что раздельное использование OpenMP и SSE2 вносят несущественный вклад в ускорение вычислений, а ключевую роль для минимизации затрат времени оказывает оптимизация кода. Выявленные достоинства программной реализации функций библиотеки Eigen подтверждают предпочтительность её использования при программной реализации разработанных алгоритмов для многократного решения СЛАУ.

Таблица 4.3 – Время решения (с) СЛАУ при использовании алгоритмов LU-разложения из библиотек BOOST и Eigen

Конфигурация	Библиотека	N			
		1000	2000	3000	4000
A	BOOST	2,26	18,44	62,72	148,86
	Eigen	0,22	1,65	5,41	12,59
B	BOOST	32,10	256,87	866,47	2054,33
	Eigen	4,13	32,03	105,75	248,65
C	BOOST	31,53	252,22	850,94	2016,79
	Eigen	3,47	15,72	42,62	84,35
D	BOOST	2,25	18,29	62,18	147,64
	Eigen	0,34	0,96	2,15	4,17

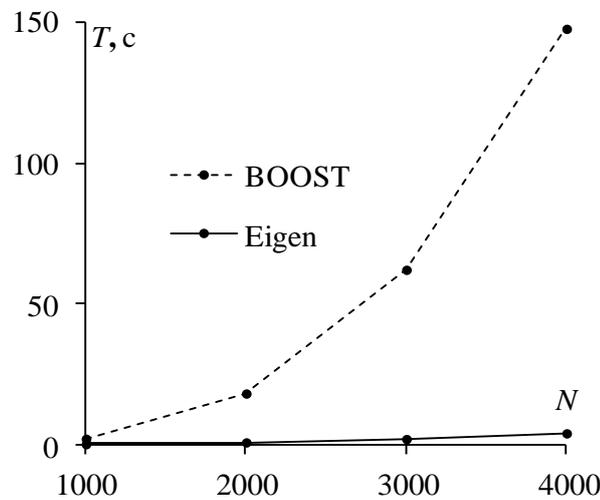


Рисунок 4.11 – Зависимости времени (T , с) LU-разложения от N для конфигурации «D»

4.2.3 Усовершенствованные вычислительные модули

4.2.3.1 Модуль двумерных структур проводников и диэлектриков

В разделе 1 было показано, что исследователи прибегают к различного рода упрощениям при вычислении матрицы \mathbf{R} (внедиагональные элементы матрицы полагаются нулевыми или значения матрицы находится путем аппроксимации результатов экспериментальных измерений потерь в проводниках), при этом различным для разных диапазонов частот. Для удобства пользователей в систему TALGAT внедрен разработанный обобщенный алгоритм [697, 698], позволяющий адаптивно выбирать метод расчета в зависимости от принадлежности заданной частоты одному из 3 частотных диапазонов, без учета постоянного тока. Для этого реализована команда **CALCULATE_R**, в качестве аргументов которой выступают конфигурация структуры, её матрица \mathbf{L} и частота. Ещё один параметр определяет приращение границ проводника (для

удобства пользователя значение параметра принято по умолчанию на основании результатов большого количества предварительных вычислений).

Разработанный алгоритм 3.11 реализован в системе TALGAT с использованием библиотеки Eigen. В системе ранее были реализованы две команды для вычисления ёмкостной матрицы \underline{C} (алгоритм 3.7) **SMN_C** и **CALCULATE_C**, а также матрицы \underline{G} – **SMN_CG** и **CALCULATE_CG**. В ходе разработки, в модуле MOM2D дополнительно реализованы команды **SMN_C_UPDATE** и **SMN_CG_UPDATE** для вычисления матрицы \underline{S} при изменении значения ϵ_r и выбора двух вариантов дальнейшего решения **SET_MOM2D_BLOCK_SOLVE**. При задании **SET_MOM2D_BLOCK_SOLVE** равным 0 используется алгоритм обычного LU-разложения, а 1 – алгоритм блочного LU-разложения. Чтобы узнать, какое значение установлено в данный момент, реализована команда **GET_MOM2D_BLOCK_SOLVE**, по возвращаемому значению которой и определяется установленное в данный момент значение.

Для организации переупорядочивания (перенумерации) доработан алгоритм заполнения матрицы \underline{S} в системе TALGAT за счёт использования ассоциативного массива (алгоритм 3.13). Этот массив используется как при генерации матрицы \underline{S} , так и при решении СЛАУ. Таким образом, процесс переупорядочивания удастся виртуализировать без необходимости прямой перестановки строк и столбцов. Пользователь может самостоятельно задать интервалы для перенумерации. Для этого реализована команда **CHANGE_NUMERATION**, в качестве аргументов которой выступают конфигурация структуры (*conf*) и информация (в виде списка) о её изменяемых интервалах (*r*).

4.2.3.1.1 Субмодуль многовариантного анализа двумерных структур проводников и диэлектриков

Полученные аналитические оценки арифметической сложности алгоритмов, основанных на использовании блочного LU-разложения, для выбора наиболее эффективного алгоритма решения с учетом специфики задачи, встроены в систему в виде нового субмодуля для модуля MOM2D. Так, с их помощью, автоматически определяется какой алгоритм использовать: исходный или один из модифицированных. При разработке архитектуры субмодуля, а также описанных ниже модулей, использован унифицированный язык моделирования. Их графический интерфейс пользователя разработан с использованием возможностей платформы Qt [699], декларативного языка программирования – QML, библиотек QtQuick и технологии QtWidgets [700]. Для проверки правильности введенных данных используется алгоритм

охранных выражений. На рисунке 4.12 приведено стартовое окно разработанного субмодуля, а на рисунке 4.13 – алгоритм его работы.

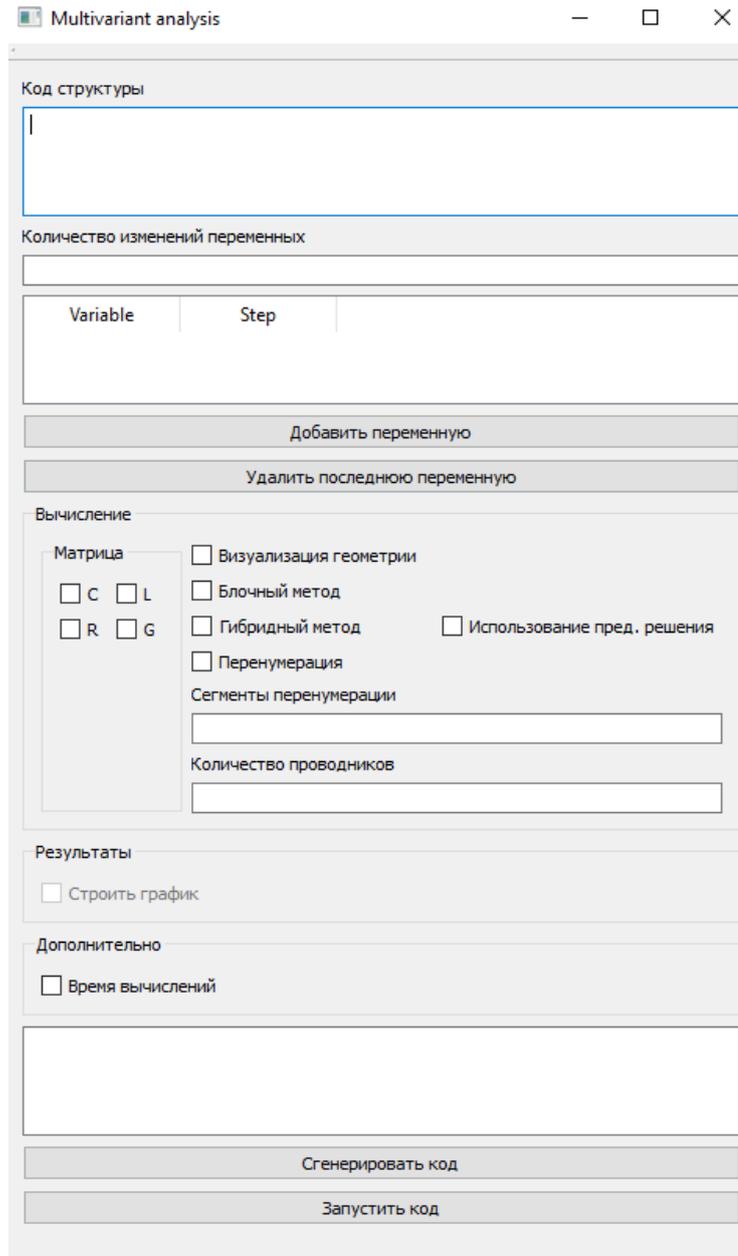


Рисунок 4.12 – Стартовое окно субмодуля для многократного вычисления матриц погонных параметров МПЛП

Для тестирования субмодуля использована связанная МПЛ. Сформировано 5 СЛАУ путем изменения ε_r подложки. Результаты вычисления ёмкостной матрицы приведены в таблице 4.4 при использовании алгоритмов 3.7 (исходного) 3.10-У1 (блочного) и 3.10-У2 (гибридного). Для последнего $tol = 10^{-2}$. Видно, что исходный и блочный дают одинаковые результаты, а результаты гибридного незначительно отличаются (различие в 4 знаке после запятой в значениях внедиагональных элементов матрицы C).

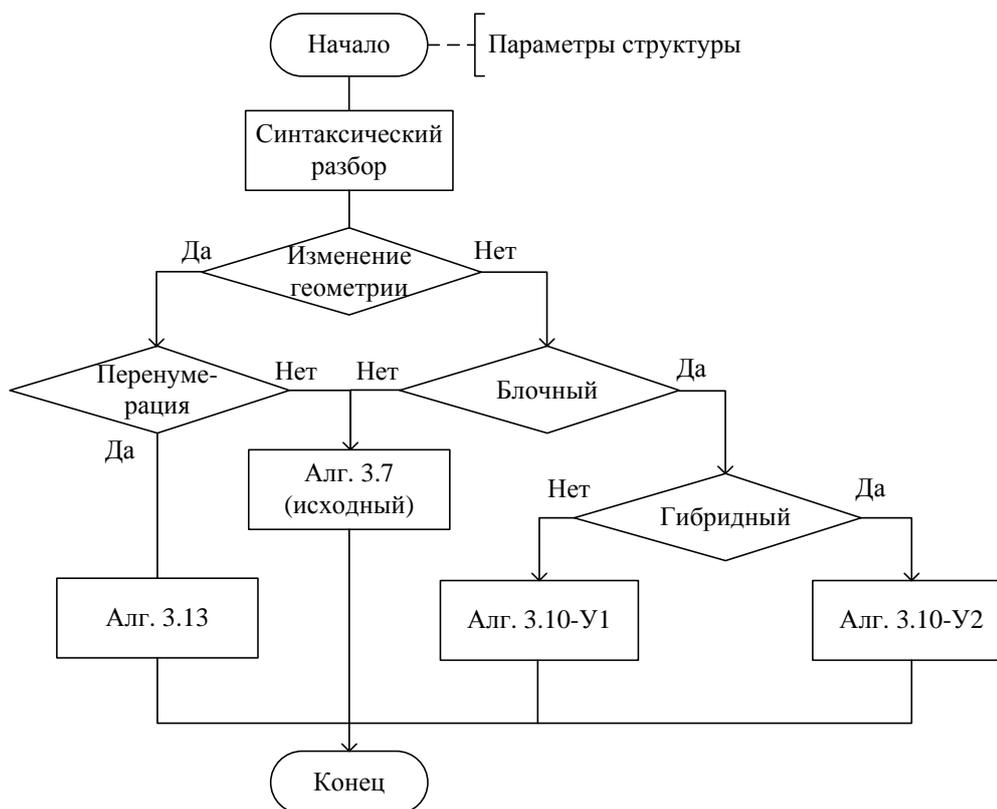


Рисунок 4.13 – Алгоритм выбора варианта вычисления submodule многовариантного анализа

Таблица 4.4 – Ёмкостная матрица (пФ/м) для связанной МПЛ при изменении ϵ_r

№	Алгоритм 3.7		Алгоритм 3.10-У1		Алгоритм 3.10-У2	
1	115,741	-17,3350	115, 741	-17,335	115,741	-17,335
	-17,3350	115,741	-17,335	115,741	-17,335	115,741
2	117,785	-17,8855	117,785	-17,8855	117,786	-17,8853
	-17,8855	117,785	-17,8855	117,785	-17,8853	117,786
3	119,830	-18,0376	119,830	-18,0376	119,830	-18,0375
	-18,0376	119,830	-18,0376	119,830	-18,0375	119,830
4	121,874	-18,1898	121,874	-18,1898	121,874	-18,1897
	-18,1898	121,874	-18,1898	121,874	-18,1897	121,874
5	123,918	-18,3421	123,918	-18,3421	123,918	-18,3420
	-18,3421	123,918	-18,3421	123,918	-18,3420	123,918

Далее для той же структуры рассмотрено изменение толщины обоих проводников. Полученные ёмкостные матрицы при использовании алгоритмов 3.7 (исходного) и алгоритм 3.13 (с перенумерацией) приведены в таблице 4.5. Видно, что результаты совпадают, что говорит о корректности реализации.

Далее оценены затраты времени на примере вычисления ёмкостной матрицы 7-проводной структуры (4-слойная печатная плата) из [348] при 3-кратном изменении относительной диэлектрической проницаемости 3 слоёв (итого 27 СЛАУ). При сегментации $t/3$

общее время (с) вычисления при использовании алгоритма 3.7 (исходного) составило 3952,8, алгоритма 3.10-У1 (блочного) – 766,8, а алгоритма 3.10-У2 (гибридного) – 713,1. При том же количестве изменений толщины центрального проводника и грубой сегментации общие затраты времени составили 1259,5 при использовании алгоритма 3.7 (исходного) и 643,1 – алгоритм 3.13 (с перенумерацией).

Таблица 4.5 – Ёмкостная матрица (пФ/м) для связанной МПЛ при изменении толщины проводников

№	Алгоритм 3.7		Алгоритм 3.13	
	1	115,969 -19,5923	-19,5923 115,969	115,969 -19,5923
2	118,049 -21,3985	-21,3985 118,049	118,049 -21,3985	-21,3985 118,049
3	120,051 -23,1344	-23,1344 120,051	120,051 -23,1344	-23,1344 120,051
4	122,015 -24,8389	-24,8389 122,015	122,015 -24,8389	-24,8389 122,015
5	123,959 -26,5276	-26,5276 123,959	123,959 -26,5276	-26,5276 123,959

Еще одной тестовой структурой стал стек 8 МПЛП из рисунка 2.3 с количеством проводников 2, 4, ..., 10. Для каждого варианта структуры вычислено по 64 ёмкостных матрицы. СЛАУ получены при изменении ϵ_r подложки в диапазоне 3–10. Вычисления производились при сегментации $t/3$. На рисунке 4.14 приведены значения собственного коэффициента (C_{11}) центрального (левого) проводника, полученные с помощью алгоритмов 3.7 (исходного) и 3.10-У2 (гибридный) при $tol = 10^{-2}$.

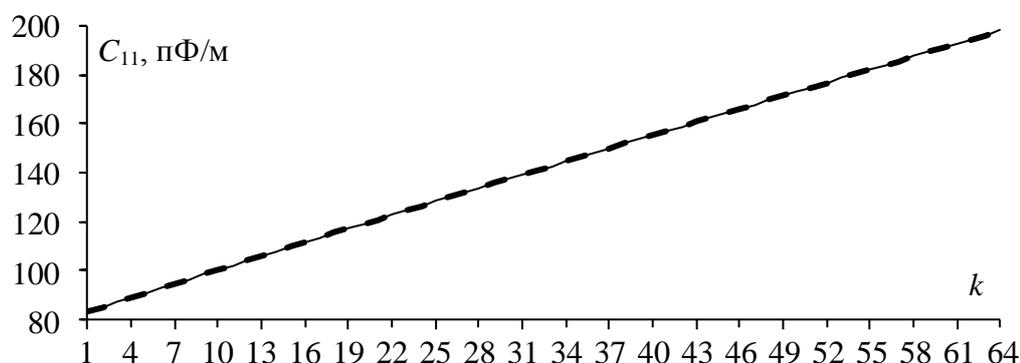


Рисунок 4.14 – Зависимость собственного погонного коэффициента ёмкостной матрицы центрального проводника от k при использовании алгоритмов 3.7 (- -) и 3.10-У2 (—)

Из рисунка 2.3 видно, что значения визуально полностью совпадают. Общее время вычисления для стека при изменении количества проводников приведено в таблице 4.6. Из нее видно, что увеличение количества проводников ведет к большему ускорению за счет использования блочного алгоритма и еще большему – за счёт гибридного. Таким образом, на тестовых примерах показана корректность реализации и эффективность разработанных алгоритмов.

Таблица 4.6 – Временные затраты (с) на вычисление ёмкостной матрицы **C** при использовании исходного и гибридного ($tol = 10^{-2}$) алгоритмов

Количество проводников	Алгоритм 3.7	Алгоритм 3.10-У1	Алгоритм 3.10-У2
2	145,1	39,8	39,4
4	370,1	101,9	99,6
6	754,5	205,5	201,2
8	1321,7	360,3	354,3
10	2144,9	577,8	567,4

4.2.3.1.2 Субмодуль построения сетки

Для использования АИВОС и его модификаций разработан субмодуль построения сетки. Графический интерфейс создан с применением языка QML и шаблона проектирования «представление по шаблону» [701]. Общий вид главного окна приведен на рисунке 4.15. При нажатии на элементы управления содержимое окна динамически подстраивается под выбранный пользователем сценарий.

Пользователю доступен список методов (модификаций АИВОС) и их параметров для построения неравномерной и равномерной сеток. Так, для использования равномерной сетки предусмотрены следующие параметры: *segm* – начальная длина подынтервала; *tol* – точность контролируемой величины; *steps* – максимальное количество итераций. В случае неравномерной можно указать: *eps* – порог неравномерности плотности заряда на подынтервалах; *n* – на сколько частей делить подынтервал при его неудовлетворительном «качестве»; *countlimit* – минимальное количество «новых» подынтервалов, полученное за одну итерацию, при котором необходимо продолжать проверять их «качество».

Также в модуле реализованы графический ввод двумерной структуры с возможностью редактирования и задания свойств её границ и отображение распределения зарядов по её поверхности.

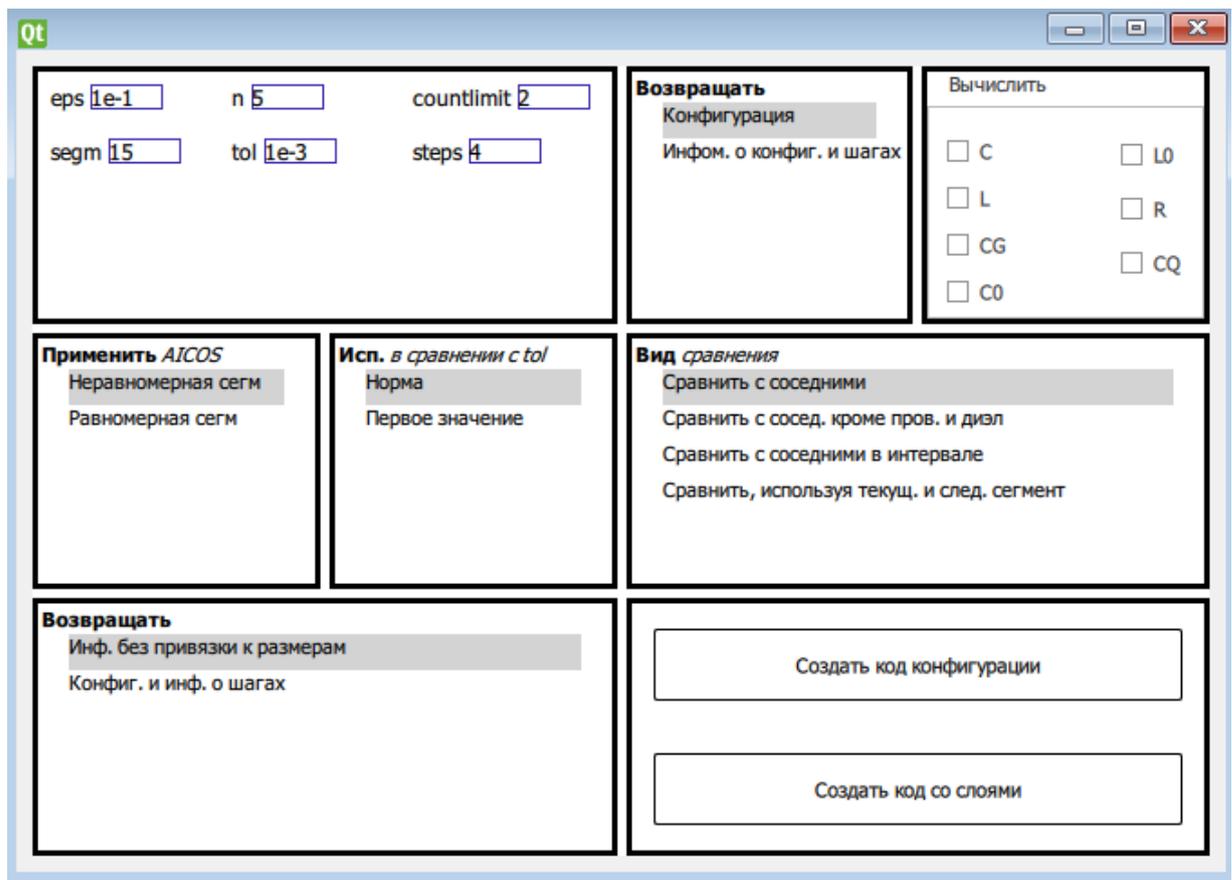


Рисунок 4.15 – Пользовательский интерфейс субмодуля построения сетки

4.2.3.1.3 База данных помеховых сигналов

Для моделирования отклика сети электропитания на воздействие преднамеренных электромагнитных воздействия разработана база данных кондуктивных помеховых сигналов (11 шт.) на основе [702]. База реализована в виде внешнего источника, а сигналы генераторов в ней хранятся в текстовом виде (рисунок 4.16), для возможности их редактирования.

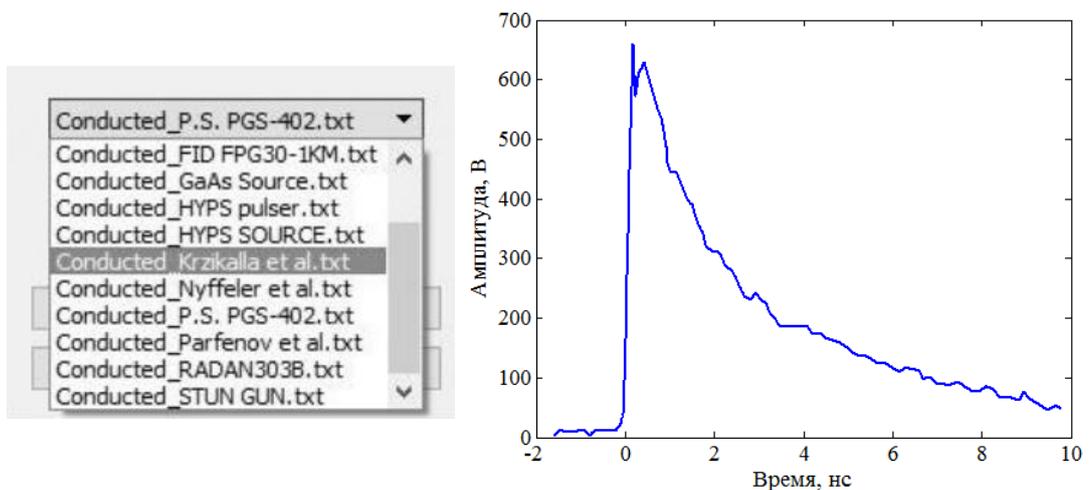


Рисунок 4.16 – Пример загрузки данных кондуктивного помехового сигнала

Для численной оценки потенциальных угроз, связанных с прохождением помеховых сигналов по цепям электропитания, реализовано вычисление N-норм. Они являются интегральными параметрами, используемыми для характеристики сигнала во временной области и определения предела восприимчивости оборудования. Для численного интегрирования использован метод трапеций. Расчет N-норм основан на применении математических операторов ко всей форме сигнала, поэтому они могут быть использованы не только при проектировании сети электропитания для оценки её помехоустойчивости, но и для оценки её надежности. По их значениям можно оценивать вероятность сбоя схемы, электрического пробоя, повреждения оборудования или выгорания компонент. Для удобства реализована возможность отображения значения норм в зависимости от номера сегмента схемы, позволяющая численно оценивать конструкторские решения при моделировании.

4.2.3.2 Модуль трехмерных структур проводников и диэлектриков

Для использования разработанных алгоритмов 3.11 и 3.13 при вычислениях трехмерных структур, аналогично модулю MOM2D доработан модуль MOM3D. Добавлены команды: **SET_MOM3D_BLOCK_SOLVE**, **SMN_C3D_UPDATE**, **SMN_CG3D_UPDATE** и **CHANGE_NUMERATION3D**.

4.2.4 Модуль вычислений на графическом процессоре

Для заполнения матрицы с использованием графического процессора разработан модуль TLGPU. При его разработке использован язык CUDA C, а также библиотеки CUBLAS. Помимо заполнения матрицы (команда **SMN_C_CUDA**) реализовано быстрое перемножение матриц [703]. Также в модуле реализовано (другими авторами) решение СЛАУ с использованием итерационных методов, в частности BiCGStab [744].

4.2.5 Модуль вычисления эффективности экранирования корпуса

В систему TALGAT встроены подпрограммы для быстрого анализа ЭЭ плоской металлической пластиной и прямоугольным металлическим корпусом с щелью, расположенной в одной из стенок корпуса. Первая подпрограмма реализует оценку ЭЭ электрического, магнитного и электромагнитного полей для разных расстояний от источника до плоской металлической пластины, в требуемом диапазоне частот и заданных свойствах металла (толщины, удельной электрической проводимости и относительной магнитной

проницаемости). Вторая включает набор команд по вычислению ЭЭ на разных расстояниях внутри корпуса с заданными внутренними размерами, при падении плоской электромагнитной волны в требуемом частотном диапазоне на стенку заданной толщины с целью заданных размеров. В качестве результатов отображаются частотные зависимости ЭЭ.

Для оценки ЭЭ корпусов РЭС с более сложными аперттурами с использованием известных аналитических моделей (более 10 шт.), а также библиотек three.js [704] и csg.js, [705] разработан вычислительный модуль. Вычисление ЭЭ производится в диапазонах частот и положения точки наблюдения. Корпус может иметь как одну аперттуру, так и массив апертур. Для проверки корректности введенных значений параметров разработан специальный алгоритм охранных выражений. На рисунке 4.17 в виде коллажа на примере тестового корпуса проиллюстрирован процесс вычисления зависимостей его ЭЭ [742].

Отличительной особенностью модуля является трехмерная визуализация результатов моделирования ЭЭ с возможностью последующего двухмерного отображения ЭЭ в интересующей точке наблюдения. В модуле реализованы возможность выбора метода численного интегрирования и априорная оценка вычислительных затрат, позволяющая до основных вычислений определить их сложность и требования к вычислительными ресурсам.

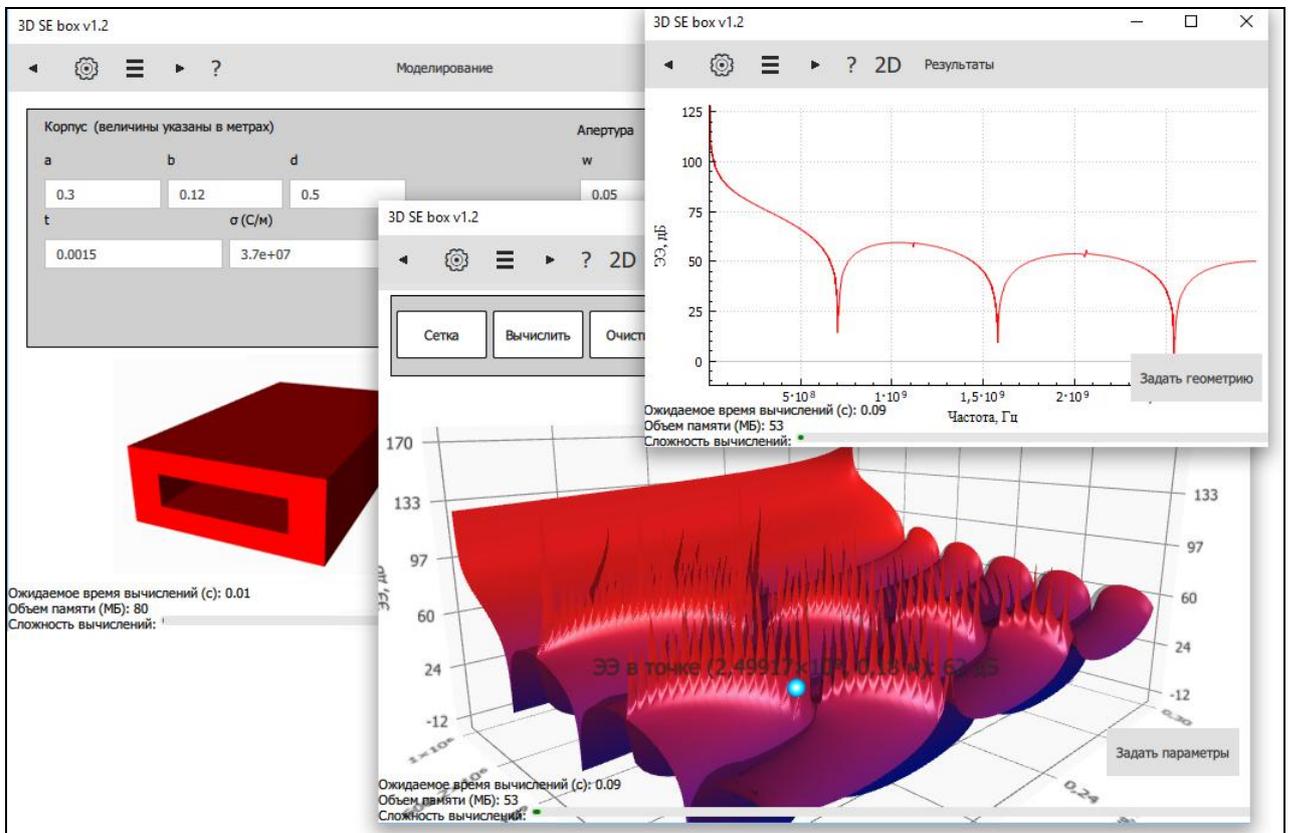


Рисунок 4.17 – Пример оценки ЭЭ корпуса с апертурой

4.2.6 Вспомогательный инструментарий

При разработке нового функционала программы возникает необходимость в регрессионных тестах для обнаружения ошибок в ранее протестированных участках исходного кода. С этой целью в системе написан программный код, использующий в качестве исходных данных файлы сценариев. После тестирования выдается информация, при выполнении каких сценариев произошли ошибки (результаты не совпали с эталонными). Данный подход позволяет эффективно обнаруживать и устранять регрессионные ошибки, что позволяет сократить время, затрачиваемое на разработку и отладку новой функциональности.

Не все ошибки, к сожалению, могут быть выявлены на этапе тестирования. В связи с этим возникает необходимость автоматического создания отчетов об ошибках на рабочих станциях пользователей и отправки их разработчику. Поэтому в систему встроена библиотека с открытым исходным кодом – CrashRpt [706], позволяющая создавать архив с отчетом об ошибке. В случае ошибки, приводящей к закрытию системы, пользователю предлагается отправить отчет об ошибке, с возможностью предварительно ознакомиться с содержимым архива. Отправка выполняется с помощью POST запроса на http-сервер, используемый разработчиками. Для обработки получаемого от CrashRpt архива на языке php реализован обработчик, извлекающий информацию из архива и добавляющий её в систему управления проектами и задачами разработчиков системы. Отчеты содержат полную информацию для эффективного определения причин ошибок и действий пользователя, приведших к ним.

Для более удобного тестирования нового функционала системы реализована возможность её сопряжения с пакетом прикладных программ Matlab. Так, например, параметры структуры передаются из Matlab в TALGAT, где выполняются основные вычисления. Результат затем загружается в Matlab для их последующего графического отображения или сравнения с результатами других программ. Для реализации такой функциональности разработана динамически подключаемая библиотека системы TALGAT, с помощью которой реализуется конвертация формата данных TALGAT в формат данных Matlab и наоборот.

Таким образом, результаты работы внедрены в систему TALGAT в виде 2 новых модулей, а также путем модификации 2 имеющихся модулей. Структурная схема «обновленной» системы TALGAT приведена на рисунке 4.18, где серым отмечены модули, содержащие новые разработки.

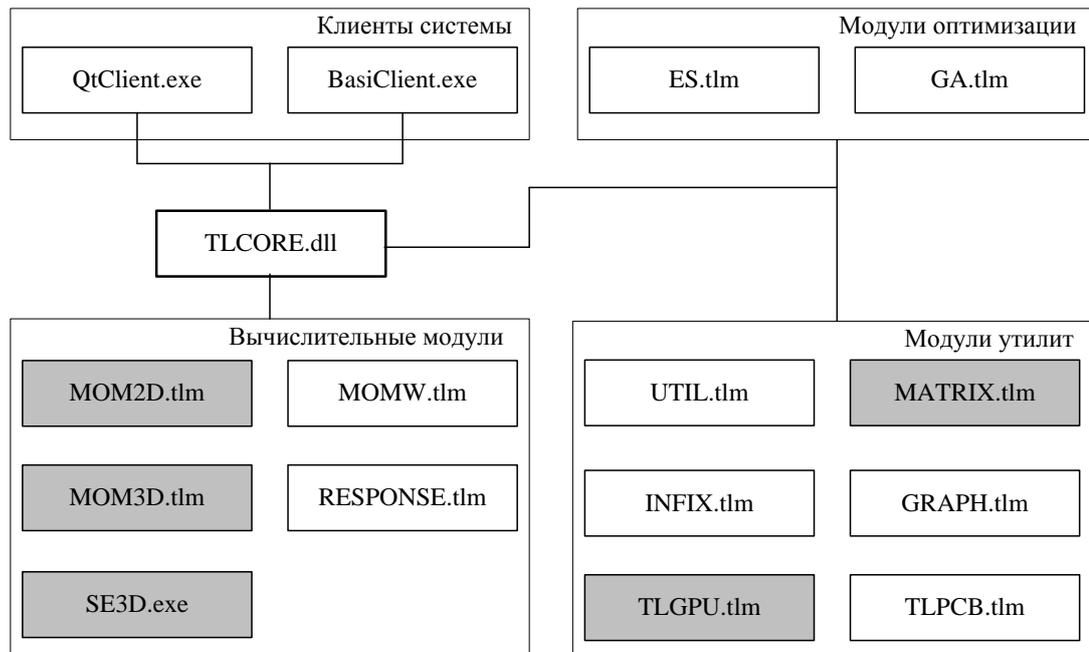


Рисунок 4.18 – Структурная схема системы TALGAT

4.3 Основные результаты раздела

Разработано 2 комплекса программ. Первый предназначен для итерационного решения СЛАУ: однократного и многократного. Отличительной чертой его является наличие алгоритмов $ILU(0)$ -разложения в сочетании с модифицированным строчным форматом, переформирования предобусловливателя, выбора порядка решения и матрицы для вычисления предобусловливателя. Второй интегрирован в комплекс программ TALGAT путем совершенствования имеющихся и разработки новых его модулей. Так, разработаны модуль матричных операций (позволяющий решать СЛАУ, используя 8 прямых и 6 итерационных методов, 6 способов предобусловливания и 10 способов предфильтрации, включая предложенные автором новые и усовершенствованные, реализована возможность использования методов решения СЛАУ с помощью DHTML диалогов, визуализация матриц, как после предфильтрации, так и после формирования матрицы предобусловливания), модуль вычисления ЭЭ корпусом с возможностью трехмерного отображения и модуль вычислений на графическом процессоре. Также усовершенствованы вычислительные модули двумерных и трехмерных структур, путем внедрения новых вычислительных процедур и субмодулей (построения сетки и многовариантного анализа с использованием новых алгоритмов).

Возможности комплексов позволяют их использовать для решения других задач, требующих решения СЛАУ с плотной матрицей, а также в учебном процессе, как средство изучения численных методов.

5 УМЕНЬШЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ НА ОДНОВАРИАНТНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН И ПОЛОСКОВЫХ СТРУКТУР

5.1 Итерационное решение СЛАУ при анализе линейных антенн

В данном подразделе приведены результаты исследования работы итерационных методов решения СЛАУ при анализе линейных антенн. Подраздел основан на работах [707–713].

5.1.1 Сравнение итерационных методов с учётом предобусловливания

Необходимость использования предобусловливания при итерационном решении проиллюстрируем на примере определения тока в линейной антенне. Все вычисления производились в системе TALGAT [672]. В качестве тестовых конфигураций взяты четыре антенны:

1. Трапециевидная зубчатая антенна [714]. Параметры матрицы СЛАУ: $N = 765$, плотность $q_A = 99,997\%$.
2. Антенна «чайка» [714]. Параметры матрицы СЛАУ: $N = 1865$, плотность $q_A = 100\%$.
3. Широкодиапазонная антенна [135, 715]. Параметры матрицы СЛАУ: $N = 1261$, плотность $q_A = 100\%$.
4. Диполь с углом между лучами 180° . Параметры матрицы СЛАУ: $N = 2335$, плотность $q_A = 100\%$.

Общий вид этих антенн (кроме диполя) в системе TALGAT приведен на рисунке 5.1, а результаты использования итерационных методов без предобусловливания сведены в таблицу 5.1. За начальное приближение вектора решения принималось равенство всех его элементов 0,1. Итерационный процесс продолжался пока относительная норма вектора невязки оставалась больше 10^{-8} , т.е.

$$tol = \|\mathbf{r}_k\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 < 10^{-8},$$

где \mathbf{r}_k и \mathbf{r}_0 – невязки после k -й итерации и начального приближения соответственно, или при достижении максимального количества итераций (N_{it}^{\max}) равного 400.

Из приведенных результатов видно, что применение итерационных методов в классической постановке (без предобусловливания) неэффективно, поскольку в большинстве случаев для получения приемлемого решения итерационному процессу было недостаточно 400

итераций или требовались значительные затраты времени (намного большие, чем при использовании метода Гаусса). Подобные результаты, при решении схожих задач, можно найти, например, в [543, 558].

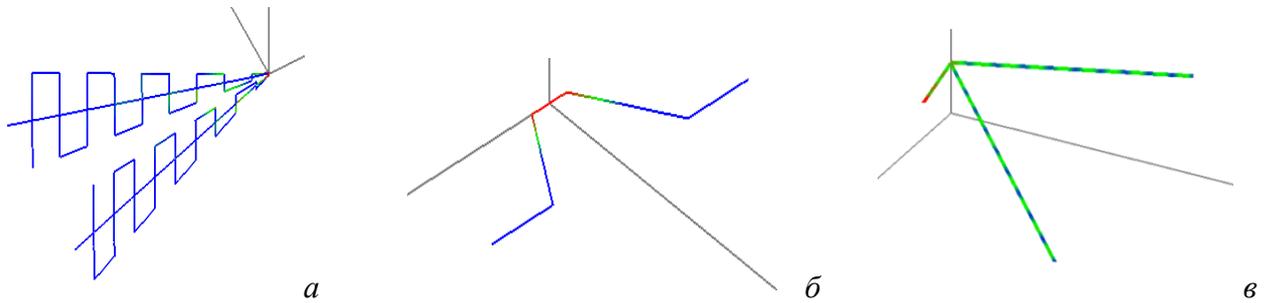


Рисунок 5.1 – Общий вид антенн в системе TALGAT:

трапецевидной зубчатой (а), «чайка» (б), широкодиапазонной (в)

Таблица 5.1 – Результаты использования итерационных методов без предобусловливания при анализе линейных антенн

Номер антенны	Параметр решения	BiCG	BiCGStab	CGS	QMR	GMRES(<i>m</i>)		
						<i>m</i> = 10	<i>m</i> = 20	<i>m</i> = 40
1	<i>T</i> , с	39	36	33	41	97	83	75
	<i>N_{it}</i>	400	400	400	400	192	86	39
2	<i>T</i> , с	236	225	193	244	1218	2296	4648
	<i>N_{it}</i>	400	400	400	400	400	400	400
3	<i>T</i> , с	93	86	76	94	470	906	1813
	<i>N_{it}</i>	400	400	400	400	400	400	400
4	<i>T</i> , с	297	272	241	301	1471	2831	5592
	<i>N_{it}</i>	400	400	400	400	400	400	400

Далее, для выбора предпочтительного итерационного метода, СЛАУ (1.37) решалась итерационными методами (BiCG, BiCGStab, CGS, QMR и GMRES(*m*) при *m* = 10, 20, 40) на примере определения токов в линейной антенне. В качестве исследуемых структур взяты 2 антенны. Первой была выбрана простая конфигурация: диполь с углом между лучами 180°, с матрицей размерностью *N* = 2335 и плотностью *q_A* = 100%. В качестве второй выступила широкодиапазонная антенна (рисунок 5.1 в), как и ранее, с параметрами матрицы *N* = 1261 и *q_A* = 100%.

При вычислениях за начальное приближение вектора решения принималось равенство всех его элементов 0,1 (выбрано на основании большого количества предварительных вычислений). Итерации останавливались при условии $tol = \|\mathbf{r}_k\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 < 10^{-8}$ или при достижении 180 итераций. Для вычисления предобусловливателя использовались разложения: полное LU; ILU(0) и ILU(*p*), при *p* = 1, 2, 3 (см. подпункт 1.6.3). В качестве способа

предфильтрации использовался предложенный автором способ (2.1), описанный в подразделе 2.1 и основанный на нормах строк матрицы. Результаты (T – время решения СЛАУ, N_{it} – число итераций) вычислений приведены в таблице 5.2 для диполя и в таблице 5.3 для широкодиапазонной антенны. Зависимости времени решения СЛАУ итерационными методами от допуска обнуления, полученные при использовании полного LU, ILU(0) и ILU(3) разложений, показавшие наилучшие результаты с точки зрения минимизации времени решения СЛАУ, для диполя приведены на рисунке 5.2.

Таблица 5.2 – Результаты работы итерационных методов для диполя с углом между лучами 180° при $N = 2335$

Метод	τ	LU		ILU(0)		ILU(1)		ILU(2)		ILU(3)	
		T, c	N_{it}								
BiCG	10^{-2}	215	180	215	180	230	180	227	180	227	180
	$5 \cdot 10^{-3}$	109	88	200	167	203	161	170	133	139	107
	10^{-3}	37	25	57	42	60	42	59	41	59	41
	$5 \cdot 10^{-4}$	33	21	49	35	51	34	52	35	51	34
	10^{-4}	25	13	34	21	37	21	37	21	37	21
	$5 \cdot 10^{-5}$	24	11	32	18	35	18	35	18	35	18
	10^{-5}	27	7	31	10	37	12	36	11	31	7
	$5 \cdot 10^{-6}$	38	6	40	6	43	6	43	6	43	6
BiCGStab	10^{-2}	111	107	179	180	168	168	180	180	153	152
	$5 \cdot 10^{-3}$	66	64	129	127	122	120	122	119	136	134
	10^{-3}	28	20	49	43	49	42	48	41	46	39
	$5 \cdot 10^{-4}$	25	17	38	31	42	34	39	31	37	29
	10^{-4}	20	10	25	16	25	15	27	17	26	16
	$5 \cdot 10^{-5}$	17	7	24	13	25	13	25	13	24	12
	10^{-5}	25	5	26	6	29	7	29	7	27	5
	$5 \cdot 10^{-6}$	36	4	38	4	39	4	39	4	39	4
CGS	10^{-2}	165	180	165	180	189	180	189	180	189	180
	$5 \cdot 10^{-3}$	91	95	165	180	178	179	164	166	152	155
	10^{-3}	27	21	42	38	44	38	43	36	43	36
	$5 \cdot 10^{-4}$	23	17	35	30	38	31	38	31	36	29
	10^{-4}	19	10	24	16	25	15	26	16	26	16
	$5 \cdot 10^{-5}$	17	7	23	14	24	13	23	12	23	12
	10^{-5}	23	5	26	7	34	13	201	180	26	5
	$5 \cdot 10^{-6}$	33	3	35	3	38	3	38	3	38	3
QMR	10^{-2}	189	180	189	180	219	180	219	180	219	180
	$5 \cdot 10^{-3}$	189	180	189	180	219	180	219	180	219	180
	10^{-3}	55	46	189	180	220	180	220	180	220	180
	$5 \cdot 10^{-4}$	43	34	189	180	222	180	222	180	222	180
	10^{-4}	27	17	193	180	225	180	223	180	223	180
	$5 \cdot 10^{-5}$	24	13	195	180	227	180	227	180	227	180
	10^{-5}	26	7	212	180	246	180	244	180	30	7
	$5 \cdot 10^{-6}$	37	6	39	6	43	6	43	6	43	6

Продолжение таблицы 5.2

GMRES(10)	10^{-2}	369	69	376	72	465	83	430	76	408	72
	$5 \cdot 10^{-3}$	318	60	385	73	358	64	380	67	351	62
	10^{-3}	87	15	122	22	126	21	116	20	124	21
	$5 \cdot 10^{-4}$	55	9	92	16	108	18	100	16	96	16
	10^{-4}	27	4	42	7	49	7	55	8	47	7
	$5 \cdot 10^{-5}$	22	2	40	6	40	5	39	5	38	5
	10^{-5}	24	1	28	2	31	2	30	2	27	1
	$5 \cdot 10^{-6}$	36	1	38	1	39	1	39	1	39	1
GMRES(20)	10^{-2}	278	27	340	34	391	36	356	33	352	32
	$5 \cdot 10^{-3}$	228	22	296	29	288	26	301	28	266	24
	10^{-3}	60	6	92	9	99	9	100	9	96	9
	$5 \cdot 10^{-4}$	47	4	79	7	84	7	78	7	84	7
	10^{-4}	19	1	34	3	40	3	39	3	35	3
	$5 \cdot 10^{-5}$	19	1	27	2	28	2	27	2	26	2
	10^{-5}	24	1	27	1	29	1	29	1	27	1
	$5 \cdot 10^{-6}$	36	1	39	1	39	1	39	1	39	1
GMRES(40)	10^{-2}	244	12	282	14	325	15	300	14	300	14
	$5 \cdot 10^{-3}$	202	10	224	12	225	11	225	11	216	10
	10^{-3}	26	1	80	4	88	4	88	4	88	4
	$5 \cdot 10^{-4}$	23	1	56	3	59	3	59	3	59	3
	10^{-4}	19	1	25	1	27	1	27	1	27	1
	$5 \cdot 10^{-5}$	19	1	23	1	25	1	25	1	25	1
	10^{-5}	24	1	27	1	29	1	29	1	27	1
	$5 \cdot 10^{-6}$	36	1	38	1	40	1	39	1	40	1

Таблица 5.3 – Результаты работы итерационных методов для широкодиапазонной антенны (рисунок 5.1 в) при $N = 1261$

Метод	τ	LU		ILU(0)		ILU(1)		ILU(2)		ILU(3)	
		T, c	N_{it}								
BiCG	10^{-2}	23	59	26	68	26	66	27	70	25	64
	$5 \cdot 10^{-3}$	19	46	22	56	21	53	20	51	21	52
	10^{-3}	12	25	13	32	14	32	13	30	14	31
	$5 \cdot 10^{-4}$	11	20	11	26	11	22	11	24	11	22
	10^{-4}	11	12	10	18	12	16	13	18	13	16
	$5 \cdot 10^{-5}$	18	10	13	14	18	13	20	15	21	14
	10^{-5}	53	7	37	11	58	10	56	7	56	7
	$5 \cdot 10^{-6}$	52	5	48	11	56	5	56	5	56	5
BiCGStab	10^{-2}	20	61	20	64	20	65	21	68	22	70
	$5 \cdot 10^{-3}$	17	50	16	50	17	53	16	49	21	68
	10^{-3}	10	24	10	27	10	26	10	28	10	28
	$5 \cdot 10^{-4}$	8	16	8	21	8	20	9	21	8	19
	10^{-4}	10	8	8	14	9	12	10	13	10	11
	$5 \cdot 10^{-5}$	18	7	12	11	15	8	18	10	19	11
	10^{-5}	58	4	39	10	56	8	55	4	55	4
	$5 \cdot 10^{-6}$	58	3	51	8	54	3	54	3	54	3

Продолжение таблицы 5.3

CGS	10^{-2}	16	49	20	64	18	59	21	67	17	55
	$5 \cdot 10^{-3}$	13	38	17	54	15	48	14	42	15	45
	10^{-3}	9	21	9	26	9	25	9	25	10	28
	$5 \cdot 10^{-4}$	8	15	8	20	8	19	8	20	8	17
	10^{-4}	9	8	8	13	9	12	10	13	10	11
	$5 \cdot 10^{-5}$	16	7	12	11	16	9	17	10	18	10
	10^{-5}	51	4	37	9	56	8	55	4	55	4
	$5 \cdot 10^{-6}$	51	3	47	8	54	3	54	3	54	3
QMR	10^{-2}	65	180	65	180	65	180	65	180	65	180
	$5 \cdot 10^{-3}$	44	118	65	180	37	102	31	84	42	114
	10^{-3}	16	36	29	76	24	61	21	53	22	57
	$5 \cdot 10^{-4}$	12	25	65	180	65	180	66	180	66	180
	10^{-4}	13	14	69	180	72	180	73	180	74	180
	$5 \cdot 10^{-5}$	19	10	78	180	86	180	88	180	89	180
	10^{-5}	54	7	119	180	149	180	57	7	57	7
	$5 \cdot 10^{-6}$	53	5	134	180	56	5	56	5	56	5
GMRES(10)	10^{-2}	27	15	49	29	59	35	70	42	50	29
	$5 \cdot 10^{-3}$	23	12	52	31	43	25	49	29	52	30
	10^{-3}	11	5	65	39	19	10	27	15	29	16
	$5 \cdot 10^{-4}$	9	4	24	13	12	6	39	22	13	7
	10^{-4}	10	2	16	7	12	4	16	6	13	4
	$5 \cdot 10^{-5}$	17	2	13	3	18	3	20	3	21	4
	10^{-5}	51	1	38	2	57	2	55	1	55	1
	$5 \cdot 10^{-6}$	51	1	49	2	55	1	55	1	55	1
GMRES(20)	10^{-2}	26	8	32	10	40	12	42	13	42	13
	$5 \cdot 10^{-3}$	17	5	34	10	29	9	29	9	53	16
	10^{-3}	10	3	21	6	13	4	18	5	17	5
	$5 \cdot 10^{-4}$	8	2	14	4	9	2	15	4	9	2
	10^{-4}	9	1	9	2	9	2	11	2	10	1
	$5 \cdot 10^{-5}$	16	1	12	1	16	1	17	1	18	1
	10^{-5}	51	1	36	1	56	1	55	1	55	1
	$5 \cdot 10^{-6}$	51	1	47	1	55	1	54	1	55	1
GMRES(40)	10^{-2}	19	3	25	4	31	5	34	5	33	5
	$5 \cdot 10^{-3}$	15	2	23	4	20	3	21	3	27	4
	10^{-3}	9	1	12	2	9	1	12	2	11	2
	$5 \cdot 10^{-4}$	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
	10^{-4}	9	1	8	1	9	1	10	1	10	1
	$5 \cdot 10^{-5}$	17	1	12	1	16	1	17	1	18	1
	10^{-5}	51	1	36	1	56	1	55	1	55	1
	$5 \cdot 10^{-6}$	51	1	47	1	54	1	55	1	55	1

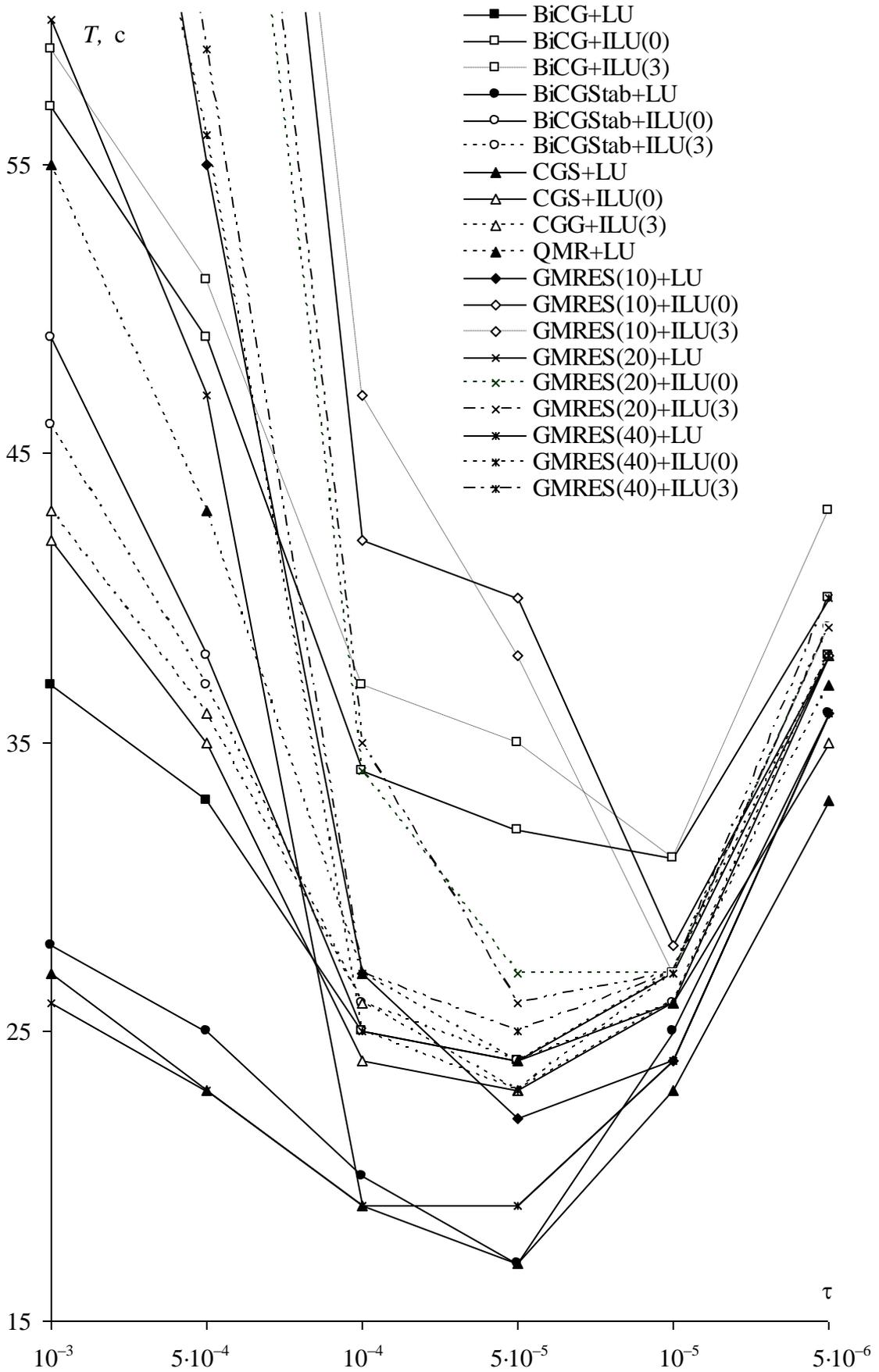


Рисунок 5.2 – Зависимости времени решения СЛАУ итерационными методами от допуска обнуления при использовании LU, ILU(0) и ILU(3) разложений

Из приведенных результатов можно сделать следующие выводы. Метод QMR (кроме случая использования в сочетании с полным LU-разложением) показал практически полную неспособность решить поставленную задачу. Также видно, что наилучшим, с точки зрения минимизации времени решения СЛАУ, является использование полного LU-разложения для вычисления предобусловливателя. Это справедливо для любого использованного итерационного метода. Следует отметить также и тот факт, что значение допуска обнуления ($5 \cdot 10^{-5}$), являющееся оптимальным (по критерию минимального времени решения), для методов BiCGStab, CGS, GMRES(20) и GMRES(40) является одинаковым, вне зависимости от использованного способа вычисления предобусловливателя, чего нельзя сказать про другие методы. Из рассмотренных методов выделяются методы CGS и BiCGStab, которые позволили решить СЛАУ быстрее остальных методов. Таким образом, для рассмотренной задачи, выбор метода CGS или BiCGStab, полного LU-разложения для вычисления предобусловливателя и оптимального значения допуска обнуления приводит к наименьшему времени решения СЛАУ.

Из проведенного исследования 7 итерационных методов и анализа результатов их работы (таблица 5.2, таблица 5.3) следует, что наиболее предпочтительными, с точки зрения минимизации времени решения СЛАУ с плотной матрицей, возникающих при анализе антенн методом моментов, оказались методы BiCGStab и CGS при использовании полного LU-разложения для вычисления предобусловливателя и предложенного способа предфильтрации (2.1) (подраздел 2.1). Поскольку при использовании этих методов получены практически одинаковые результаты, то в дальнейших исследованиях чаще использовался один из них: метод BiCGStab. Также предпочтительнее использовать полное LU-разложение для вычисления предобусловливателя, поскольку оно оказалось наиболее работоспособным для каждого метода.

5.1.2 Оптимизация допуска обнуления

В данном пункте приведены результаты решения СЛАУ итерационным методом BiCGStab с предобусловливанием. Так, выполнено исследование его работы с различными матрицами при изменении точности вычислений и значения допуска обнуления. Показаны результаты, подтверждающие существование оптимального (по критерию минимального времени решения) значения допуска обнуления. Пункт основан на работах [623, 716–718].

СЛАУ (1.37) из задачи определения токов в линейной антенне (рисунок 5.1в) с матрицей $N = 243$ решалась методом BiCGStab при $\tau = 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2}, \dots, 10^{-4}$. Для предфильтрации использовался способ (2.1), основанный на нормах строк матрицы. При формировании

матрицы преобусловливания использовалось полное LU-разложение. В таблице 5.4 приведена выборка результатов вычислений при $\tau = 10^{-3}$ (T – время решения СЛАУ, N_{it} – количество итераций, реальная и мнимая части второго и последнего элементов вектора решения, т.е. распределения тока в антенне) методом BiCGStab при разной точности вычислений tol , а также методом Гаусса (GE, последняя строка).

Таблица 5.4 – Результаты вычислений при $\tau = 10^{-3}$ для линейной антенны

tol	T, c	N_{it}	$Re(i_1), mA$	$Im(i_1), A$	$Re(i_{242}), mA$	$Im(i_{242}), A$
10^{-1}	0,16	4	–5,5433315933	$8,5280934358 \cdot 10^{-4}$	3,1026158901	$-2,0675906220 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	0,22	5	–5,5429392637	$8,5304111642 \cdot 10^{-4}$	3,1019734236	$-2,0697442283 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	0,22	5	–5,5429392637	$8,5304111642 \cdot 10^{-4}$	3,1019734236	$-2,0697442283 \cdot 10^{-4}$
10^{-4}	0,22	5	–5,5429392637	$8,5304111642 \cdot 10^{-4}$	3,1019734236	$-2,0697442283 \cdot 10^{-4}$
10^{-5}	0,27	6	–5,5429393543	$8,5304010642 \cdot 10^{-4}$	3,1019740107	$-2,0697295482 \cdot 10^{-4}$
10^{-6}	0,28	7	–5,5429393483	$8,5304010471 \cdot 10^{-4}$	3,1019740055	$-2,0697295161 \cdot 10^{-4}$
10^{-7}	0,28	7	–5,5429393483	$8,5304010471 \cdot 10^{-4}$	3,1019740055	$-2,0697295161 \cdot 10^{-4}$
10^{-8}	0,33	8	–5,5429393528	$8,5304010530 \cdot 10^{-4}$	3,1019740083	$-2,0697295185 \cdot 10^{-4}$
GE	1,37	–	–5,5429393528	$8,5304010530 \cdot 10^{-4}$	3,1019740083	$-2,0697295185 \cdot 10^{-4}$

Из таблицы 5.4 видно, что методом BiCGStab решение, например с точностью до 4 знаков после запятой совпадающее с решением методом Гаусса, получается за 5 итераций и в 6 раз быстрее, по сравнению с методом Гаусса. Более точные результаты можно получить путем увеличения количества итераций. Так, решение с точностью до 10 знаков, получено за 8 итераций и в 4 раза быстрее. В противном случае, если точность решения не так критична (например для выполнения предварительных оценок пригодности принятых технических решений), а важны минимальные затраты времени, то их можно уменьшить в 1,5 раз за счёт выбора большего значения tol .

Зависимости времени решения СЛАУ с матрицей $N = 243$ от τ при различных значениях tol приведены на рисунке 5.3а. Из рисунка следует, что для всех рассмотренных значений tol существует оптимальное (по критерию минимального времени) значение τ , а выбор значения $\tau = 10^{-3}$, которое близко к оптимальному, позволяет уменьшить затраты времени в 2–3 раза по сравнению с крайними значениями τ из рассмотренного диапазона.

Проведены результаты аналогичных вычислений для той же антенны с матрицей $N = 1023$. Результаты при $\tau = 10^{-3}$ сведены в таблицу 5.5. Из неё следует, что решение с точностью до 4 знаков после запятой совпадающее с решением методом Гаусса, получено за 10 итераций и в 14 раз быстрее, по сравнению с методом Гаусса. Зависимости времени решения СЛАУ и $N = 1023$ от τ при различных значениях tol приведены на рисунке 5.3б. Видно, что, как и

на рисунке 5.3а, для всех tol существует оптимальное (по критерию минимального времени) значение τ . Выбор $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$, близкого к оптимальному значению, уменьшает затраты времени более чем в 3 раза по сравнению с крайними значениями τ из рассматриваемого диапазона.

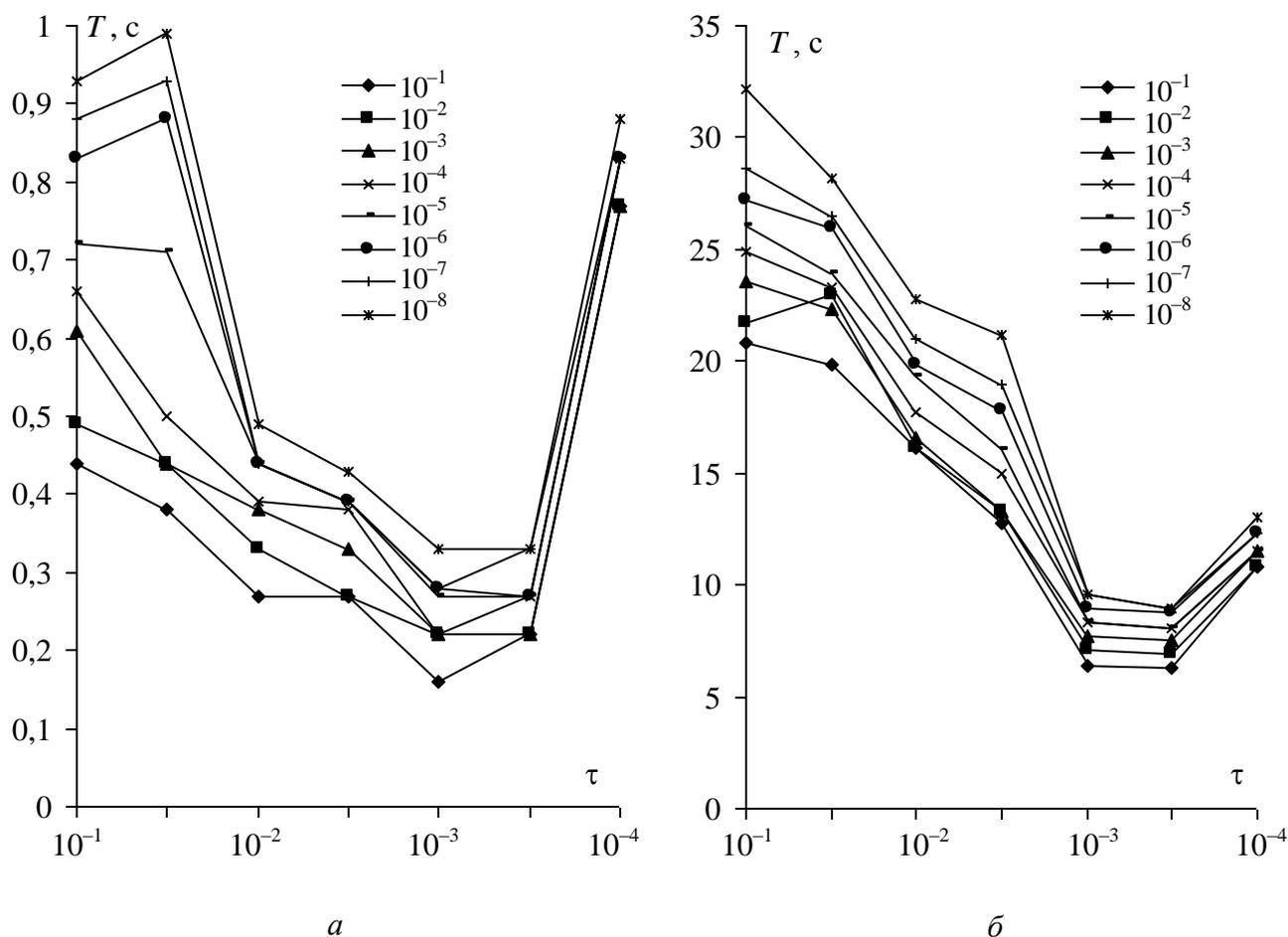


Рисунок 5.3 – Зависимости времени решения СЛАУ от τ для разных tol при $N = 243$ (а) и 1023 (б)

Таблица 5.5 – Результаты вычислений при $\tau = 10^{-3}$ для линейной антенны с матрицей $N = 1023$

tol	T , с	N_{it}	$Re(i_1)$, мА	$Im(i_1)$, мА	$Re(i_{1022})$, А	$Im(i_{1022})$, мА
10^{-1}	6,42	9	-1,1375442057	2,3606560246	$-3,6249794809 \cdot 10^{-4}$	1,4353148535
10^{-2}	7,09	10	-1,1371536423	2,3605465706	$-3,6221192711 \cdot 10^{-4}$	1,4354817163
10^{-3}	7,69	11	-1,1371697921	2,3605427917	$-3,6221681167 \cdot 10^{-4}$	1,4354648278
10^{-4}	8,29	12	-1,1371694528	2,3605428828	$-3,6221694059 \cdot 10^{-4}$	1,4354651706
10^{-5}	8,29	12	-1,1371694528	2,3605428828	$-3,6221694059 \cdot 10^{-4}$	1,4354651706
10^{-6}	8,96	13	-1,1371694505	2,3605428747	$-3,6221693789 \cdot 10^{-4}$	1,4354651790
10^{-7}	9,61	14	-1,1371694503	2,3605428746	$-3,6221693767 \cdot 10^{-4}$	1,4354651789
10^{-8}	9,61	14	-1,1371694503	2,3605428746	$-3,6221693767 \cdot 10^{-4}$	1,4354651789
GE	98,92	–	-1,1371694503	2,3605428746	$-3,6221693766 \cdot 10^{-4}$	1,4354651789

Для выяснения зависимости оптимального значения τ от матрицы исследовались (в более широком диапазоне τ) более простые структуры, в частности, диполь с углом между лучами 180° и диполь с углом между лучами 15° , отличающийся характером изменения значений элементов матрицы с удалением от диагонали (особенность формирования матрицы СЛАУ при использовании МоМ). Зависимости времени решения СЛАУ (T , с) с матрицей $N = 969$ от τ для этих диполей при $tol = 10^{-8}$ приведены на рисунке 5.4а. Видно, что и для этих структур существует оптимальное значение τ . Выбор значений τ , близких к оптимальному, позволяет ускорить решение для угла 180° в 20 раз, а для угла 15° в 10 раз по сравнению с τ на краях диапазона. (На правой границе диапазона τ время решения почти совпадает со временем решения методом Гаусса). Отметим, что в точке $\tau = 10^{-3}$ затраты времени одинаковы для обеих структур, но изменение τ влево и вправо от этой точки даёт изменения времени решения СЛАУ, значительные и противоположные для разных структур. Обращает на себя внимание и то, что рост скорости убывания значений элементов матрицы с удалением от диагонали сдвигает вправо оптимальное значение τ и расширяет (на два порядка в сторону меньших значений) диапазон значений τ , близких к оптимальному.

Поясним причину самого факта наличия оптимального значения τ на одном из рассмотренных выше примеров. Она хорошо видна из различной зависимости от τ двух основных составляющих общего времени решения СЛАУ: времени LU-разложения матрицы A_S , выполняемого только один раз до итераций, и времени на N_{ii} последующих итераций (см. рисунок 5.4б). Первая составляющая (T_1 , с) пренебрежимо мала слева от оптимального значения τ , но с удалением вправо от него всё более доминирует в общем времени решения СЛАУ. Отметим, что в этой части графика характер зависимости T_1 от τ полностью совпадает с характером зависимости процента ненулевых элементов (NonZero) матрицы M . Вторая составляющая пропорциональна значению N_{ii} и, как видно, полностью определяет время решения СЛАУ слева от оптимального значения τ и всё меньше влияет справа. В итоге у середины диапазона τ (где значения составляющих равны) общее время решения СЛАУ минимально.

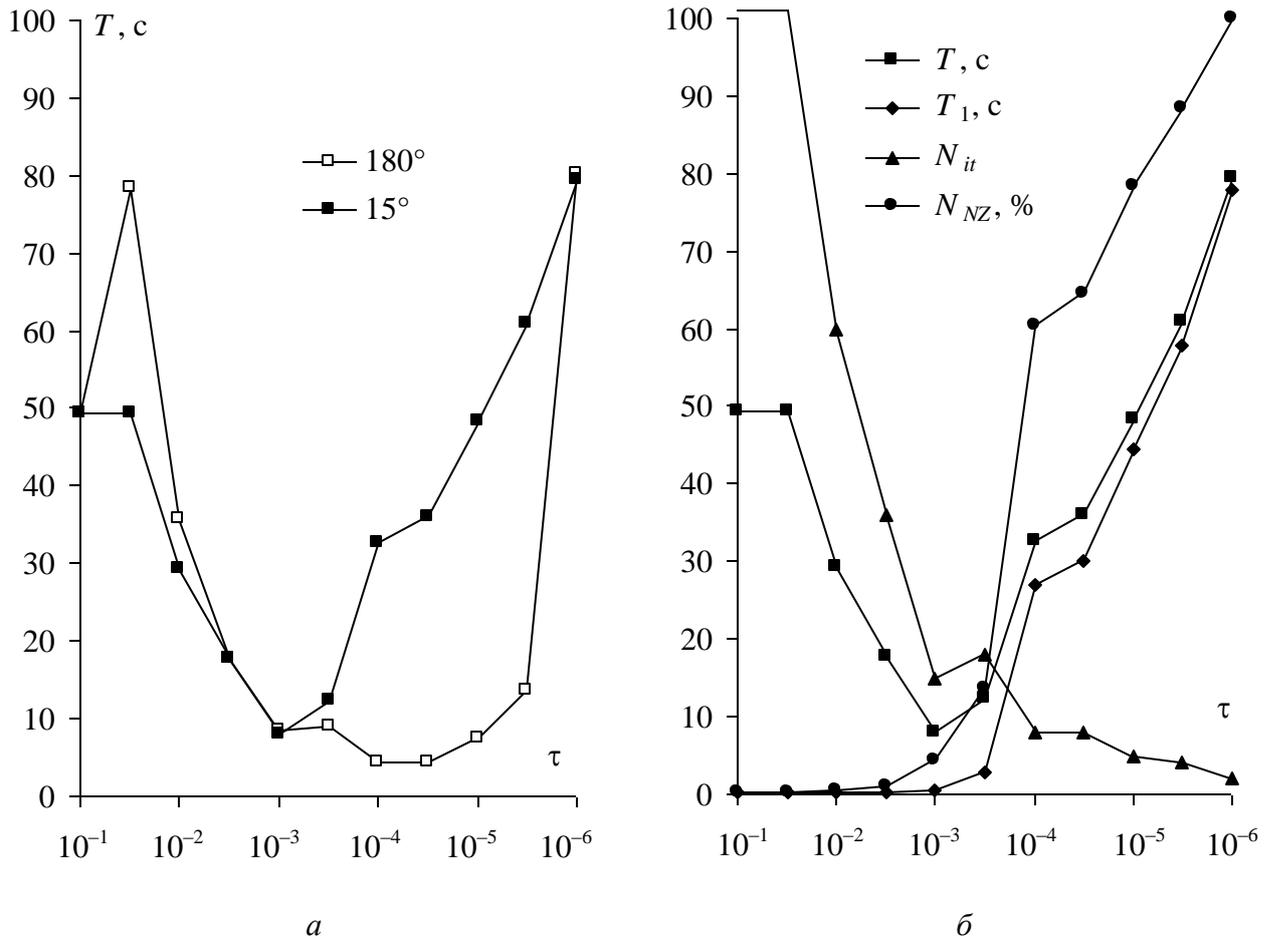


Рисунок 5.4 – Зависимости характеристик решения СЛАУ от τ при $N = 969$: время решения СЛАУ для угла между лучами диполя 180° и 15° (а); характеристики для угла 15° (б)

5.1.3 Ускорение анализа за счет снижения его точности

В данном пункте рассматривается решение СЛАУ методом BiCGStab с предобуславливанием. Приводятся результаты исследования работы этого метода, на примере получения ДН антенны, при изменении точности вычислений. Показано, что можно получить ускорение за счет снижения точности вычисления до достаточной для получения заданных характеристик (в частности, ДН). Раздел основан на работах [672, 719].

Решение, полученное итерационными методами, в отличие от решения точными методами, получается приближенным. Теоретически, при устремлении количества итераций к бесконечности, итерационный процесс закончится получением решения, полностью совпадающего с решением, полученным точным методом. Поскольку зачастую нет необходимости в получении точного решения, то дополнительное ускорение итерационного

процесса можно достичь за счет снижения точности до достаточной для получения требуемых характеристик. Отметим, что этого в принципе нельзя получить точными методами.

Результаты такого ускорения на примере вычисления ДН линейной антенны (рисунок 5.1б) сведены в таблицу 5.6. В качестве способа вычисления предобусловливателя использовалось полное LU-разложение, а предфильтрации – предложенный подход (2.1), основанный на нормах строк матрицы. В первой строке таблицы приводится время, затрачиваемое на формирование матрицы предобусловливания. В последующих строках приведено время решения СЛАУ методом BiCGStab (при оптимальном допуске обнуления $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ по критерию оптимизации времени решения СЛАУ) при увеличении количества итераций N_{it} , а в последней – методом Гаусса (GE). Также приведены второй и последний элементы вектора решения (модуля тока в сегментах антенны).

Таблица 5.6 – Время решения СЛАУ ($N = 1411$) методом Гаусса и методом BiCGStab ($\tau = 5 \cdot 10^{-5}$) при увеличении количества итераций

Метод	N_{it}	T, c	x_1	x_{1411}
(2.1)+LU	0	11,42	–	–
BiCGStab	1	12,19	$6,1799428153 \cdot 10^{-3}$	$3,6922306960 \cdot 10^{-3}$
	2	13,34	$1,1093077151 \cdot 10^{-2}$	$6,4877950767 \cdot 10^{-3}$
	3	14,72	$6,4470277177 \cdot 10^{-3}$	$5,5342527383 \cdot 10^{-3}$
	4	15,82	$8,7150023440 \cdot 10^{-3}$	$6,2481368771 \cdot 10^{-3}$
	5	17,08	$9,2612834651 \cdot 10^{-3}$	$6,4110392615 \cdot 10^{-3}$
	6	18,35	$9,2751980061 \cdot 10^{-3}$	$6,4162720824 \cdot 10^{-3}$
	7	19,67	$9,2899504274 \cdot 10^{-3}$	$6,4222883724 \cdot 10^{-3}$
	8	20,77	$9,2776336596 \cdot 10^{-3}$	$6,4186168278 \cdot 10^{-3}$
	9	22,14	$9,2761160171 \cdot 10^{-3}$	$6,4180791769 \cdot 10^{-3}$
	10	23,23	$9,2764746391 \cdot 10^{-3}$	$6,4181979509 \cdot 10^{-3}$
	11	24,50	$9,2765681960 \cdot 10^{-3}$	$6,4182244732 \cdot 10^{-3}$
	12	25,71	$9,2763884668 \cdot 10^{-3}$	$6,4181706239 \cdot 10^{-3}$
	13	27,08	$9,2763808296 \cdot 10^{-3}$	$6,4181681950 \cdot 10^{-3}$
	14	28,17	$9,2763809832 \cdot 10^{-3}$	$6,4181682487 \cdot 10^{-3}$
GE	–	267,54	$9,2763810168 \cdot 10^{-3}$	$6,4181682591 \cdot 10^{-3}$

Из таблицы 5.6 видно, что после 14 итераций решение методом BiCGStab, совпадающее с точностью до 5–7 знаков после запятой с решением метода Гаусса, получено в 9 раз быстрее. Решение с точностью до 1–2 знаков после запятой получено в 15 раз быстрее, и после 5 итераций. Отметим, что после 2 итераций решение получено в 20 раз быстрее чем методом Гаусса, при этом полученные ДН практически совпадают (рисунок 5.5). Таким образом, на рассмотренном примере использование вместо метода Гаусса итерационного методу с

контролем заданной точности, для получения требуемых характеристик (в данном случае ДН), за счет увеличения количества итераций, значительно ускоряет решение.

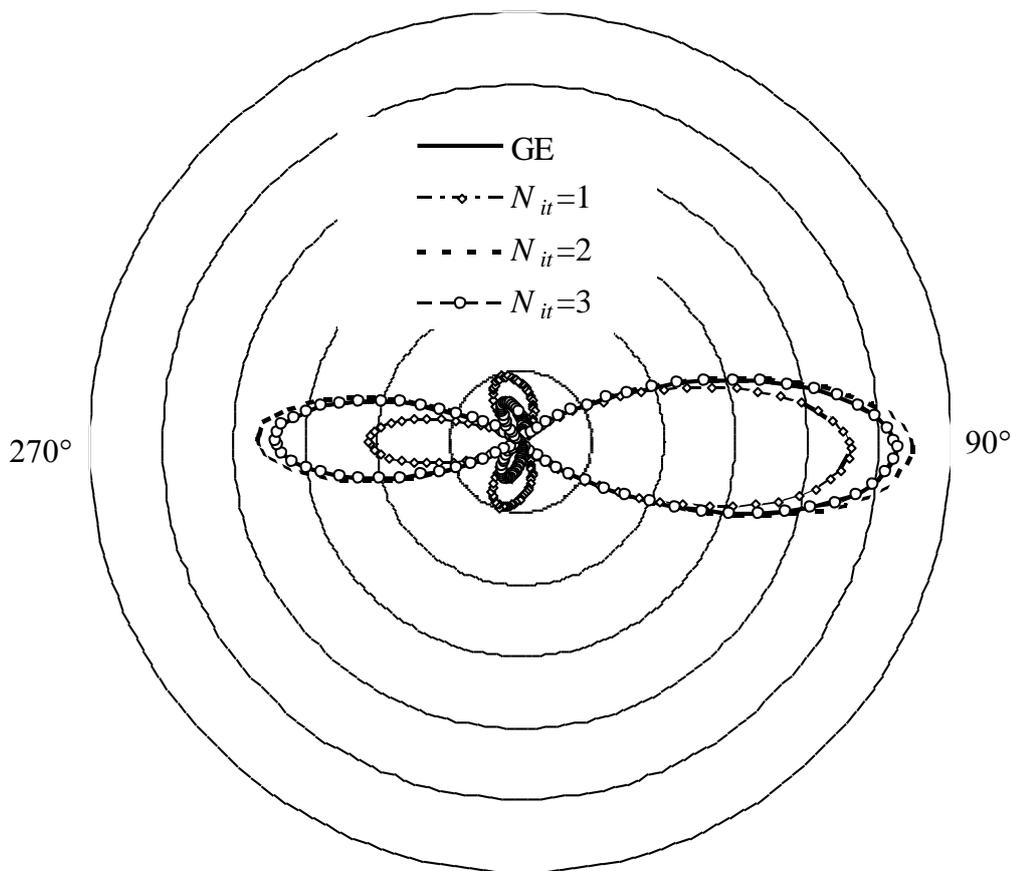


Рисунок 5.5 – ДН ($|E_\varphi|$, шкала линейная от 0 до 6 В/м) антенны из рисунка 5.1б в плоскости XY при решении СЛАУ методом Гаусса (GE) и методом BiCGStab при увеличении количества итераций

5.1.4 Сравнение способов предфильтрации

В данном пункте выполнено сравнение известных способов предфильтрации (1.46)–(1.49) с предложенными (2.1) и (2.2). Показано, что выбором способа предфильтрации можно уменьшить время решения СЛАУ на 40%, а в сравнении с методом Гаусса – в 12 раз. Выявлена стабильность оптимального значения допуска обнуления в случае использования предложенного способа предфильтрации (2.1). Раздел основан на работах [624, 625, 720].

Вычисления методами BiCG, BiCGStab и CGS производились в системе TALGAT на примере вычисления токов в трапецевидной зубчатой линейной антенне (рисунок 5.1а) на частотах 4, 6, ..., 12 ГГц. При этом соответственно увеличивалось значение N , поскольку уменьшалась длина сегмента, связанная с длиной волны. За начальное приближение вектора

решения принималось равенство всех его элементов 0,1. Итерации останавливались при $tol < 10^{-8}$ или достижении 180 итераций. (Для способов (1.46), (1.47) и (1.49) полагалось, что $\varepsilon = \tau$.)

В таблице 5.7 для разных частот приведены характеристики решаемой задачи: порядок СЛАУ (N), плотность матрицы СЛАУ (q_A), время её заполнения (T_{FILL}) и время решения методом Гаусса (T_{GE}). Видно, что с увеличением частоты в общих затратах все больше преобладает время решения СЛАУ, что ярко показывает востребованность в итерационных методах.

Таблица 5.7 – Характеристики матрицы на разных частот для антенны из рисунка 5.1а

f , ГГц	N	q_A , %	T_{FILL} , с	T_{GE} , с
4	1003	99,9986	7	18
6	1503	99,9989	15	62
8	1981	99,9996	27	142
10	2477	99,9998	42	276
12	2975	99,9997	61	483

Результаты вычислений (время решения СЛАУ (T) и количество итераций (N_{it})) при использовании итерационных методов с предфильтрациями (1.46)–(1.49), (2.1) и (2.2) в сочетании с LU- и ILU(0)-разложениями, для вычисления предобусловливателя, приведены в таблицах 5.8 и 5.9 соответственно.

Зависимости времени решения СЛАУ методом BiCGStab от τ при $f = 12$ ГГц представлены на рисунке 5.6. Из приведенных данных видно, что использование полного LU-разложения предпочтительнее, чем неполного, для любого способа предфильтрации. Так, выигрыш варьируется от 5% до 29% для способов (1.49), (2.1) и (2.2) соответственно. Аналогичные зависимости времени решения СЛАУ методом CGS от τ приведены на рисунке 5.7. Из приведенных данных видно, что использование полного LU-разложения предпочтительнее (как и для метода BiCGStab), чем неполного, для любого способа предфильтрации. Так, выигрыш варьируется от 2% до 29% для способов и (2.2) соответственно.

Анализ данных, полученных методом BiCG (таблицы 5.8 и 5.9), также показывает, что выгоднее использовать полное LU-разложение. Выигрыш в данном случае варьируется от 10% до 31% для способов (2.1) и (1.48) соответственно. Таким образом, предложенная предфильтрация (2.1), основанная на нормах строк, имеет наименьший разброс во времени решения СЛАУ при использовании LU- и ILU(0)-разложений. Так, выигрыш варьируется от 2% до 10% для методов CGS и BiCG соответственно.

Таблица 5.8 – Результаты работы итерационных методов при использовании разных способов предфильтрации и LU-разложения для антенны из рисунка 5.1а и 12 ГГц

Предфильтрация	τ	BiCG		BiCGStab		CGS	
		T, c	N_{it}	T, c	N_{it}	T, c	N_{it}
(1.46)	$5 \cdot 10^{+1}$	341	147	189	96	176	86
	10^{+1}	192	89	110	61	107	57
	$5 \cdot 10^{+0}$	156	73	86	46	84	44
	10^{+0}	77	32	48	20	45	19
	$5 \cdot 10^{-1}$	68	23	40	13	40	13
	10^{-1}	391	12	374	7	374	7
(1.47)	10^{-1}	344	180	344	180	344	180
	$5 \cdot 10^{-2}$	294	147	164	96	162	86
	10^{-2}	187	89	112	62	108	56
	$5 \cdot 10^{-3}$	156	73	93	43	94	44
	10^{-3}	80	31	54	19	54	19
	$5 \cdot 10^{-4}$	68	25	53	15	51	14
(1.48)	10^{-4}	322	13	273	8	273	8
	$5 \cdot 10^{+1}$	256	150	224	126	178	86
	10^{+1}	158	73	84	43	85	44
	$5 \cdot 10^{+0}$	118	53	79	40	74	33
	10^{+0}	58	21	40	13	42	14
	$5 \cdot 10^{-1}$	177	19	157	12	155	11
(1.49)	10^{-1}	487	10	474	6	451	5
	10^{-1}	233	96	149	62	146	56
	$5 \cdot 10^{-2}$	189	89	130	72	111	53
	10^{-2}	91	38	60	25	60	25
	$5 \cdot 10^{-3}$	72	29	52	19	45	16
	10^{-3}	211	15	188	8	188	8
(2.1)	$5 \cdot 10^{-4}$	442	12	408	6	416	7
	10^{-1}	268	144	226	125	216	97
	$5 \cdot 10^{-2}$	189	89	132	75	118	55
	10^{-2}	92	38	65	29	61	24
	$5 \cdot 10^{-3}$	80	31	50	18	52	19
	10^{-3}	220	16	180	9	182	10
(2.2)	$5 \cdot 10^{-4}$	332	13	315	9	298	7
	$5 \cdot 10^{-3}$	223	147	185	96	174	86
	10^{-3}	190	89	135	62	124	56
	$5 \cdot 10^{-4}$	162	73	86	43	87	44
	10^{-4}	83	31	50	20	49	19
	$5 \cdot 10^{-5}$	74	25	45	15	43	14
	10^{-5}	311	13	257	8	248	7

Таблица 5.9 – Результаты работы итерационных методов при использовании разных способов предфильтрации и LU(0)-разложения для антенны из рисунка 5.1а и 12 ГГц

Предфильтрация	τ	BiCG		BiCGStab		CGS	
		T, c	N_{it}	T, c	N_{it}	T, c	N_{it}
(1.46)	$5 \cdot 10^{+1}$	263	167	220	126	190	93
	10^{+1}	210	109	182	108	128	65
	$5 \cdot 10^{+0}$	181	87	129	75	107	51
	10^{+0}	107	47	59	31	56	26
	$5 \cdot 10^{-1}$	83	33	51	21	49	19
	10^{-1}	120	28	90	17	92	18
	$5 \cdot 10^{-1}$	323	23	305	17	294	13
(1.47)	10^{-1}	263	167	213	126	177	93
	$5 \cdot 10^{-2}$	191	109	162	94	132	64
	10^{-2}	185	87	134	75	117	57
	$5 \cdot 10^{-3}$	112	51	66	30	66	30
	10^{-3}	91	39	59	25	57	22
	$5 \cdot 10^{-4}$	105	26	73	16	72	15
	10^{-4}	288	23	253	7	253	7
(1.48)	$5 \cdot 10^{+1}$	359	167	222	121	191	90
	10^{+1}	183	87	133	75	122	57
	$5 \cdot 10^{+0}$	164	76	95	50	90	41
	10^{+0}	84	34	52	21	52	21
	$5 \cdot 10^{-1}$	87	33	54	20	54	20
	10^{-1}	278	24	251	15	251	15
	$5 \cdot 10^{-2}$	403	21	390	11	390	11
(1.49)	10^{-1}	237	105	177	101	131	64
	$5 \cdot 10^{-2}$	229	111	167	92	126	61
	10^{-2}	126	57	76	32	77	33
	$5 \cdot 10^{-3}$	91	44	63	24	63	24
	10^{-3}	85	27	55	17	53	16
	$5 \cdot 10^{-4}$	142	27	109	15	109	15
	10^{-4}	508	21	505	13	477	11
(2.1)	10^{-1}	282	165	267	147	171	87
	$5 \cdot 10^{-2}$	221	109	149	82	129	62
	10^{-2}	143	58	76	38	75	32
	$5 \cdot 10^{-3}$	114	51	68	32	64	28
	10^{-3}	89	30	53	17	53	17
	$5 \cdot 10^{-4}$	123	25	80	17	80	17
	10^{-4}	465	22	437	13	437	13

Продолжение таблицы 5.9

(2.2)	$5 \cdot 10^{-2}$	400	180	329	180	329	180
	$5 \cdot 10^{-3}$	337	167	219	126	182	93
	10^{-3}	238	109	170	94	134	64
	$5 \cdot 10^{-4}$	188	87	139	75	123	57
	10^{-4}	147	51	69	30	68	29
	$5 \cdot 10^{-5}$	96	39	64	26	61	22
	10^{-5}	104	26	69	15	69	15
	$5 \cdot 10^{-6}$	243	23	233	14	233	14

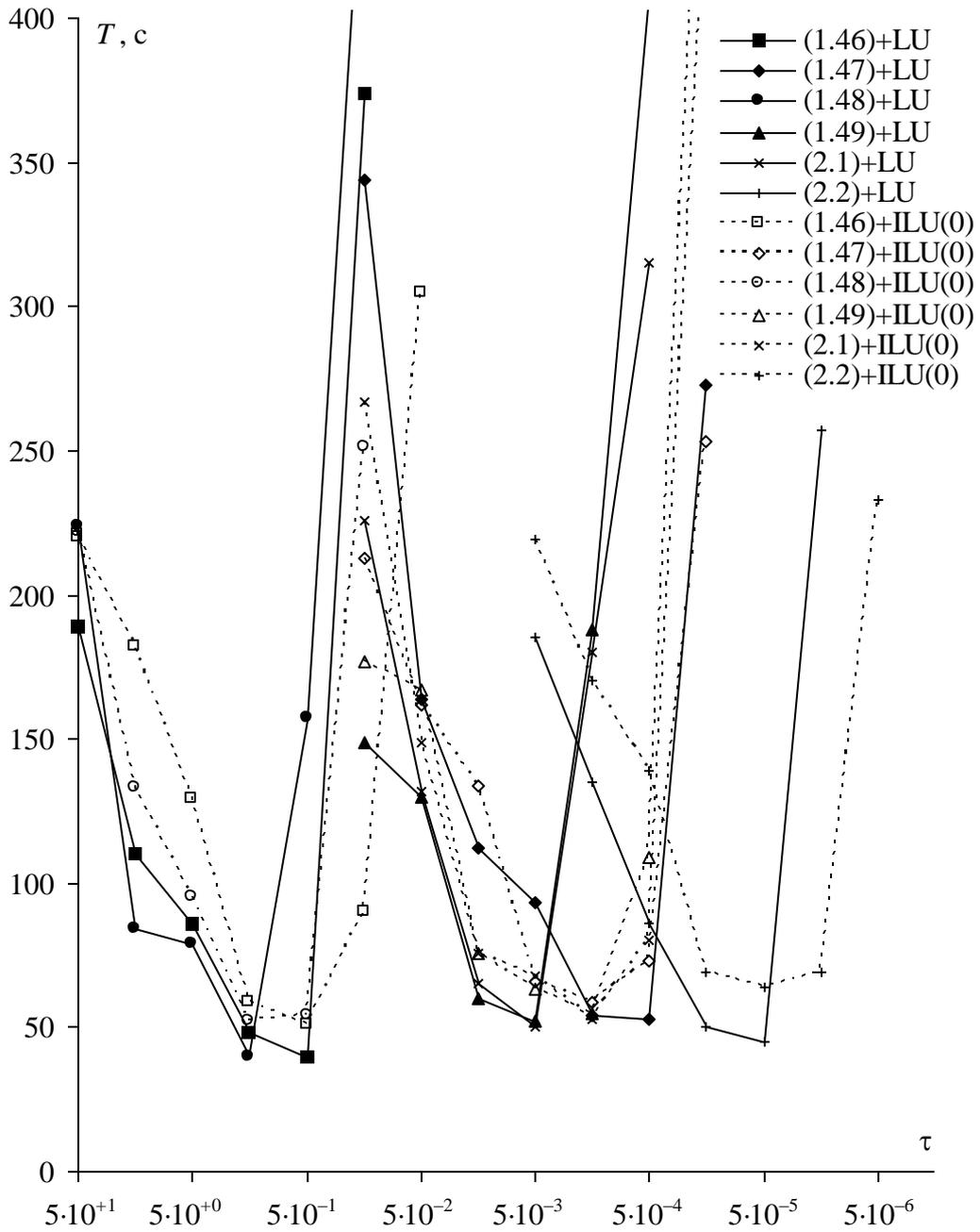


Рисунок 5.6 – Зависимости времени решения СЛАУ методом BiCGStab от допуска обнуления при разных способах предфильтрации и вычисления предобусловливателя для антенны из рисунка 5.1а и 12 ГГц

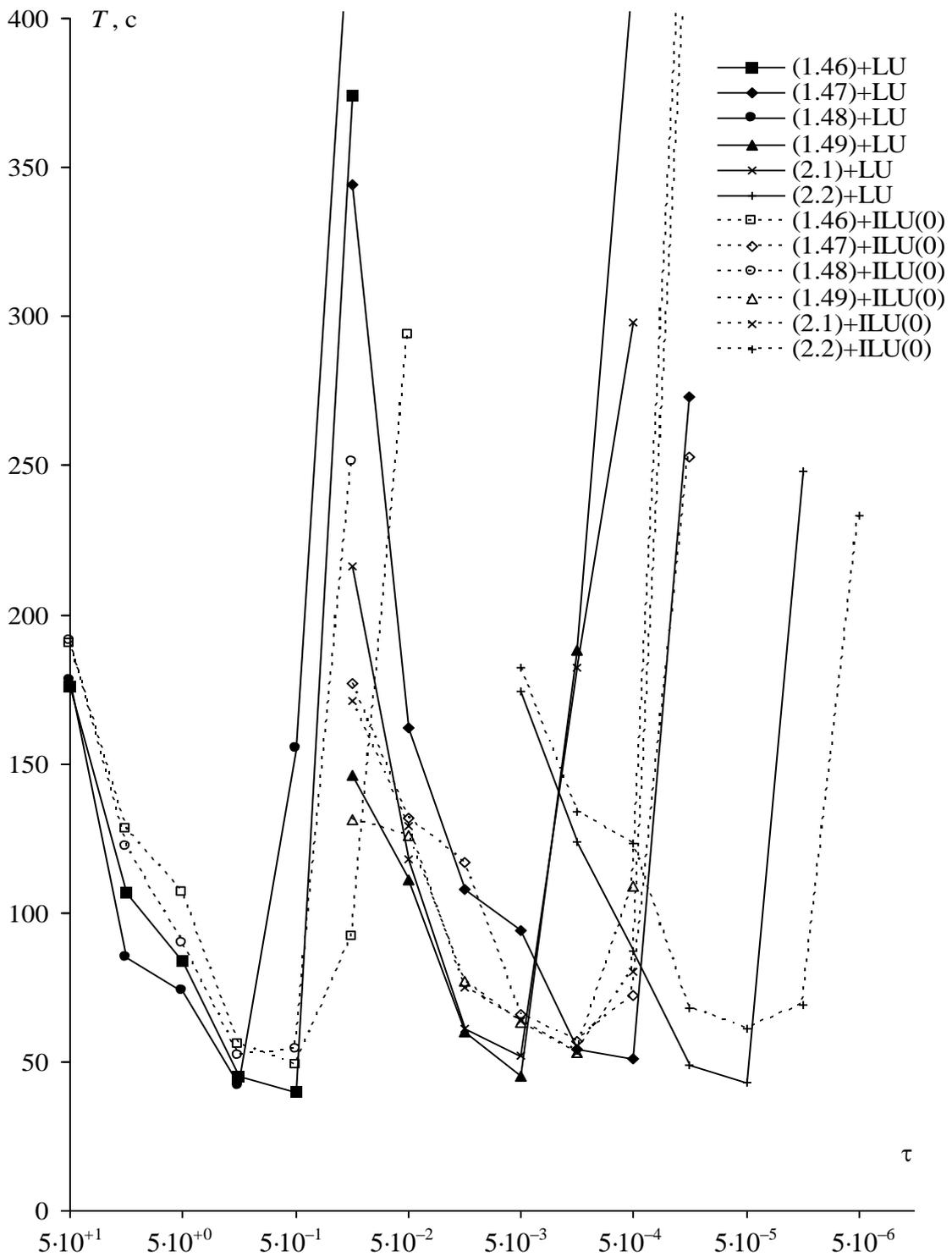


Рисунок 5.7 – Зависимости времени решения СЛАУ методом CGS от допуска обнуления при разных способах предфильтрации и вычисления предобусловливателя для антенны из рисунка 5.1а и 12 ГГц

Полученные данные подтверждают ранее сделанный вывод, что предпочтительнее использовать методы CGS и BiCGStab в сочетании с полным LU-разложением для вычисления

предобусловливателя. Таким образом, за счет выбора метода, способов предфилтратции и предобусловливания можно добиться значительного сокращения времени решения СЛАУ. Так, выбор метода BiCGStab с полным LU-разложением и предфилтратцией (1.46) сокращает время решения СЛАУ более чем в 2 раза, по сравнению с методом BiCG с ILU(0)-разложением и предфилтратцией (2.2).

На рисунке 5.8 приведено время решения СЛАУ методом BiCGStab с предфилтратциями (1.46)–(1.49), (2.1) и (2.2) (при оптимальных значениях τ) для частот 4, 6, ..., 12 ГГц при использовании полного LU- и ILU(0)-разложений соответственно. Аналогичные результаты, при использовании метода CGS, приведены на рисунке 5.9.

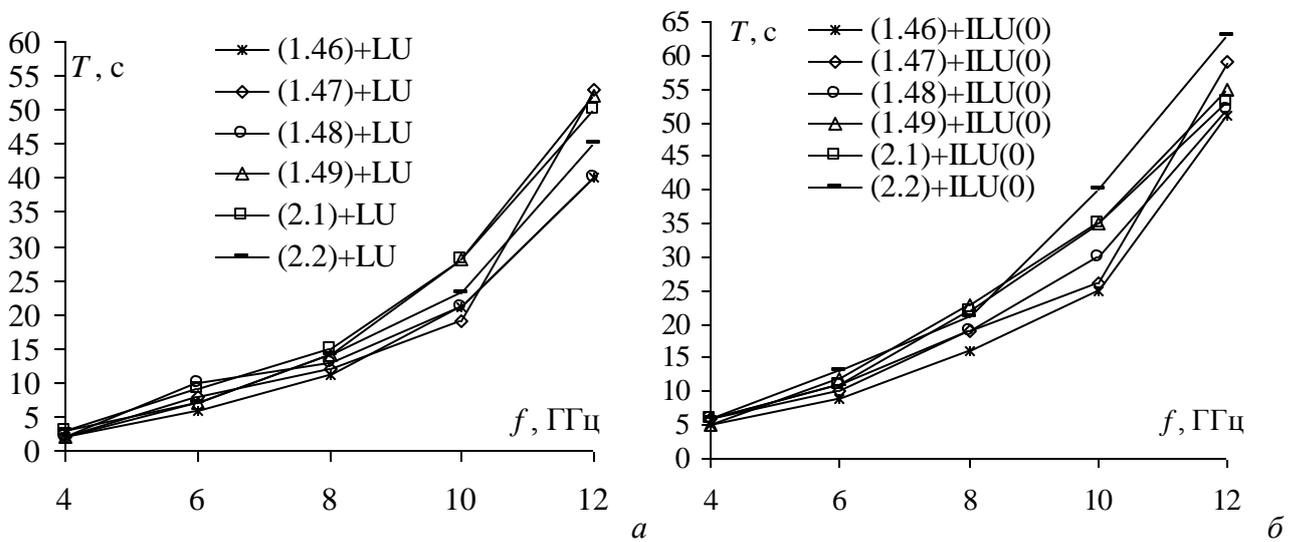


Рисунок 5.8 – Зависимости минимального времени решения СЛАУ методом BiCGStab от частоты для антенны из рисунка 5.1а при различных способах предфилтратции с предобусловливанием, основанным на полном LU-разложении (а) и ILU(0)-разложении (б)

Из рисунка 5.8 видно, что на любой частоте (кроме случая использования полного LU-разложения для частоты 10 ГГц) наилучшим (по критерию минимизации времени) является самый простой способ предфилтратции (1.46), причем вне зависимости от вида разложения. Наибольшее расхождение во времени решения СЛАУ при разной предфилтратции для разных частот в зависимости от использованного разложения различно. Так, при использовании полного LU-разложения получен выигрыш до 40% с предфилтратцией (1.46) по отношению к (1.48) (для 6 ГГц). В случае же ILU(0)-разложения с предфилтратцией (1.46) выигрыш составляет до 37% относительно способа (2.2) (для 10 ГГц).

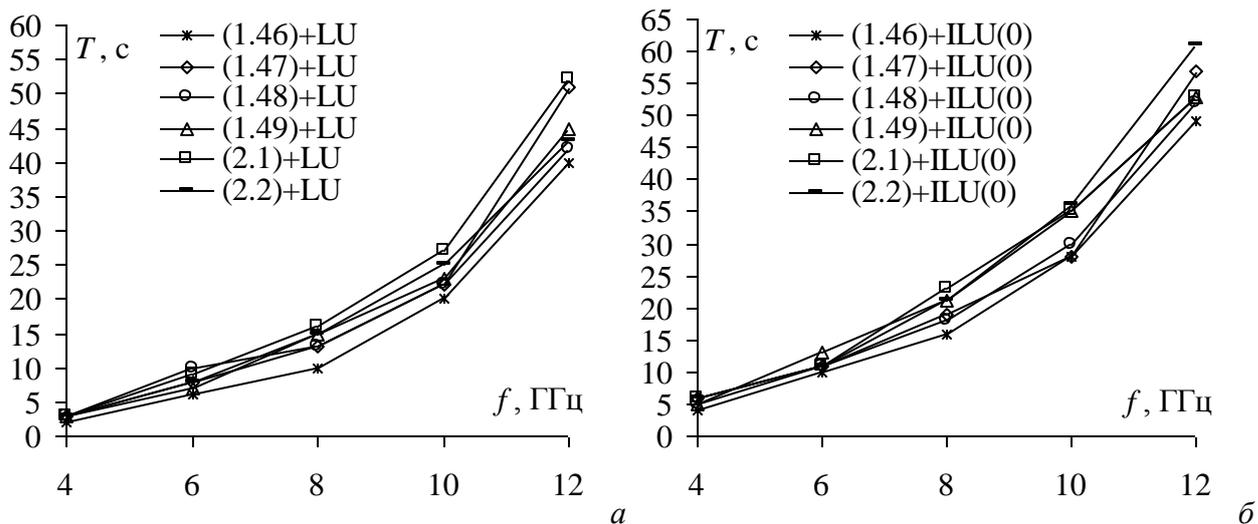


Рисунок 5.9 – Зависимости минимального времени решения СЛАУ методом CGS от частоты для антенны из рисунка 5.1а при различных способах предфильтрации с предобуславливанием, основанным на полном LU-разложении (а) и ILU(0)-разложении (б)

При использовании метода CGS (рисунок 5.9) на любой частоте наилучшим (по критерию минимизации времени) также является способ (1.46), причем опять же вне зависимости от вида разложения. Использование полного LU-разложения даёт тот же самый выигрыш, как и при использовании метода BiCGStab, до 40% с предфильтрацией (1.46) по отношению к (1.48) (для 6 ГГц). При замене полного LU-разложения неполным и использовании предфильтрации (1.46) выигрыш составляет до 30% относительно способа (2.1) (для 8 ГГц).

В таблице 5.10 представлены следующие результаты использования метода BiCGStab (при оптимальном значении τ и использовании полного LU-разложения при формировании предобуславливателя): время предфильтрации (T_1), плотность матрицы \mathbf{A}_S (q_{A_S}), время формирования матрицы предобуславливания (T_2), плотность матрицы \mathbf{M} (q_M), общее время решения СЛАУ (T , с) и количество итераций (N_{it}), требуемое для достижения заданной точности.

Таблица 5.10 – Результаты использования метода BiCGStab с различными способами предфильтрации при оптимальных значениях τ для антенны из рисунка 5.1а и 12 ГГц

Предфильтрация	τ_{opt}	$q_{A_S}, \%$	$q_M, \%$	T_1, c	T_2, c	T, c	N_{it}
(1.46)	$5 \cdot 10^{-1}$	0,82	2,24	4,15	7,46	40	13
(1.47)	$5 \cdot 10^{-4}$	0,70	1,59	8,80	14,85	53	15
(1.48)	10^{+0}	0,77	1,73	7,45	11,30	40	13
(1.49)	$5 \cdot 10^{-3}$	0,59	1,18	7,31	10,48	52	19
(2.1)	$5 \cdot 10^{-3}$	0,51	0,94	11,25	13,11	50	18
(2.2)	$5 \cdot 10^{-5}$	0,69	1,55	10,95	13,65	45	15

Как видно из таблицы 5.10, для любой предфильтрации при оптимальном τ плотность матрицы A_S составляет менее 1%. На рисунке 5.10 для наглядности приведена структура (портрет) этой матрицы после предфильтрации (1.46) при оптимальном значении τ . Для других способов заполненность еще меньше.

Из таблиц 5.7 и 5.10, а также рисунка 5.8, видно увеличение временного выигрыша за счет использования метода BiCGStab по сравнению с методом Гаусса при росте частоты. Так, для 4 ГГц максимальный выигрыш составляет 9 раз, а для 12 ГГц он возрастает до 12 раз. Примечательно, что затраты на решение СЛАУ становятся меньше, чем на формирование её матрицы.

В таблице 5.11 приведены установленные оптимальные значения τ по критерию минимизации общего времени решения СЛАУ при использовании метода BiCGStab. Результаты приведены для полного LU-разложения и неполного (в скобках) ILU(0)-разложения при изменении частоты.

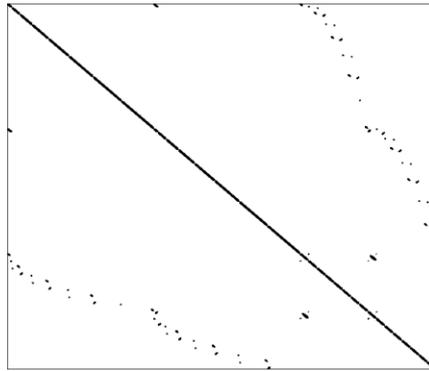


Рисунок 5.10 – Структура матрицы СЛАУ после предфильтрации (1.46) при $\tau = 5 \cdot 10^{-1}$ для антенны из рисунка 5.1а

Таблица 5.11 – Оптимальные значения τ по критерию минимизации времени решения СЛАУ для способов предфильтрации при использовании LU и ILU(0) (в скобках) разложений и метода BiCGStab для антенны из рисунка 5.1а

Предфильтрация	f , ГГц				
	4	6	8	10	12
(1.46)	$10^{+0} (5 \cdot 10^{-1})$	$10^{+0} (5 \cdot 10^{-1})$	$5 \cdot 10^{-1} (5 \cdot 10^{-1})$	$5 \cdot 10^{-1} (5 \cdot 10^{-1})$	$5 \cdot 10^{-1} (5 \cdot 10^{-1})$
(1.47)	$5 \cdot 10^{-3} (10^{-3})$	$5 \cdot 10^{-3} (10^{-3})$	$10^{-3} (5 \cdot 10^{-4})$	$5 \cdot 10^{-4} (5 \cdot 10^{-4})$	$5 \cdot 10^{-4} (5 \cdot 10^{-4})$
(1.48)	$10^{+0} (10^{+0})$	$5 \cdot 10^{+0} (10^{+0})$	$10^{+0} (10^{+0})$	$10^{+0} (10^{+0})$	$10^{+0} (10^{+0})$
(1.49)	$5 \cdot 10^{-3} (10^{-3})$	$5 \cdot 10^{-3} (5 \cdot 10^{-3})$	$5 \cdot 10^{-3} (5 \cdot 10^{-3})$	$5 \cdot 10^{-3} (5 \cdot 10^{-3})$	$5 \cdot 10^{-3} (10^{-3})$
(2.1)	$5 \cdot 10^{-3} (10^{-3})$				
(2.2)	$5 \cdot 10^{-4} (5 \cdot 10^{-5})$	$5 \cdot 10^{-5} (5 \cdot 10^{-5})$	$5 \cdot 10^{-5} (5 \cdot 10^{-5})$	$5 \cdot 10^{-5} (5 \cdot 10^{-4})$	$5 \cdot 10^{-5} (5 \cdot 10^{-5})$

Из таблицы 5.11 видно, что при использовании предложенной предфильтрации (2.1) оптимальное значение допуска обнуления остается одним и тем же, чего нельзя сказать о случаях использования других способов предфильтрации. Способ (2.2) показал стабильность для частот более 4 ГГц. Такая стабильность весьма важна, поскольку она минимизирует затраты времени при многовариантном анализе в большом числе частотных точек или при оптимизации по частоте, широко применяемым на практике. Поэтому, с целью подтверждения обнаруженной стабильности оптимального значения допуска обнуления (по критерию минимального времени решения СЛАУ), при использовании предложенного способа (2.1), были проведены вычисления методом BiCGStab в большем количестве частотных точек (4, 4,5, 5, ..., 12 ГГц). В результате была подтверждена обнаруженная стабильность оптимального значения допуска обнуления при использовании с полным LU-разложением равного $5 \cdot 10^{-3}$ и при использовании с ILU(0)-разложением равного 10^{-3} . На рисунке 5.11 показаны полученные частотные зависимости времени: заполнения матрицы СЛАУ (FILL); решения методом Гаусса (GE); решения методом BiCGStab в сочетании с предфильтрацией (2.1) и полным LU-разложением; решения методом BiCGStab с предфильтрацией (2.1) и ILU(0)-разложением. Видно, что во всем диапазоне частот предпочтительнее использовать метод BiCGStab по сравнению с методом Гаусса, а также полное LU-разложение вместо ILU(0). Примечательно также и то, что затраты времени на решение СЛАУ меньше затрат на формирование матрицы вне зависимости от использованного способа вычисления предобусловливателя.

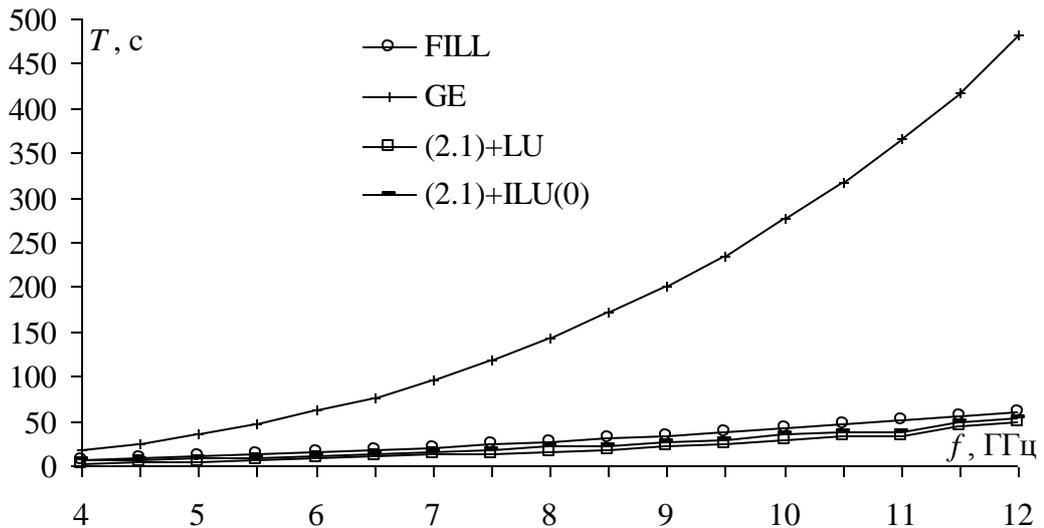


Рисунок 5.11 – Частотные зависимости времени: заполнения матрицы (FILL); решения методом Гаусса (GE); решения методом BiCGStab с предфильтрацией (2.1) и полным LU- и ILU(0)-разложениями для антенны из рисунка 5.1а

В дальнейшем, опять же для подтверждения обнаруженной стабильности оптимального значения допуска обнуления, проводились аналогичные вычисления методом BiCGStab в сочетании с предложенной предфильтрацией (2.1) и полным LU-разложением на примере определения токов в диполе (угол между лучами 180°) на частотах 300, 450, ..., 900 МГц. В таблице 5.12 для разных частот приведены характеристики решаемой задачи (аналогично таблице 5.7).

Таблица 5.12 – Характеристики матрицы на разных частотах для диполя с углом между лучами 180°

f , ГГц	N	q_A , %	T_{FILL} , с
300	1001	100	5
450	1501	100	13
600	2001	100	23
750	2501	100	37
900	3001	100	52

В таблице 5.13 приведены результаты (аналогично таблице 5.10) использования метода BiCGstab. Видно, что и на этом примере подтверждается стабильность оптимального значения допуска обнуления ($5 \cdot 10^{-5}$) при использовании предложенного способа предфильтрации. Также видно, что с ростом частоты для получения требуемого решения методу BiCGStab требуется незначительное увеличение количества итераций, а плотность матрицы после предфильтрации (A_S), соответствующая минимальному времени решения, снижается. Для наглядности на рисунке 5.12 приведена структура матрицы после предфильтрации при оптимальном значении допуска обнуления для частоты 900 МГц. Видно, что максимальные элементы группируются относительно главной диагонали, образуя, тем самым, ленточную матрицу.

Таблица 5.13 – Результаты использования метода BiCGStab с предфильтрацией (2.1) при оптимальных значениях τ на разных частотах для диполя с углом между лучами 180°

f , МГц	τ_{opt}	q_{A_S} , %	q_M , %	T , с	N_{it}
300	$5 \cdot 10^{-5}$	8,31	8,40	2	5
450	$5 \cdot 10^{-5}$	5,98	6,04	6	6
600	$5 \cdot 10^{-5}$	4,80	4,84	11	7
750	$5 \cdot 10^{-5}$	4,01	4,04	18	8
900	$5 \cdot 10^{-5}$	3,48	3,51	27	8

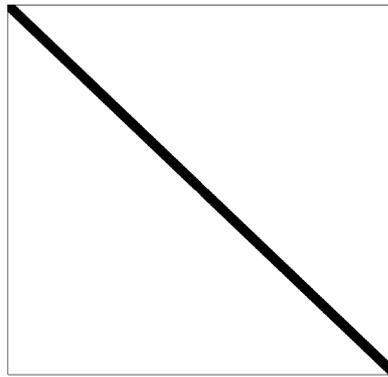


Рисунок 5.12 – Структура матрицы СЛАУ после предфильтрации (2.1) при $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ для диполя с углом между лучами 180°

Таким образом, выявлена стабильность оптимального значения допуска обнуления (по критерию минимизации времени) при использовании предложенного способа предфильтрации (2.1), на примере задачи определения токов в линейной антенне при изменении частоты. Стабильность показана для 2 антенн.

5.1.5 Влияние учащения сетки на оптимальное значение параметров предфильтрации

В данном пункте выполнено сравнение результатов работы предложенных автором способов предфильтрации (2.1) и (2.2) с результатами других способов при учащении сетки (дискретизации структуры). Для решения СЛАУ использовался метод BiCGStab с предобуславливанием. Выявлено изменение оптимального значения допуска обнуления для каждого способа предфильтрации. Пункт основан на работах [624, 721].

После сведения интегрального уравнения к СЛАУ с использованием МоМ вычислительные затраты идут на формирование (заполнение) матрицы и собственно на решение СЛАУ. Затраты на формирование можно снизить за счет использования аналитических формул вместо численного интегрирования. Еще одним способом уменьшения вычислительных затрат является корректный выбор детальности сетки (дискретизации) для конкретной задачи. Наименьшей приемлемой дискретизацией полагают $\lambda/10$ [87]. Учащение сетки (дискретизации) даёт более точные результаты, но, например, каждое учащение дискретизации в 2 раза удваивает порядок N матрицы СЛАУ. Это увеличивает затраты памяти, требуемые для её хранения, время её формирования в 4 раза (поскольку она состоит из N^2 элементов), а также общее время решения СЛАУ методом Гаусса в 8 раз (поскольку оно $\sim N^3$). Очевидно, что корректный выбор дискретизации позволяет существенно сократить вычислительные затраты. Наконец, если возможности дальнейшего снижения порядка матрицы

и уменьшения затрат времени на её формирование исчерпаны, то решение СЛАУ можно ускорить за счёт использования итерационных методов.

Дальнейшие вычисления производились в системе TALGAT на примере вычисления токов в трапециевидной зубчатой линейной антенне (рисунок 5.1а) при учащении дискретизации. При вычислениях использовался метод BiCGStab. За начальное приближение вектора решения принималось равенство всех его элементов 0,1. Итерации останавливались пока относительная норма невязки была больше 10^{-8} или при достижении максимального количества итераций $N_{it}^{max} = 180$ итераций. (Для способов предфильтрации (1.46), (1.47) и (1.49) полагалось $\varepsilon = \tau$.)

В таблице 5.14 для разного шага дискретизации приведены характеристики решаемой задачи (аналогично таблицам 5.7 и 5.12). Видно, что с учащением дискретизации в общих затратах все больше преобладает время решения СЛАУ. Таким образом, очевидна востребованность в итерационных методах.

Таблица 5.14 – Характеристики матрицы при разной дискретизации для антенны из рисунка 5.1а и частоты 3 ГГц

Дискретизация	N	$q_A, \%$	T_{FILL}, c	T_{GE}, c
$\lambda/10$	765	99,9974	4	8
$\lambda/20$	1513	99,9991	16	63
$\lambda/30$	2247	99,9997	35	206
$\lambda/40$	2997	99,9997	62	497

На рисунке 5.13 приведено время решения СЛАУ с предфильтрациями (1.46)–(1.49), (2.1) и (2.2) (при оптимальных τ) в зависимости от дискретизации для частоты 3 ГГц. Видно, что предложенные способы предфильтрации показали вполне приемлемые результаты, а наилучшим (по критерию минимизации времени) является самый простой способ предфильтрации (1.46). Также видно, что расхождение во времени решения СЛАУ при разных способах предфильтрации оказывается существенным. Так, выигрыш способа (1.46) по отношению к (1.49) при $\lambda/40$ достигает 30%. Таким образом, совершенствование предфильтрации актуально даже только из соображений уменьшения времени решения СЛАУ, а также, как будет показано далее, и по другим критериям.

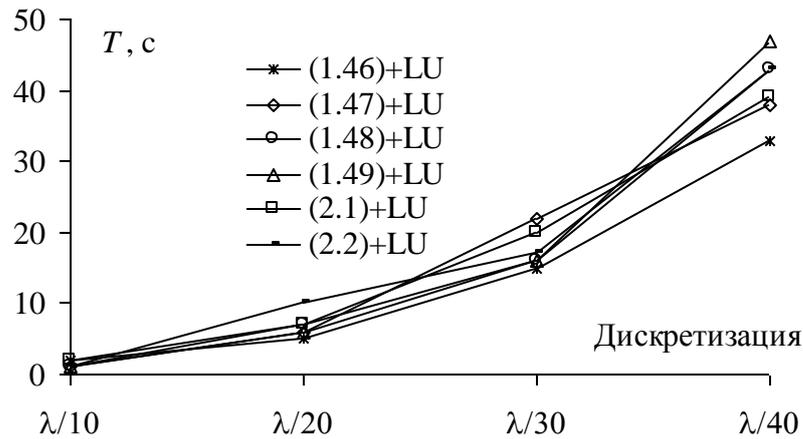


Рисунок 5.13 – Зависимости минимального времени решения СЛАУ методом BiCGStab от дискретизации антенны из рисунка 5.1а для различных способов предфильтрации

Были проведены аналогичные вычисления методом CGS. Полученные зависимости приведены на рисунке 5.14. Видно, что, как и в случае использования метода BiCGStab, предложенные способы показали приемлемые результаты, а в большинстве случаев (кроме случая $\lambda/40$) наилучшим (по критерию минимизации времени) является способ (1.46). Расхождение во времени решения СЛАУ при разных способах предфильтрации оказывается менее существенным, чем при использовании метода BiCGStab. Так, при дискретизации $\lambda/40$ выигрыш способа (1.49) по отношению к (1.47) достигает 15%.

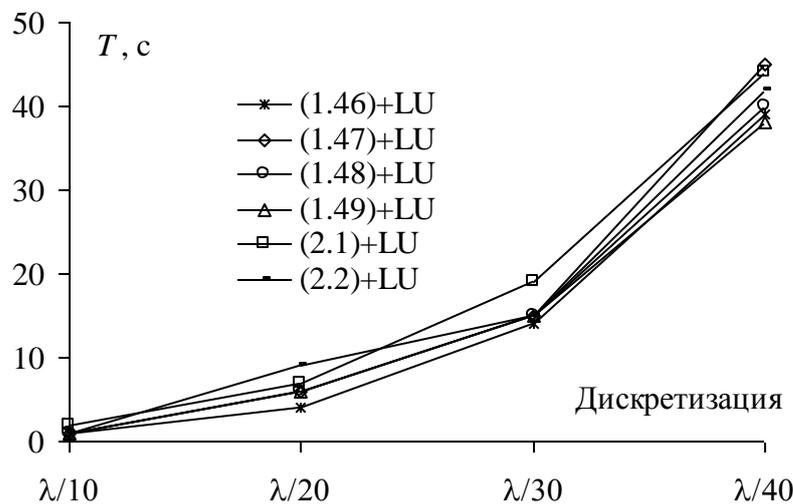


Рисунок 5.14 – Зависимости минимального времени решения СЛАУ методом CGS от дискретизации антенны из рисунка 5.1а для различных способов предфильтрации

Из данных таблицы 5.14 и рисунка 5.13 следует, что увеличение временного выигрыша за счет итерационного метода по сравнению с методом Гаусса при учащении дискретизации возрастает от 8 раз при $\lambda/10$ до 15 раз при $\lambda/40$. Примечательно, что затраты на решение СЛАУ

становятся меньше, чем на заполнение матрицы. В таблице 5.15 приведены результаты (аналогично таблице 5.10) использования различных способов предфильтрации (при оптимальном значении τ).

Таблица 5.15 – Результаты использования различных способов предфильтрации при оптимальных значениях τ и $\lambda/40$ (3 ГГц) для антенны из рисунка 5.1а

Предфильтрация	τ_{opt}	$q_{A_s}, \%$	$q_M, \%$	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T, \text{с}$	N_{it}
(1.46)	10^{-1}	1,69	3,34	3,82	9,65	33	8
(1.47)	10^{-4}	1,78	3,53	7,84	13,80	38	8
(1.48)	$5 \cdot 10^{-1}$	0,95	1,45	8,70	11,47	43	14
(1.49)	$5 \cdot 10^{-4}$	0,82	1,20	7,51	9,94	47	15
(2.1)	10^{-4}	1,68	3,30	11,50	17,17	39	8
(2.2)	$5 \cdot 10^{-6}$	1,01	1,58	10,97	13,86	43	13

Как было показано в предыдущем пункте (см. таблицу 5.10), для любой предфильтрации при оптимальном τ плотность матрицы A_s составляет менее 1%. В случае достижения примерно того же N , но за счет дискретизации (таблица 5.15) матрица является более плотной при любой предфильтрации. Для наглядности, структуры (портреты) этой матрицы после предфильтрации (1.46) при оптимальном τ для 12 ГГц ($\lambda/10$) и 3 ГГц ($\lambda/40$) приведены на рисунке 5.15. Видно, что учащение дискретизации при оптимальном допуске обнуления приводит к более выраженным ненулевым областям в матрице A_s .

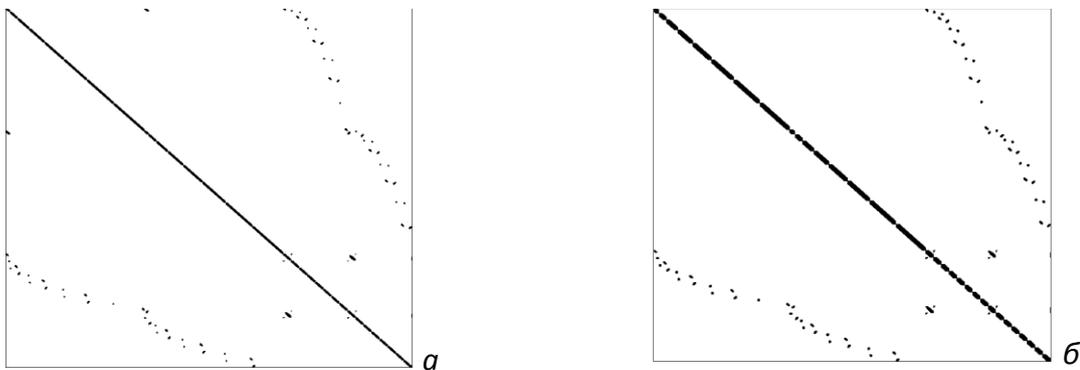


Рисунок 5.15 – Структуры матрицы СЛАУ для антенны из рисунка 5.1а

после предфильтрации (1.46) для 12 ГГц ($\lambda/10$) и $\tau = 5 \cdot 10^{-1}$ (а) и 3 ГГц ($\lambda/40$) и $\tau = 10^{-1}$ (б)

В таблице 5.16 приведены оптимальные значения τ по критерию минимизации общего времени решения СЛАУ при разной дискретизации для 3 ГГц. Видно, что ни один из способов не показал высокой стабильности оптимального допуска обнуления при изменении дискретизации во всем диапазоне. Способы (1.48) и (1.49) показали стабильность при дискретизации более $\lambda/10$. Для способов (1.47) и предложенного (2.1) шаг изменения дискретизации соответствует примерно шагу изменения оптимального допуска обнуления.

Таблица 5.16 – Оптимальные значения τ по критерию минимизации времени решения СЛАУ для антенны из рисунка 5.1а при изменении дискретизации и предфильтрации

Предфильтрация	Дискретизация			
	$\lambda/10$	$\lambda/20$	$\lambda/30$	$\lambda/40$
(1.46)	$5 \cdot 10^{+0}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}
(1.47)	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}
(1.48)	10^{+0}	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
(1.49)	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
(2.1)	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}
(2.2)	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$

Из таблиц 5.10 и 5.15 видно, что в большинстве случаев в общем времени вычисления предобусловливателя (T_2) преобладает часть, связанная с предфильтрацией (T_1). Таким образом, одним из способов снижения времени решения СЛАУ является снижение затрат времени на предфильтрацию. Так, решение для случая 3 ГГц ($\lambda/40$), за счет поиска только на главной диагонали, было сокращено с 38 с (при использовании способа (1.47)) до 33 с (при использовании усовершенствованного (1.47)) при неизменных значениях q_{As} , q_M и N_{it} . Таким образом, за счет предложенного усовершенствования удалось сократить время решения СЛАУ на 13%. Ту же задачу (3 ГГц, $\lambda/40$) при использовании подхода (2.3) удалось решить за 8 итераций и 35 с. В таблице 5.17 приведены результаты более детального исследования этого подхода. Видно, что шагу изменения дискретизации соответствует шаг изменения оптимального допуска обнуления.

Таблица 5.17 – Оптимальные значения τ по критерию минимизации времени решения СЛАУ для антенны из рисунка 5.1а при предфильтрации (2.3)

Дискретизация	$\lambda/10$	$\lambda/20$	$\lambda/30$	$\lambda/40$
τ_{opt}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}

5.1.6 Дополнительное сравнение способов предфильтрации

В данном пункте приведены результаты сравнения новых способов предфильтрации и их усовершенствований на примере еще одной конфигурации антенны. Показано изменение оптимального значения допуска обнуления для каждого способа предфильтрации.

Все вычисления производились в системе TALGAT на примере вычисления токов в широкодиапазонной линейной антенне (рисунок 5.1в) на частотах 165, 245, ..., 485 МГц. Как и ранее, использовался метод BiCGStab, за начальное приближение вектора решения принималось равенство всех его элементов 0,1, а итерации продолжались пока относительная

норма невязки была больше 10^{-8} или до достижения 180 итераций. (Для способов (1.46), (1.47) и (1.49) полагалось, что $\varepsilon = \tau$.)

В таблице 5.18 для разных частот приведены характеристики решаемой задачи и время решения методом Гаусса (T_{GE}). Аналогичные результаты для разной дискретизации приведены в таблице 5.19. Видно, что с увеличением как частоты, так и дискретизации в общих затратах все больше преобладает время решения СЛАУ. Опять же, очевидна востребованность в итерационных методах.

Таблица 5.18 – Характеристики матрицы СЛАУ для антенны из рисунка 5.16 на разных частотах

f , МГц	N	q_A , %	T_{FILL} , с	T_{GE} , с
165	991	100	7	17
245	1473	100	15	58
325	1951	100	26	136
405	2431	100	41	262
485	2909	100	59	464

Таблица 5.19 – Характеристики матрицы СЛАУ для антенны из рисунка 5.16 при разной дискретизации на частоте 125 МГц

Дискретизация	N	q_A , %	T_{FILL} , с	T_{GE} , с
$\lambda/10$	753	100	4	7
$\lambda/20$	1501	100	15	62
$\lambda/30$	2251	100	35	209
$\lambda/40$	2999	100	63	500

На рисунке 5.16 приведено время решения СЛАУ с предфильтрациями (1.46)–(1.49) и (2.1)–(2.4) (при оптимальных τ) в зависимости от частоты при дискретизации $\lambda/10$ и от дискретизации для частоты 125 МГц соответственно. Из графиков трудно выделить явное преимущество какого-либо способа предфильтрации. Однако расхождение во времени решения СЛАУ при разных способах предфильтрации оказывается существенным. Так, для 485 МГц получен выигрыш 23% с предфильтрацией (1.46) по отношению к (2.1). При изменении дискретизации выигрыш способа (1.46) по отношению к (2.1) при $\lambda/40$ достигает 17%. Таким образом, дальнейшее совершенствование предфильтрации актуально. Отметим, что для частоты 165 МГц максимальный временной выигрыш по сравнению с методом Гаусса составляет 5 раз, а для 485 МГц он возрастает до 9 раз. Выигрыш же во времени за счет дискретизации возрастает от 7 при $\lambda/10$ до 9 при $\lambda/40$. Полученные результаты сведены в таблицу 5.20 (при оптимальном значении τ и использовании полного LU-разложения для вычисления предобусловливателя). В строке 4 приведены результаты для усовершенствованного способа

(1.47) (далее (1.47)-У). Аналогичные результаты для частоты 125 МГц при дискретизации $\lambda/40$ приведены в таблице 5.21.

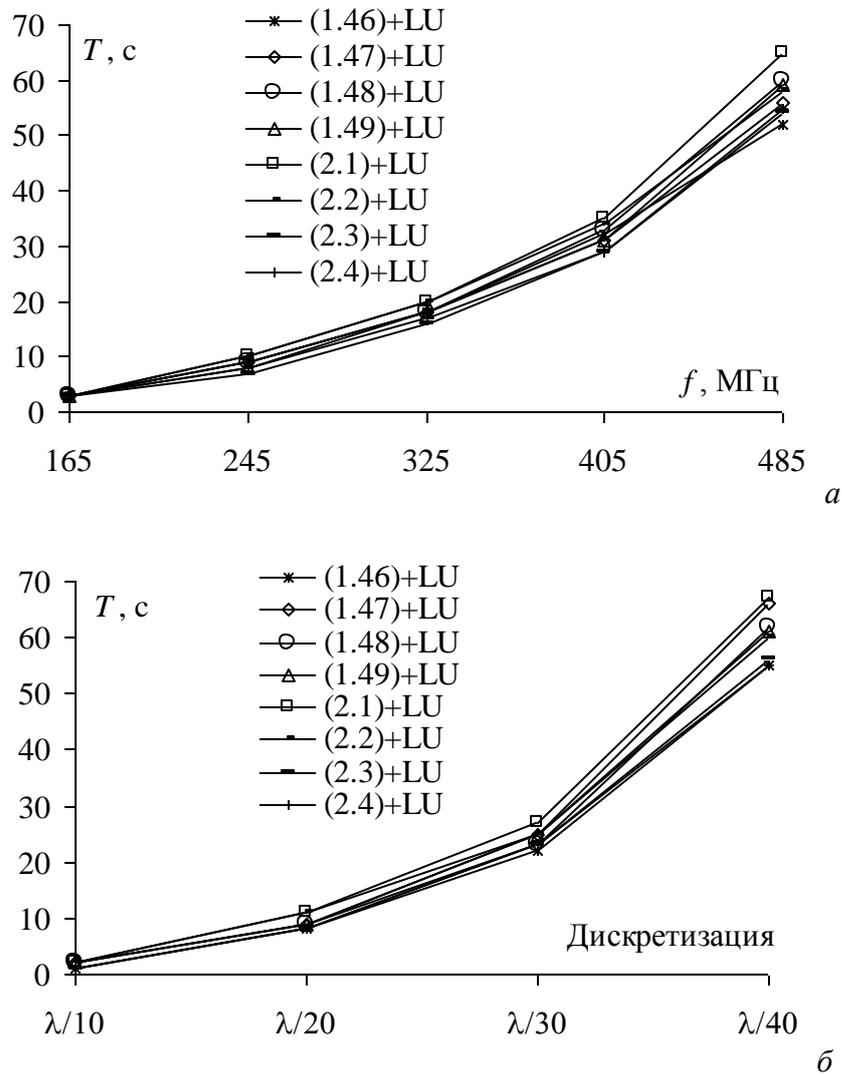


Рисунок 5.16 – Зависимости минимального времени решения СЛАУ

от частоты (а) и дискретизации (б) для различных способов предфильтрации

Таблица 5.20 – Результаты использования способов предфильтрации при оптимальных значениях τ для антенны из рисунка 5.1в на частоте 485 МГц

Предфильтрация	τ_{opt}	$q_{As}, \%$	$q_M, \%$	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T, \text{с}$	N_{it}
(1.46)	10^{-1}	2,51	8,31	3,69	25,89	52	12
(1.47)	$5 \cdot 10^{-4}$	1,46	5,62	7,49	21,97	56	20
(1.47)-У	$5 \cdot 10^{-4}$	1,47	5,62	3,69	18,82	53	20
(1.48)	$5 \cdot 10^{-1}$	1,50	5,78	7,54	23,28	60	18
(1.49)	$5 \cdot 10^{-4}$	1,47	5,63	7,33	22,64	59	20
(2.1)	$5 \cdot 10^{-4}$	1,19	5,07	11,12	25,18	65	22
(2.2)	$5 \cdot 10^{-4}$	1,81	6,47	10,79	27,71	58	16
(2.3)	$5 \cdot 10^{-4}$	1,47	5,62	3,96	19,29	54	20
(2.4)	$5 \cdot 10^{-4}$	1,47	5,62	4,19	19,98	55	20

Таблица 5.21 – Результаты использования способов предфильтрации при оптимальных значениях τ для антенны из рисунка 5.1*в* на частоте 125 МГц ($\lambda/40$)

Предфильтрация	τ_{opt}	$q_{A_s}, \%$	$q_M, \%$	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T, \text{с}$	N_{it}
(1.46)	$5 \cdot 10^{-2}$	2,89	6,93	4,91	24,57	55	12
(1.47)	10^{-4}	1,93	5,34	8,04	23,21	57	16
(1.47)-У	10^{-4}	1,93	5,34	4,02	19,52	53	16
(1.48)	$5 \cdot 10^{-2}$	2,35	6,01	8,22	25,30	62	14
(1.49)	$5 \cdot 10^{-5}$	1,93	5,34	7,75	23,26	61	16
(2.1)	10^{-5}	1,76	5,12	11,72	26,52	67	17
(2.2)	$5 \cdot 10^{-7}$	2,43	6,11	11,22	28,19	60	13
(2.3)	$5 \cdot 10^{-5}$	1,93	5,34	5,90	21,32	56	16
(2.4)	$5 \cdot 10^{-5}$	1,93	5,34	5,24	20,98	55	16

Как видно из таблицы 5.20, для любой предфильтрации при оптимальном τ плотность матрицы A_s составляет менее 3%. В случае достижения примерно того же N , но за счет дискретизации (см. таблица 5.21) матрица является более плотной при любой предфильтрации. Для наглядности на рисунке 5.17 приведены структуры этой матрицы после предфильтрации (1.46) при τ_{opt} для случая 485 МГц ($\lambda/10$) и 125 МГц ($\lambda/40$). Видно, что увеличение дискретизации при оптимальном допуске обнуления приводит к более выраженным ненулевым областям в матрице A_s вблизи главной диагонали.

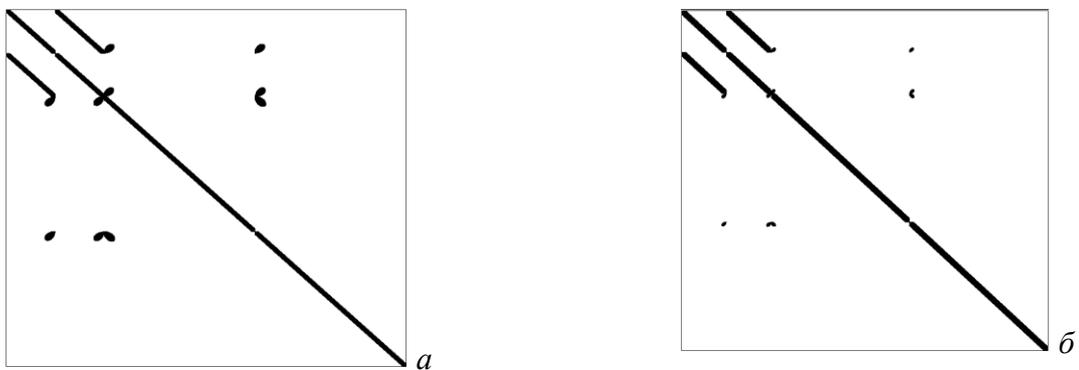


Рисунок 5.17 – Структуры матрицы СЛАУ после предфильтрации (1.46) для антенны из рисунка 5.1*в* при 485 МГц ($\lambda/10$) и $\tau = 10^{-1}$ (а) и 125 МГц ($\lambda/40$) и $\tau = 5 \cdot 10^{-2}$ (б)

В таблице 5.22 приведены оптимальные значения τ по критерию минимизации общего времени решения СЛАУ для разных частот. Аналогичные результаты при разной дискретизации для 125 МГц приведены в таблице 5.23. Видно, что при изменении частоты для способов предфильтрации (1.47) и (1.48) значение τ_{opt} остается одним и тем же, чего нельзя сказать о других способах предфильтрации. Способы (1.46) и (2.2) показали стабильность для частот более 165 МГц. При изменении дискретизации только способ (1.47) показал

стабильность τ_{opt} . Для способа (2.1), как и ранее для трапециевидной зубчатой антенны, шаг изменения дискретизации соответствует шагу изменения τ_{opt} .

Таблица 5.22 – Оптимальные значения τ по критерию минимизации времени решения СЛАУ для антенны из рисунка 5.1в при изменении частоты и предфильтрации

Предфильтрация	f , МГц				
	165	245	325	405	485
(1.46)	$5 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}
(1.47)	$5 \cdot 10^{-4}$				
(1.48)	$5 \cdot 10^{-1}$				
(1.49)	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$
(2.1)	$5 \cdot 10^{-4}$				
(2.2)	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
(2.3)	10^{-3}	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
(2.4)	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$

Таблица 5.23 – Оптимальные значения τ по критерию минимизации времени решения СЛАУ для антенны из рисунка 5.1в при изменении дискретизации и предфильтрации

Предфильтрация	Дискретизация			
	$\lambda/10$	$\lambda/20$	$\lambda/30$	$\lambda/40$
(1.46)	$5 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-2}$
(1.47)	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
(1.48)	$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-2}$
(1.49)	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-5}$
(2.1)	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}
(2.2)	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-7}$
(2.3)	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-5}$
(2.4)	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-5}$

Таким образом, итерационные методы позволяют значительно уменьшить время решения СЛАУ с плотной матрицей по сравнению с методом Гаусса. Как было показано, затраты на решение СЛАУ становятся меньше, чем на заполнение матрицы.

5.1.7 Рекомендации для анализа линейных антенн

Анализ обзора публикаций и практический опыт автора по использованию итерационных методов решения СЛАУ с плотной матрицей позволяет предложить следующие рекомендации по выбору их параметров при анализе линейных антенн.

Выбор начального приближения не имеет большого значения. Однако чаще всего исследователи используют нулевое начальное условие [543, 550, 560, 561, 722]. При анализе

антенн за начальное приближение вектора решения принималось равенство всех его элементов 0 или 0,1.

Задание максимального числа итераций требуется для остановки итераций при стагнации решения, т.е. неспособности выбранного метода и набора его параметров получить решение с требуемой точностью. Таким образом, данный параметр может иметь произвольно большое значение. В данной работе использовано два значения этого параметра: 180 и 400. В литературе приводятся разные значения, используемые исследователями, например, 500 в [550] и 2000 в [543].

Точность вычислений является более значимым параметром, поскольку определяет вычислительные затраты (увеличение точности приводит к увеличению числа требуемых для сходимости итераций). В данной работе использована точность 10^{-8} . При решении подобных задач исследователи пользуются, как правило, точностью 10^{-5} – 10^{-13} [560, 561, 723]. Однако иногда используют более затратные вычисления с точностью 10^{-15} [545] и менее затратные с точностью 10^{-3} [543].

Итак, остался выбор трех основных параметров, каждый из которых непосредственно влияет на время решения СЛАУ. Наиболее предпочтительно, для минимизации времени решения СЛАУ, выбором способа предфильтрации найти наилучший метод и способ вычисления предобусловливателя, на примере нескольких конфигураций. Очевидно, что при таком подходе желательно, чтобы порог/допуск обнуления при изменении конфигурации или не изменялся или изменялся контролируемо. Далее фиксированием метода и способа предобусловливания надо выбрать наилучший способ предфильтрации, обладающий наименьшей чувствительностью к изменению конфигурации исследуемой задачи.

Обзор [543, 545, 550, 560, 561, 724] показывал, что при решении СЛАУ с плотной матрицей чаще всего используются итерационные методы GMRES(m), BiCGStab и немного реже CGS и BiCG. В данной работе автор чаще использовал метод BiCGStab.

Выбор, как вида, так и способа предобусловливания, является, пожалуй, самой сложной задачей. В литературе можно найти большое количество сравнений способов предобусловливания, например, в [543, 550, 551, 558, 561, 569, 571]. Отметим, что уже достаточно хорошо показано, что явное предобусловливание имеет неоспоримое преимущество над неявным, когда решение СЛАУ происходит с помощью распараллеливания процесса. При этом при использовании МоМ и последующем решении СЛАУ исследователи отдают

предпочтение как явному, так и неявному предобусловливанию, однако, все же, больше последнему.

Как уже говорилось, выбор способа предфильтрации, является не менее важной задачей, поскольку, как было показано, за счет этого можно добиться ускорения решения СЛАУ на 40%. Поскольку в данной работе исследована алгебраическая предфильтрация, то рекомендации будут касаться только её. Прежде всего, отметим, что по результатам проведенных исследований трудно выделить какой-либо способ. Так, наименее затратный способ (1.46) при оптимальном выборе порога обнуления, в большинстве случаев приводит к наименьшим временным затратам на решение СЛАУ, но не отличается стабильностью оптимального порога и/или определенной закономерностью его изменения при изменении частоты и дискретизации. Аналогичная ситуация наблюдалась и для других способов, кроме предложенного способа (2.1). Так, выявлено на всех примерах, что оптимальное значение допуска обнуления при изменении частоты не изменяется. Также было обнаружено, что шаг изменения дискретизации соответствует шаг изменения оптимального значения допуска обнуления. Подобная стабильность и/или закономерность была отмечена и для некоторых других способов, но не для всех рассматриваемых примеров. Такая стабильность весьма важна, поскольку она минимизирует затраты времени при многовариантном анализе в большом числе частотных точек или при оптимизации по частоте, широко применяемых на практике. При этом минимизация происходит автоматически, без участия пользователя (за счёт автоматического пересчёта порога обнуления с изменением матрицы, при выбранном допуске обнуления). Таким образом, в этих случаях данный способ является, пожалуй, наиболее предпочтительным.

5.2 Построение сетки, формирование матрицы и решение СЛАУ при анализе полосковых структур

5.2.1 Построение сетки

Для исследования эффективности модификаций алгоритма АИВОС (см. подраздел 2.2) выполнен вычислительный эксперимент на примере стека 4 (рисунок 2.3). Полученные результаты представлены в соответствующих строках таблицы 5.24. Для наглядного сравнения приведены не значения контролируемых величин, а, как и в случае использования АИВОС, значение первого элемента ёмкостной матрицы (C_{ii}). Используемые обозначения аналогичны использованным в подразделе 2.2 (T_{it} – общее время вычисления; N_{it} – количество итераций,

требующихся для сходимости решения; значения ёмкости (\underline{C}) и время вычисления (T) при сегментации в 3 подынтервала на торце проводника).

Из таблицы 5.24 следует, что предлагаемые подходы дают желаемое ускорение, а также уменьшают затраты компьютерной памяти. Однако это обеспечивается за уменьшения точности контролируемой величины, и если при использовании АИВОС-У1 погрешность относительно равномерной сегментации $t/3$ невелика и составляет порядка всего 0,24%, (ускорение от 2,1 до 2,4 раза), то при использовании АИВОС-У3 погрешность достигает 4% (ускорение от 49 до 87 раз). Таким образом, АИВОС-У1 можно использовать как прямую альтернативу «ручной» сегментации, а АИВОС-У3, например, для получения быстрых оценок для моделируемой МПЛП при предварительном анализе её работы. АИВОС-У2 является промежуточной альтернативой. Погрешность при её использовании составляет 0,6% (ускорение от 3,3 до почти 4-х раз) относительно равномерной сегментации $t/3$. Строго говоря, алгоритмы АИВОС и АИВОС-У2 аналогичны, но последний использует более корректную контролируемую величину (норма ёмкостной матрицы).

Таблица 5.24 – Результаты работы модификаций АИВОС для стека 4 из рисунка 2.3

Метод построения сетки	Параметры решения	Количество проводников				
		2	4	6	8	10
АИВОС-У1	\underline{C}_{it} , пФ/м	96,8828	96,8835	96,8835	96,8835	96,8834
	T_{it} , с	1,17	2,85	5,54	9,34	14,55
	N	776	1144	1512	1880	2248
	N_{it}	1	1	1	1	1
	$ \underline{C} - \underline{C}_{it} /\underline{C}$, %	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24
	T/T_{it}	2,15	2,24	2,29	2,37	2,42
АИВОС-У2	\underline{C}_{11} , пФ/м	96,5478	96,5484	96,5484	96,5484	96,5484
	T_{it} , с	0,76	1,80	3,44	5,71	8,82
	N	624	920	1216	1512	1808
	N_{it}	4	4	4	4	4
	$ \underline{C} - \underline{C}_{it} /\underline{C}$, %	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
	T/T_{it}	3,32	3,54	3,69	3,88	3,99
АИВОС-У3	\underline{C}_{it} , пФ/м	93,2517	93,2523	93,2522	93,2522	93,2522
	T_{it} , с	0,051	0,096	0,20	0,27	0,40
	N	160	236	312	388	464
	N_{it}	2	2	2	2	2
	$ \underline{C} - \underline{C}_{it} /\underline{C}$, %	3,98	3,98	3,98	3,98	3,98
	T/T_{it}	49,41	66,46	63,55	82,04	87,88

Далее выполнено сравнение на тестовой МПЛП ($w = 890$ мкм, $s_1 = 500$ мкм, $s_2 = 1890$ мкм, толщина проводника и проводящих областей $t = 35$ мкм, $h_1 = h_3 = 144$ мкм, $h_2 = 220$ мкм,

толщина паяльной маски $h_M = 30$ мкм, ширина проводящих областей $5w$.) [725], при анализе которой алгоритм АИВОС продемонстрировал свою эффективность [348], рисунок 5.18.

Далее нижние индексы у коэффициентов электростатической индукции опущены. Результаты вычислений при использовании АИВОС, а также 3 его модификаций, сведены в таблицу 5.25 (при вычислениях полагалось $tol = 0,01$, $N_{it}^{max} = 8$). Принятые обозначения: \underline{C}_{it} и T_{it} – значение собственного коэффициента электростатической индукции центрального проводника и общее время вычисления по алгоритму АИВОС соответственно. При «ручной» сегментации ($t/3$) $\underline{C} = 131,803$ пФ/м, $N = 6119$, а время вычисления $T = 104,89$ с.

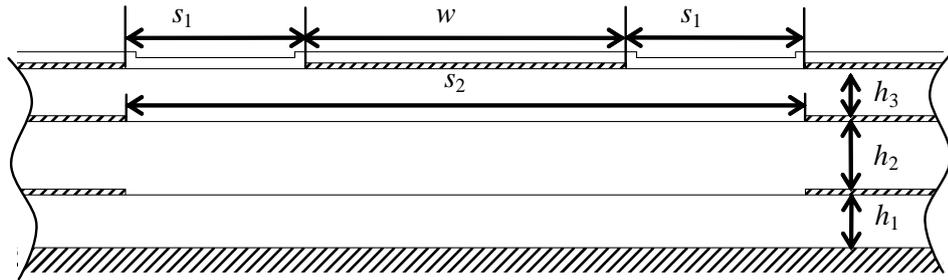


Рисунок 5.18 – Увеличенный фрагмент поперечного сечения тестовой МПП [348]

Таблица 5.25 – Результаты использования исходного и модифицированных алгоритмов АИВОС для анализа структуры из рисунка 5.18

Параметры решения	АИВОС	АИВОС-У1	АИВОС-У2	АИВОС-У3
\underline{C}_{it} , пФ/м	128,882	131,740	127,019	131,868
T_{it} , с	0,80	43,74	0,074	3326,05
N	659	4082	182	20539
N_{it}	3	1	1	8
$ \underline{C} - \underline{C}_{it} /\underline{C}$, %	2,22	0,05	3,63	0,05
T/T_{it}	131,11	2,40	1417,43	0,03

Из таблицы 5.25 видно, что результаты существенно отличаются от результатов, полученных при анализе стека 4 (таблица 5.24). Так, алгоритм АИВОС, по сравнению с результатами для стека 4, даёт значительное ускорение в 131 раз вместо замедления. При этом в 31 раз возросла погрешность вычисления (2,22% вместо 0,07%). Алгоритм АИВОС-У1 при том же порядке ускорения даёт меньшую погрешность (около 5 раз). Использование АИВОС-У2 примерно при той же погрешности вычисления даёт наибольшее ускорение. Изменение значения tol с 0,01 на 0,001 позволяет получить результаты, аналогичные АИВОС (см. соответствующие пояснения к анализу результатов для стека 4). Ещё большие изменения произошли в работе алгоритма АИВОС-У3. Этот алгоритм, показавший наибольшее ускорение

при анализе стека 4, стагнировал и не позволил получить требуемое решение за максимальное количество итераций.

Далее выполнено исследование работы алгоритма АИВОС-У4, основанного на неравномерном учащении сетки. Для тестирования использована структура из рисунка 5.18. При вычислениях использованы следующие параметры алгоритма: $n = 2$, $tol = 0,001$, $\varepsilon = 0,05$; $0,1$. Полученные результаты сведены в таблицу 5.26. Видно, что вариант 1 проверки «качества» подынтервалов более эффективен. Из таблицы также видно, что быстродействие алгоритма существенно повысилось. При этом погрешность вычислений относительно равномерной сегментации $t/3$ оказалась достаточно высока (до 4,9%). Еще одним недостатком алгоритма является необходимость задания большого количества параметров, значения которых существенно влияют на сходимость итерационного процесса сегментации. Поэтому использование плотности распределения заряда (массив-решение СЛАУ) для построения итерационного алгоритма учащения сегментации нужно признать неудовлетворительным и не использовать при анализе МПЛП.

Таблица 5.26 – Результаты использования АИВОС-У4 для анализа МПЛП из рисунка 5.18

Проверка «качества»	Параметры решения	ε	
		0,05	0,1
Вариант 1	\underline{C}_{it} , пФ/м	126,851	126,854
	T_{it} , с	31,56	24,40
	N	2115	1855
	N_{it}	6	6
	$ \underline{C} - \underline{C}_{it} /\underline{C}$, %	3,76	3,75
	T/T_{it}	3,32	4,30
Вариант 2	\underline{C}_{it} , пФ/м	125,345	125,361
	T_{it} , с	0,19	0,19
	N	350	348
	N_{it}	2	2
	$ \underline{C} - \underline{C}_{it} /\underline{C}$, %	4,90	4,89
	T/T_{it}	552,05	552,05

Таким образом, с учетом результатов, представленных в подразделе 2.2, на примере геометрических моделей МПЛП показано, что АИВОС не эффективен для анализа структур с узкими проводниками и, наоборот, эффективен – с широкими проводниками. При этом если точность вычисления весьма критична, то от его использования стоит отказаться. Аналогично можно сказать про его непосредственную модификацию АИВОС-У2. Модификация АИВОС-У1 является самой универсальной и, на рассмотренных МПЛП, позволяет получить ускорение до

2,4 раза при точности 0,24% относительно равномерной сегментации $t/3$. Модификации АИВОС-У3 и АИВОС-У4, использующие для останова итераций значения плотности заряда на подынтервалах, на которые разбивается структура, при анализе произвольных МПП не являются эффективными, с точки зрения вычислительных затрат и точности вычислений.

5.2.2 Формирование матрицы СЛАУ

Для исследования разработанного параллельного алгоритма вычисления значений элементов матрицы СЛАУ, в системе TALGAT построены геометрические модели поперечного сечения двух печатных плат (рисунок 5.19). На одной проводники находятся на поверхности подложки с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{rc} = 4,2$ и покрыты толстым слоем препрега, а на другой – тонким слоем паяльной маски, относительная диэлектрическая проницаемость которой $\epsilon_{rm} = 3,5$. Толщина проводников $t = 35$ мкм, толщина подложки $h_c = 510$ мкм, ширина проводника $w = 300$ мкм, толщина препрега $h_p = 170$ мкм, толщина маски $h_m = 10$ мкм, расстояние между проводниками $s = 475$ мкм.

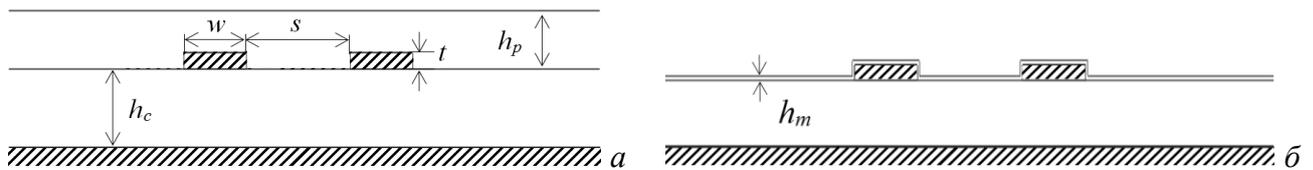


Рисунок 5.19 – Геометрические модели поперечных сечений связанных линий, покрытых препрегом (а) и маской (б)

Для тестирования вычислены элементы матрицы СЛАУ разных порядков и измерено время их вычисления на хосте (CPU) и графическом ускорителе (GPU) [632]. Основные характеристики РС, на которых выполнялось тестирование разработанного алгоритма, приведены в таблице 5.27.

Таблица 5.27 – Основные характеристики РС, используемых для заполнения матрицы СЛАУ

Процессор	Тактовая частота процессора, ГГц	Объём ОЗУ, Гбайт	Количество ядер	Операционная система
Intel Core i7-930	2,8	12	4	Windows 7×64
GPU Tesla C1060	1,3	4	240	Windows 7×64

Время вычисления значений элементов матрицы СЛАУ сведено в таблицу 5.28. Из неё видно, что использование графического процессора для вычисления значений элементов матрицы СЛАУ предпочтительнее по сравнению с аналогичным вычислением на центральном

процессоре. При этом увеличение порядка матрицы приводит к росту ускорения для обеих структур и достигает 18 раз.

Таблица 5.28 – Время вычисления значений элементов матрицы СЛАУ

N	Структура препрегом			N	Структура с маской		
	T_{CPU} , мс	T_{GPU} , мс	T_{CPU}/T_{GPU}		T_{CPU} , мс	T_{GPU} , мс	T_{CPU}/T_{GPU}
800	220	29	7,6	960	319	30	10,6
1600	860	79	10,9	1440	710	69	10,3
2400	1930	150	12,7	2400	1949	141	13,8
3200	3420	219	15,6	3360	3820	241	15,9
4000	5339	320	16,7	3840	4970	293	17,0
4800	7670	440	17,4	4320	6299	377	16,7
5600	10419	579	18,0	4800	7769	430	18,1
6400	13600	720	18,9	5280	9390	514	18,3

Таким образом, использование графического процессора, является эффективным средством для уменьшения затрат времени на заполнение матрицы СЛАУ, полученной методом моментов. На рассмотренных тестовых двухмерных задачах достигнуто ускорение 18 раз. Разработанный алгоритм легко модифицируется для использования при анализе аналогичных трехмерных задач. При этом, с ростом порядка матрицы СЛАУ, стоит ожидать еще большего ускорения.

5.2.3 Итерационное решение СЛАУ

Для подтверждения эффективности разработанных в подразделе 2.4 алгоритмов $ILU(0)$ -разложения, проведены вычислительные эксперименты. Использовалась РС с параметрами: платформа AMD Athlon(tm) 64 X2 Dual; тактовая частота процессора 2100 МГц; объем ОЗУ 2 Гбайт; число ядер – 2; операционная система Windows XP. При вычислениях не использовалось распараллеливание, т.е. работало одно ядро процессора.

Для подтверждения эффективности использования дополнительного массива **Diag** (рисунок 2.10) проведено сравнение времени работы с ним программы (T_D) и стандартным $ILU(0)$ -разложением (рисунок 2.9) (T) при различной плотности (q_M) матрицы **M** и $N = 1000$. Разная плотность матрицы **M** получена путем изменения в широком диапазоне значения порога обнуления (ϵ) в предфильтрации (1.47). В таблицу 5.29 сведены полученные результаты. Видно, что использование первой модификации (дополнительный вектор) ускоряет работу алгоритма $ILU(0)$ -разложения в 1,14–1,23 раза.

Таблица 5.29 – Сравнение времени вычисления по алгоритмам из рисунков 2.9 и 2.10

ε	$q_M, \%$	$T, \text{с}$	$T_D, \text{с}$	T / T_D
0,012	59	285	258	1,14
0,014	56	261	234	1,13
0,016	53	242	213	1,16
0,018	50	224	195	1,15
0,02	47	207	178	1,16
0,022	45	192	162	1,17
0,024	42	175	146	1,17
0,026	40	163	133	1,17
0,028	38	152	123	1,18
0,03	36	142	112	1,19
0,032	35	132	103	1,19
0,034	33	124	95	1,20
0,036	31	116	88	1,20
0,038	30	109	81	1,20
0,04	29	103	75	1,21
0,042	27	97	70	1,21
0,044	26	91	65	1,23
0,046	25	86	60	1,22
0,048	24	81	56	1,23
0,05	23	73	52	1,23

Далее выполнен вычислительный эксперимент по полному решению СЛАУ итерационным методом BiCGStab. Измерялось время трёх составляющих решения: предфильтрации (в алгоритме, использующем разреженный формат, в ходе предфильтрации производится и конвертация матрицы в разреженный строчный формат с помощью программы [681]); ILU(0)-разложения (рисунок 2.10); итерационного процесса.

Оценка затрат времени сделана на трёх матрицах с $N = 4800, 6000$ и 8000 , полученных путем учащения сегментации границ исследуемой структуры, при вычислении матрицы погонных коэффициентов электростатической индукции (ёмкостной матрицы) связанной МПЛ, поперечное сечение которой приведено на рисунке 5.20. При вычислении рассмотрено два варианта применения алгоритма метода BiCGStab: без использования разреженного строчного формата хранения разреженных матриц (T); с использованием разреженного строчного формата и дополнительного массива **Diag** ($Tcsrd$). СЛАУ формировались в системе TALGAT.

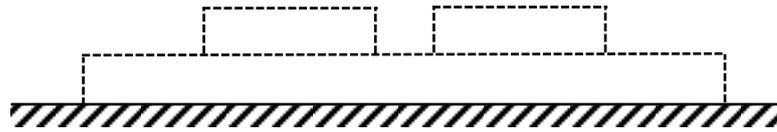


Рисунок 5.20 – Исследуемая структура – 2 проводника с диэлектриком над идеально проводящей плоскостью (связанные МПЛ)

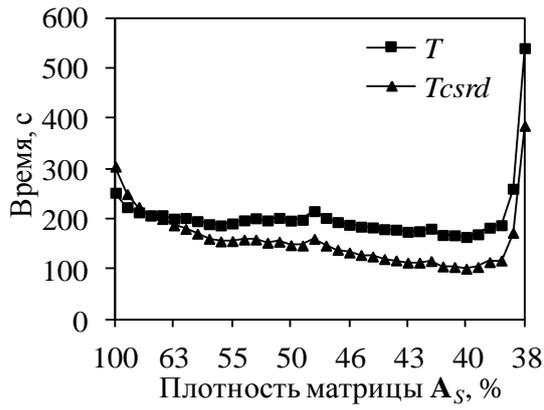
В экспериментах при префильтрации изменялся порог обнуления (ϵ), меняющий плотность матрицы A_S . Так, при $N = 4800$ порог изменялся в диапазоне $0; 1,5 \times 10^{-6}; \dots 1,75 \times 10^{-5}$; для $N = 6000$ – $0; 1,0 \times 10^{-7}; \dots 1,0 \times 10^{-5}$ и для $N = 8000$ – $0; 5,0 \times 10^{-3}; \dots 1,0 \times 10^{-1}$. Итерации продолжались, пока относительная норма вектора невязки не становилась меньше 10^{-6} .

Время решения согласно двух алгоритмов на различных матрицах приведено на рисунке 5.21. Используются следующие обозначения: время решения СЛАУ (T) и вычисления $ILU(0)$ -разложения ($ILU(0)$) без использования формата хранения разреженной матрицы и $Tcsrd$, и $ILU(0)csrd$ с использованием этого формата и дополнительного массива **Diag**. Видно, что ускорение алгоритма при использовании строчного формата наблюдается не при всех значениях плотности матрицы, а только для значений меньше определенного порога. При этом максимальное ускорение от его использования достигается при оптимальном (по критерию минимального времени решения СЛАУ) значении порога обнуления.

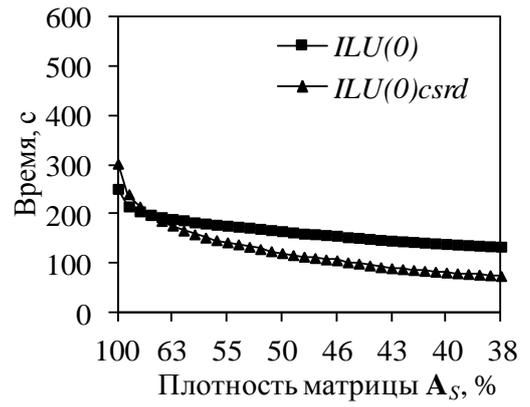
В таблицу 5.30 сведены результаты сравнения времени вычислений согласно тех же алгоритмов для трех порядков матриц. Из неё следует, что для всех рассмотренных случаев наблюдается ускорение, лежащее в пределах от 1,5 до 1,6 раза. Также в таблице приведено время решения при использовании метода Гаусса (T_{GE}) и ускорение, полученное относительно него, которое изменяется в пределах от 1,2 до 4,4 раза. Для решения методом Гаусса использовалось LU-разложение с последующим нахождением решения СЛАУ с его помощью. (Данный алгоритм реализован без использования специализированных библиотек и методов, для проведения объективного сравнения алгоритмов в равных условиях.)

Таблица 5.30 – Сравнение времени решения СЛАУ при разных N

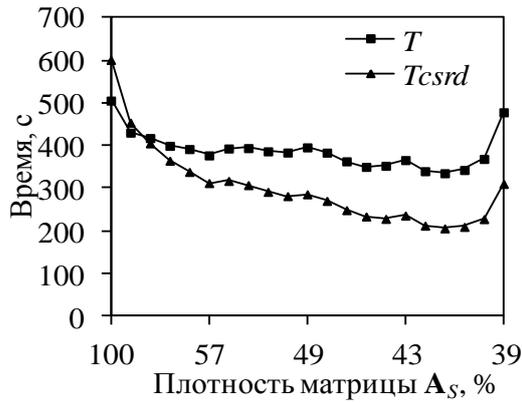
N	T, c	$Tcsrd, c$	$T/Tcsrd$	T_{GE}, c	$T_{GE}/Tcsrd$
4800	164	101	1,6	129	1,3
6000	335	206	1,6	254	1,2
8000	216	140	1,5	616	4,4



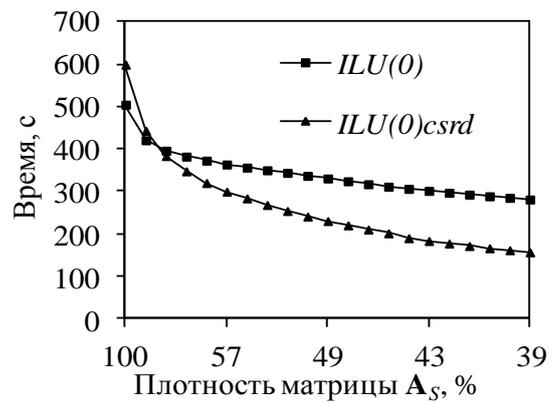
a



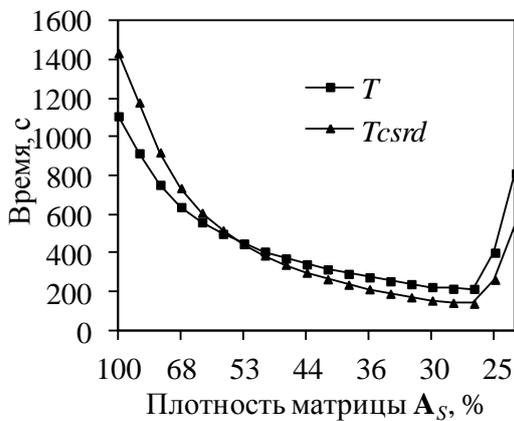
б



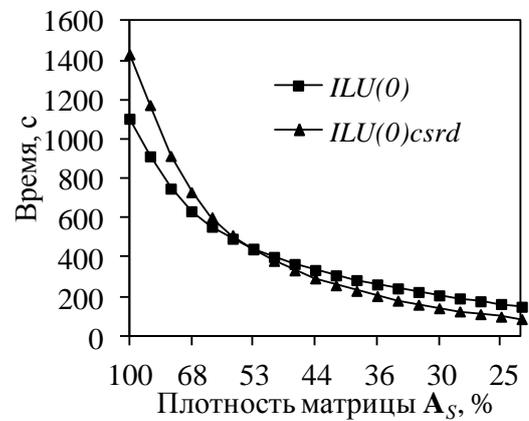
в



г



д



е

Рисунок 5.21 – Сравнение времени работы программ при $N = 4800, 6000$ и 8000 :

а, в, д – полная задача решения СЛАУ методом BiCGStab (T и $Tcsrd$);

б, г, е – только вычисление $ILU(0)$ -разложения ($ILU(0)$ и $ILU(0)csrd$)

Раздельный анализ по составляющим времени работы алгоритма решения СЛАУ выявил, что итоговое ускорение получено за счет модификации $ILU(0)$ -разложения, рисунок 5.21. Из рисунка видно, что затраты на $ILU(0)$ -разложение занимают большую часть в общих затратах времени на решение СЛАУ, поэтому их уменьшение даёт итоговое ускорение. Уменьшение

затрат времени на $ILU(0)$ -разложение объясняется использованием разреженного строчного формата, т.к. при его использовании нулевые элементы матрицы не хранятся, и, тем самым, не обрабатываются в алгоритме, в отличие от исходного алгоритма, работающего с полной матрицей.

Для дальнейших вычислительных экспериментов по оценке предлагаемых усовершенствований алгоритма $ILU(0)$ -разложения использовалась другая РС с параметрами: процессор – Intel Core i7-970, тактовая частота – 3,20 ГГц; объем ОЗУ – 16 Гбайт; количество ядер – 6; операционная система – Linux Kubuntul1.10×64. При вычислениях не использовалось распараллеливание.

Для оценке затрат времени использовано несколько СЛАУ, полученных, как и ранее, путем уташения сегментации границ исследуемой структуры из задачи вычисления ёмкостной матрицы. СЛАУ формировались в системе TALGAT и решались методом BiCGStab. Для вычисления предобусловливателя использовались алгоритмы из рисунков 2.10 (с дополнительным массивом **Diag**), 2.12 (без поиска ненулевых элементов) и 2.15 (с двумя временными массивами **tmpvec** и **tmpjptr**). Поперечное сечение структуры 1 (связанная МПЛ) приведено на рисунке 5.20, а структуры 2 (два проводника над идеально проводящей плоскостью) – на рисунке 5.22. За счёт изменения числа подынтервалов для каждой структуры сформированы матрицы разных порядков (2240, 6800 и 7999).



Рисунок 5.22 – Два проводника над идеально проводящей плоскостью

В экспериментах изменялся порог обнуления (ϵ) в предфилтрации (1.47), меняющий плотность матрицы A_s . Итерации продолжались, пока относительная норма вектора невязки не становилась меньше 10^{-6} . Для оценки уменьшения затрат времени на решение СЛАУ использовалось отношение времени решения по модифицированным алгоритмам из рисунков 2.12 (T_s) и 2.15 (T_r) ко времени решения по алгоритму (с дополнительным массивом) из рисунка 2.10 (T).

Зависимости полученного ускорения решения СЛАУ от плотности матрицы A_s приведены на рисунке 5.23, из которого следует, что усовершенствованный алгоритм из рисунка 2.12 (без поиска ненулевых элементов) работает быстрее алгоритма из рисунка 2.10 (с дополнительным массивом **Diag**), а алгоритм из рисунка 2.15 (с двумя временными массивами **tmpvec** и

tmpjptr) – еще быстрее. Максимальные ускорения получены при $N = 4800$ (в 1,6 раза для первого из них, и в 2,5 раза – для второго), а при $N = 8000$ получены ускорения 1,2 раза и 1,7 раза соответственно. Из рисунка 5.23 видно, что при малых плотностях матрицы A_S ускорение падает. Этот факт объясняется тем, что оптимизировался только этап $ILU(0)$ -разложения, т.е. одна из трех составляющих общего времени: предфильтрации (T_p), $ILU(0)$ -разложения (T_{lu}) и итерационного процесса (T_i).

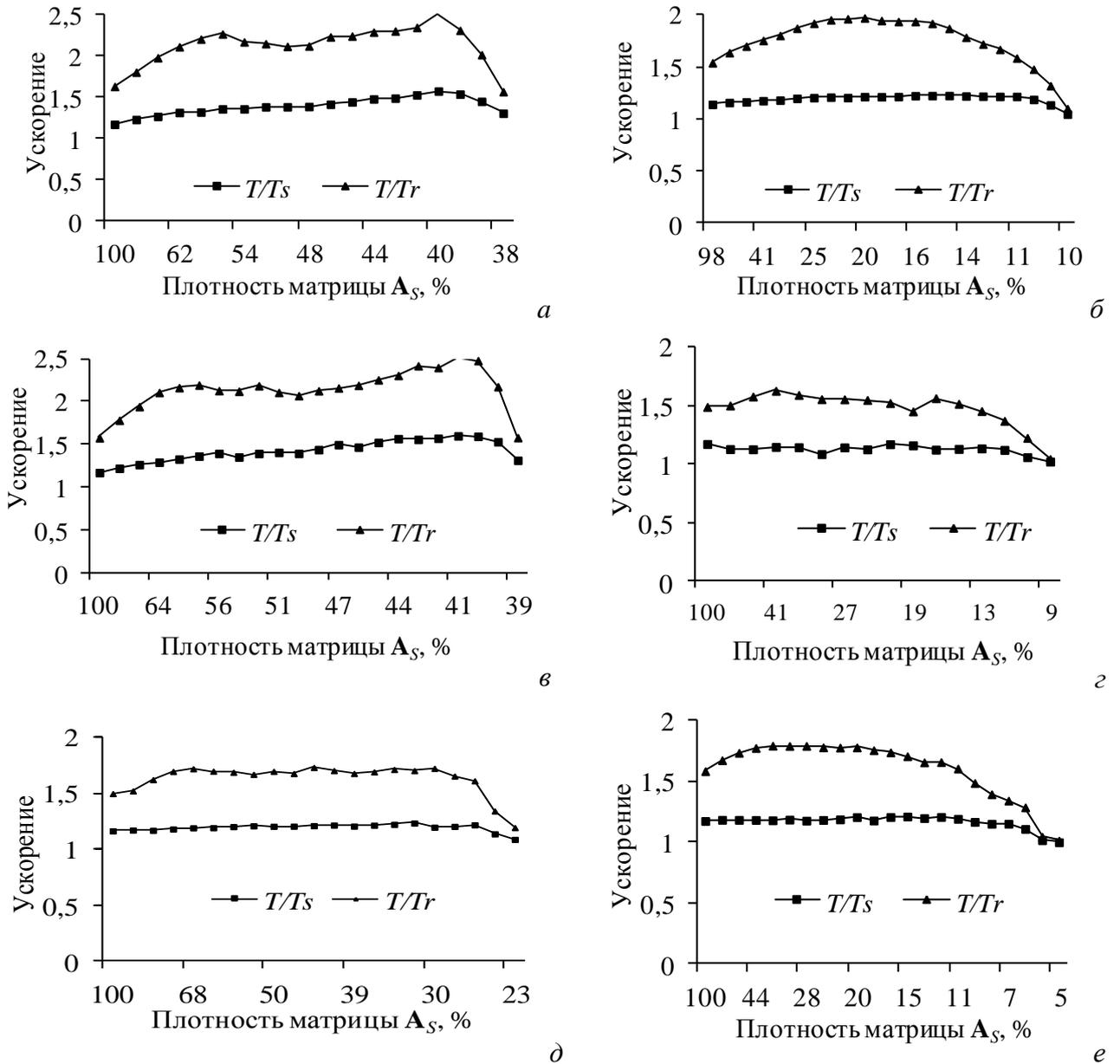


Рисунок 5.23 – Отношение времени решения СЛАУ методом BiCGStab при использовании алгоритма из рисунка 2.10 (T) ко времени алгоритмов из рисунков 2.12 (T_s) и 2.15 (T_r) для структуры 1 (рисунок 5.20) при $N = 4800$ (а), 6000 (в), 8000 (д) и структуры 2 (рисунок 5.22) при $N = 2240$ (б), 6800 (г), 7999 (е)

На рисунке 5.24 приведены результаты полученного ускорения ILU(0)-разложения согласно алгоритмов из рисунков 2.12 (*Tlus*) и 2.15 (*Tlur*) относительно алгоритма из рисунка 2.10 (*Tlu*). Видно, что для $N = 4800$ максимальное ускорение для алгоритма без поиска ненулевых элементов (рисунок 2.12) составляет 2 раза, а для алгоритма с двумя временными массивами (рисунок 2.15) – почти 4 раза. Нет отсутствия ускорения при минимальной плотности матрицы, как это было на рисунке 5.23.

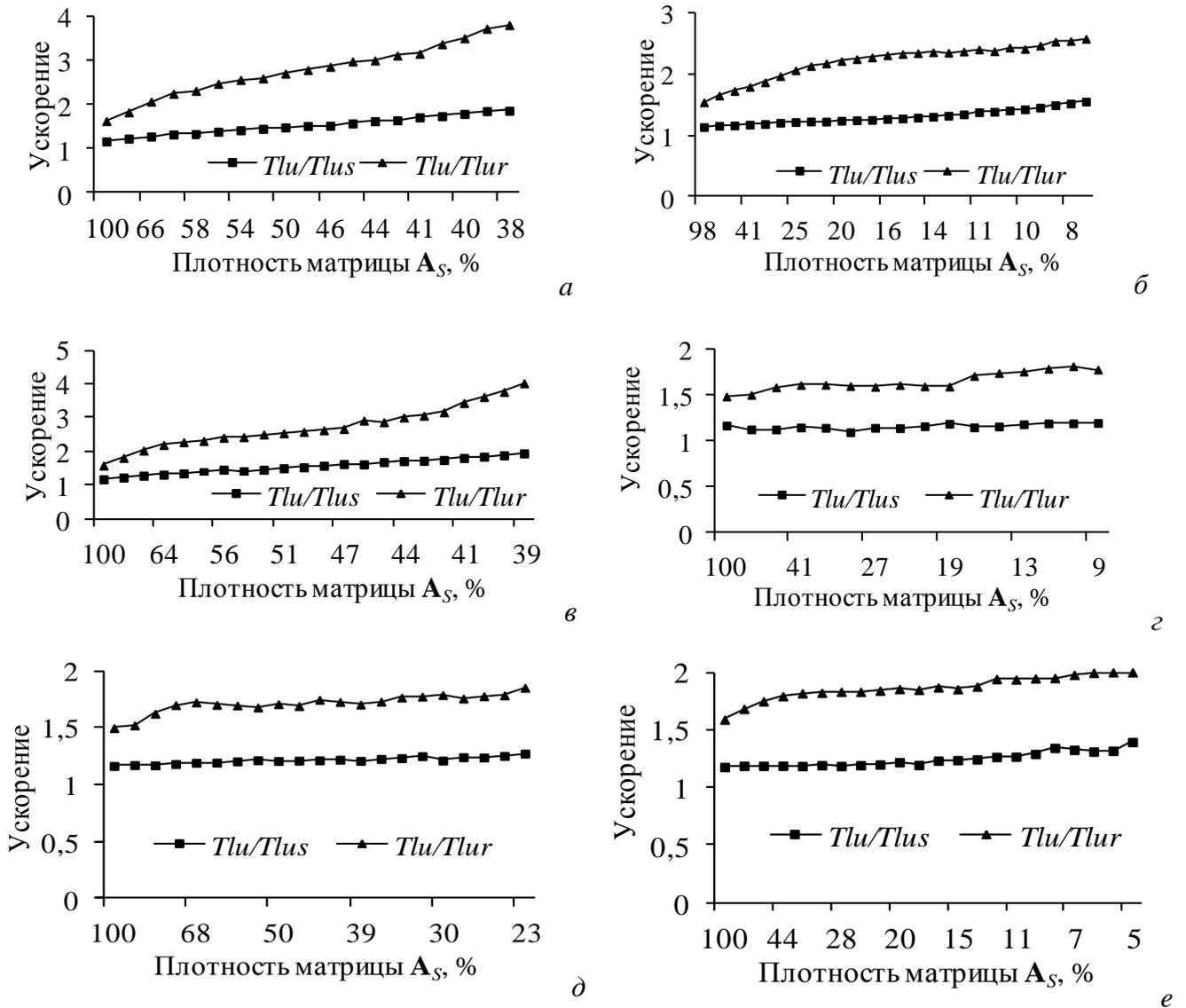


Рисунок 5.24 – Отношение времени ILU(0)-разложения при использовании алгоритма из рисунка 2.10 (*Tlu*) ко времени алгоритмов из рисунков 2.12 (*Tlus*) и 2.15 (*Tlur*) для структуры 1 (рисунок 5.20) при $N = 4800$ (а), 6000 (в), 8000 (д) и структуры 2 (рисунок 5.22) при $N = 2240$ (б), 6800 (г), 7999 (е)

Показательно сравнение полученного ускорения на разных этапах решения СЛАУ при использовании алгоритмов из рисунков 2.10 и 2.15. Для наглядности зависимость соотношения

времени этапов решения СЛАУ по алгоритму из рисунка 2.15 от плотности A_S для $N = 4800$ изображена на рисунке 5.25. Из него следует, что при уменьшении плотности матрицы часть затрат времени, приходящихся на итерационный процесс, увеличивается, а на $ILU(0)$ -разложение (за счет которого получено ускорение) – уменьшается. Поэтому, итоговое ускорение также уменьшается. Тем не менее, наблюдаемое уменьшение полученного ускорения при малых плотностях матрицы не уменьшает ценности выполненной модификации алгоритма. Так, на практике требуется уменьшать затраты времени на решение СЛАУ за счёт выбора оптимального (по критерию минимального времени) значения порога/допуска обнуления, поскольку в этом случае затраты времени на $ILU(0)$ -разложение примерно равны затратам на итерационный процесс [623]. Поэтому уменьшение затрат, приходящихся на $ILU(0)$ -разложения, целесообразно.

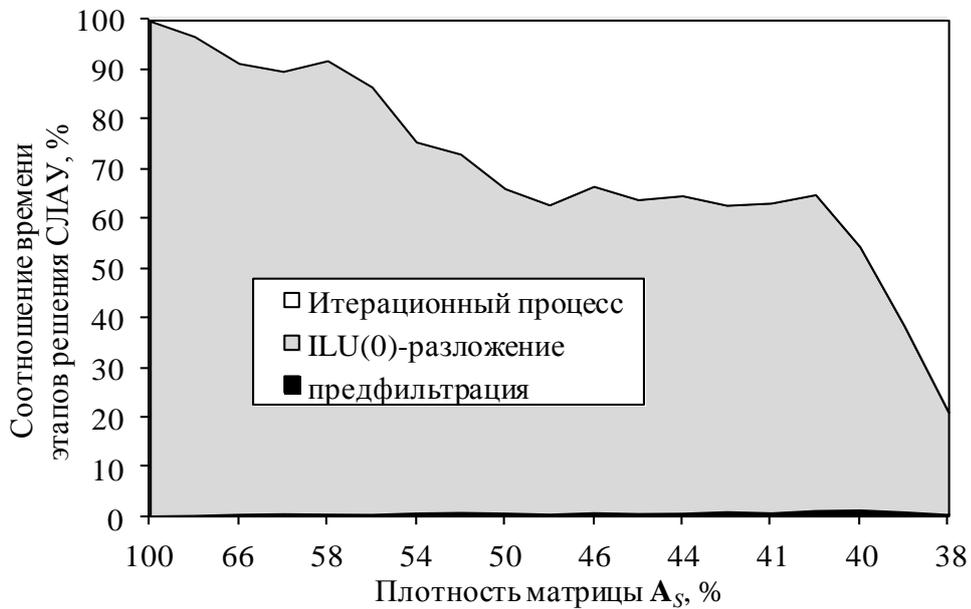


Рисунок 5.25 – Зависимость соотношения затрат времени на решение СЛАУ

итерационным методом с предобуславливанием, от плотности матрицы M для $N = 4800$

Для вычислительного эксперимента по использованию параллельной версии разработанного алгоритма использовалась РС с параметрами: процессор – Intel Core i7-970, тактовая частота – 3,20 ГГц; объем ОЗУ – 24 Гбайт; количество ядер – 6; количество виртуальных процессоров – 12; операционная система – Windows 7x64; компилятор MSVS 2013. Тестовые матрицы были получены из задачи вычисления электрической ёмкости связанной МПЛ (рисунок 5.20) в системе TALGAT. За счёт изменения числа подынтервалов получены матрицы порядков 4800 и 9600. Из них, путем изменения допуска обнуления при предфильтрации, были получены разреженные матрицы с разной плотностью (q_{A_S}).

В таблице 5.31 приведено отношение времени работы последовательной версии алгоритма из рисунка 2.15 ко времени работы его параллельной версии при количестве потоков от 2 до 12. Видно, что при плотности 100% для обоих порядков матрицы максимальное ускорение достигается при использовании 4 потоков. При плотности матриц 61–62% эффективнее использовать от 2 до 11 потоков, а при плотности менее 60% предпочтительным становится использование последовательной версии алгоритма. Последний факт объясняется тем, что при этой плотности вычислительные затраты на создание потоков начинают преобладать над затратами на вычисление элементов согласно алгоритму ILU(0)-разложения.

Таблица 5.31 – Отношение затрат времени последовательной и параллельной версий алгоритма из рисунка 2.15

Количество потоков	$N = 4800$			$N = 9600$		
	$q_{As} = 100\%$	$q_{As} = 61\%$	$q_{As} = 46\%$	$q_{As} = 100\%$	$q_{As} = 62\%$	$q_{As} = 57\%$
2	1,33	1,07	0,88	1,29	1,29	0,45
3	1,65	1,29	0,93	1,76	1,67	0,57
4	1,81	1,29	0,98	1,85	1,72	0,60
5	1,62	1,32	0,96	1,64	1,68	0,60
6	1,40	1,32	0,95	1,48	1,61	0,54
7	1,28	1,31	0,95	1,42	1,65	0,54
8	1,30	1,32	0,90	1,48	1,69	0,53
9	1,37	1,37	0,93	1,53	1,74	0,53
10	1,42	1,35	0,90	1,58	1,73	0,53
11	1,29	1,02	0,83	1,56	1,61	0,43
12	1,03	0,81	0,83	1,14	0,81	0,18

Таким образом, выполнено исследование нескольких предложенных модификаций алгоритма ILU(0)-разложения матрицы, хранящейся в разреженном строчном формате. Так, использование дополнительного массива **Diag** на рассмотренных примерах ускорило ILU(0)-разложение до 1,23 раза, а полную задачу решения СЛАУ – до 1,6 раза. Время решения СЛАУ по сравнению с методом Гаусса уменьшено до 4,4 раза. Далее исследованы еще две модификации алгоритма ILU(0)-разложения (с устраненной избыточностью при поиске ненулевых элементов и с двумя временными массивами). Их использование дало дополнительное ускорение (относительно алгоритма с дополнительным массивом **Diag**) до 4 раз при вычислении ILU(0)-разложения и до 2,5 раз при решении СЛАУ. Тем самым, общее ускорение вычисления ILU(0)-разложения достигает 5 раз, а решения СЛАУ – 4 раз. Также показано, что при увеличении плотности матрицы выгода от использования модифицированных алгоритмов уменьшается по сравнению с исходным (стандартным)

алгоритмом. При этом исследование разработанной параллельной версии алгоритма с использованием стандарта OpenMP показало, что он, наоборот, более эффективен при больших плотностях матрицы. Поэтому с помощью полученных результатов достаточно просто формируется условие, позволяющее до начала $ILU(0)$ -разложения, выбрать, какой алгоритм использовать, последовательный или параллельный.

5.2.4 Рекомендации для анализа полосковых структур

На основании полученных результатов сформулированы рекомендации по построению сетки, формированию матрицы СЛАУ и её решению итерационным методом с предобусловливанием при анализе полосковых структур.

При построении сетки метод итерационного выбора сегментации является эффективным средством уменьшения вычислительных затрат на анализ. Однако начальные значения его параметров оказывают существенное влияние на скорость сходимости и точность получаемых результатов. Так, для предварительного анализа полосковой структуры для начальной сегментации (длины подынтервала) рекомендуется использовать значение ширины проводников, если её значение много больше значения толщины проводников. Если эти значения сопоставимы, то предпочтительнее использовать значение толщины.

Использование графического процессора для заполнения матрицы СЛАУ (вычисления значений её элементов) является эффективным средством для уменьшения затрат, даже при относительно небольших порядках матрицы. При этом с ростом порядка матрицы (сложности анализируемой структуры) выигрыш от использования графических вычислений увеличивается.

Рекомендации по использованию итерационных методов решения СЛАУ при анализе полосковых структур, в целом, аналогичны разработанным рекомендациям для линейных антенн. Дополнительно разработанная модификация $ILU(0)$ -разложения позволяет уменьшить не только затраты машинной памяти, но и время решения СЛАУ, что повышает ценность данной разработки. При этом, если плотности матрицы выше 60%, предпочтительна параллельная версия алгоритма, а ниже – последовательная.

5.3 Основные результаты раздела

Приведено сравнение 7 итерационных методов в сочетании с 5 способами формирования предобусловливания. На нескольких антеннах показано, что для решения поставленных задач выгоднее использовать методы BiCGStab и CGS в сочетании с полным LU-разложением. Также

показано, что существует оптимальное значение допуска обнуления по критерию минимизации времени решения СЛАУ. На исследованных примерах выбор этого значения ускоряет решение по сравнению с методом Гаусса от 2 до 20 раз, а уменьшение заданной точности решения СЛАУ от 10 до 4 знаков ускоряет решение в 1,5 раза. Также показано, что за счет выбора способа предфильтрации можно добиться ускорения во времени решения СЛАУ на 40%. За счет предложенного усовершенствования способа предфильтрации (1.47) показано сокращение времени решения СЛАУ на 13%.

Приведены результаты сравнения способов алгебраической предфильтрации, на примере 3 антенн, при изменении частоты, и на примере 2 антенн – при изменении дискретизации. Выявлена стабильность допуска обнуления, при использовании способа предфильтрации (2.1), для всех антенн при изменении частоты. Показано изменение оптимального значения допуска обнуления для каждого способа предфильтрации. Также показано, что при использовании предложенного способа предфильтрации (2.1) шаг изменения дискретизации соответствует шаг изменения оптимального допуска обнуления, вне зависимости от исследуемой антенны.

На примере 7 МПЛП выполнено исследование 4 модификаций метода построения сетки АИВОС. Показано, что метод АИВОС неэффективен для анализа структур с узкими проводниками и, наоборот, эффективен – с широкими проводниками. Установлено, что предложенная модификация АИВОС-У1 позволила получить ускорение до 2,4 раза при точности 0,24%, относительно равномерной сегментации $t/3$. Также показано, что использование значения плотности заряда на подынтервалах, на которые разбивается структура, для останова итераций при построении сетки неэффективно, с точки зрения точности вычислений и затрат времени и машинной памяти.

Исследовано применение графического процессора для уменьшения затрат времени на заполнение матрицы СЛАУ. Так, на примере 2 МПЛП показано ускорение порядка 19 раз, относительно использования центрального процессора.

Выполнено исследование 3 предложенных модификаций алгоритма $ILU(0)$ -разложения матрицы, хранящейся в разреженном строчном формате, а также параллельная версия этого алгоритма. На рассмотренных примерах общее ускорение вычисления $ILU(0)$ -разложения достигает 5 раз, а при решении СЛАУ – 4 раз. Также показано, что при больших плотностях матрицы предпочтительна параллельная версия алгоритма, а при малых – последовательная.

Приведены рекомендации по построению сетки, формированию матрицы СЛАУ и её итерационному решению на примере анализа линейных антенн и полосковых структур.

6 УСКОРЕНИЕ МНОГОВАРИАНТНОГО АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ ПРОВОДНЫХ И ПОЛОСКОВЫХ СТРУКТУР

6.1 Ускорение за счёт совершенствования итерационного решения СЛАУ

В данном подразделе приведены результаты исследования разработанных алгоритмов для многократного итерационного решения СЛАУ с изменяющейся матрицей [647, 726–736].

6.1.1 Выбор начального приближения

Для оценки влияния выбора начального приближения и используемого предобусловливателя на процесс многократного итерационного решения СЛАУ согласно алгоритму 3.1, проведен вычислительный эксперимент. Рассмотрено 2 способа ускорения: выбор в качестве начального приближения решения предыдущей СЛАУ (для первой СЛАУ использован единичный вектор); использование предобусловливания с матрицей \mathbf{M} , вычисленной один раз из матрицы первой СЛАУ для решения всех СЛАУ (в терминологии из раздела 1 – «замороженный» предобусловливатель).

Для вычислений использована РС (без применения параллельных вычислений) с параметрами: платформа – AMD FX(tm)-8320 Eight-Core Processor, частота процессора – 3,50 ГГц; объем ОЗУ – 16 Гбайт; число ядер – 8; операционная система – Windows 7x64. Для тестирования использована связанная МПЛ, поперечное сечение которой приведено на рисунке 5.20. Задачей являлась оценка затрат времени на m -кратное вычисление ёмкостных матриц при изменении значения ε , подложки (в данном случае 100 значений). Учащением сегментации границ структуры получены СЛАУ с матрицами 4 порядков: $N = 708, 1416, 3540, 4425$. Характеристики этих матриц сведены в таблицу 6.1, а на рисунке 6.1 приведены их портреты (элементы матрицы сначала отсортированы по абсолютным значениям, а затем разделены на 4 группы, каждой из которых соответствует свой цвет при визуализации). Поскольку матрицы СЛАУ получены путем учащения сегментации границ одной структуры, то портреты похожи.

Таблица 6.1 – Характеристики матриц для структуры из рисунка 5.20

N	N_A	Плотность матрицы \mathbf{A} , %	Плотность матрицы \mathbf{M} , %	$\text{cond}(\mathbf{A})$
708	288	100	100	$1,75 \cdot 10^8$
1416	576	100	100	$5,78 \cdot 10^8$
3540	1440	100	100	$2,19 \cdot 10^9$
4425	1800	100	100	$3,12 \cdot 10^9$

При вычислениях использовался метод BiCGStab. Предобусловливатель вычислялся с помощью полного LU-разложения исходной матрицы. Исследовано 2 варианта задания начального приближения. Первый – все элементы вектора равны одному значению, в данном примере, единице (фиксированное). Второй – выбор решения предыдущей СЛАУ. Итерации продолжались, пока относительная норма вектора невязки была больше $tol = 10^{-6}$. Изменение количества итераций, требуемых для решения, приведено на рисунке 6.2 (k – номер СЛАУ).

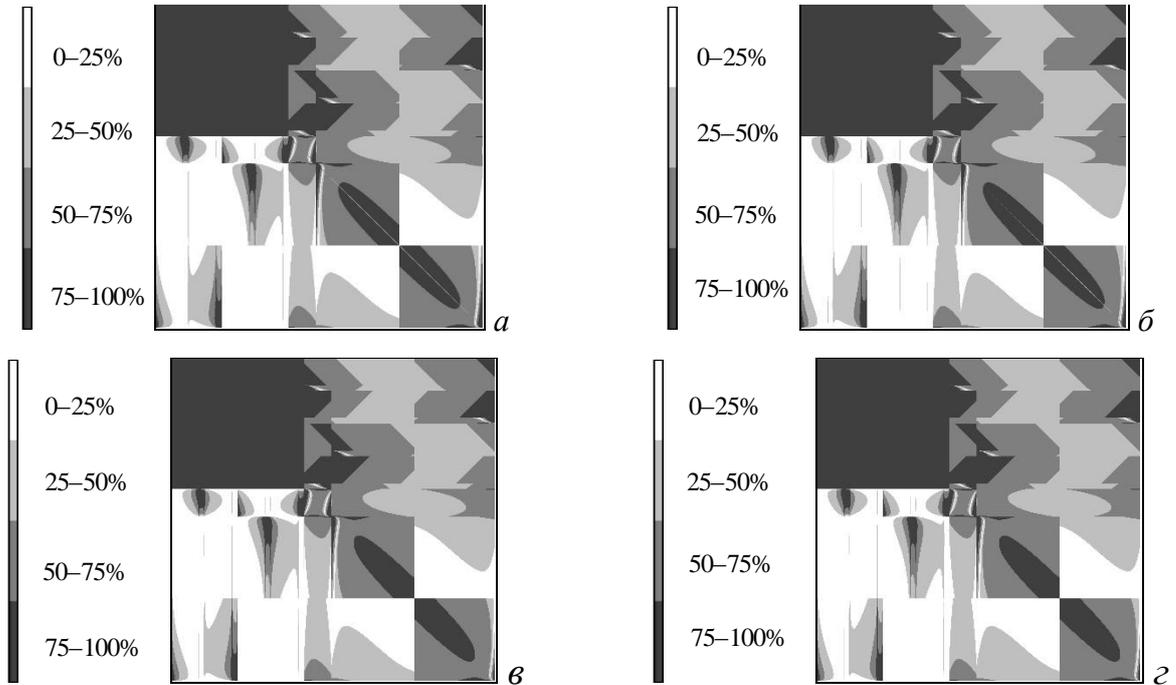


Рисунок 6.1 – Портреты матриц СЛАУ при $N = 708$ (а), 1416 (б), 3540 (в) и 4425 (г)

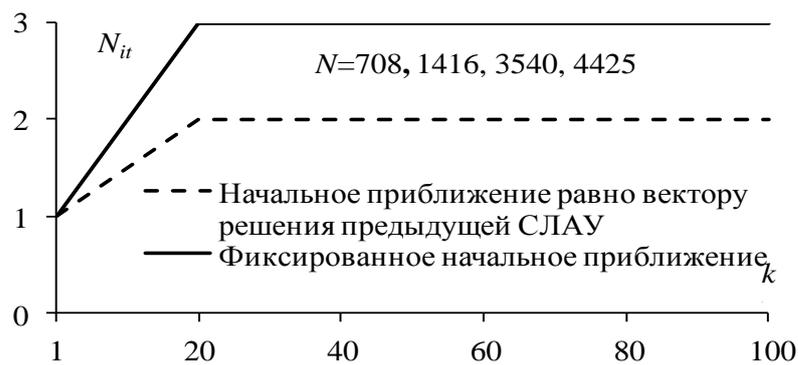


Рисунок 6.2 – Зависимости количества требуемых итераций на решение одной СЛАУ от k при разном начальном приближении (совпадают для всех N)

Из рисунка 6.2 видно, что использование решения предыдущей СЛАУ для начального приближения текущей уменьшает количество итераций, требуемых для её решения. Далее при тех же параметрах выполнена оценка ускорения относительно метода Гаусса (LU-разложение и

последующее решение двух треугольных систем). Полученные результаты при изменении количества (m) решаемых СЛАУ приведены в таблице 6.2. Также приведены значения, полученные по (3.3) (последняя строка).

Из таблицы 6.2 видно, что ускорение наблюдается при $m > 1$. При этом по мере увеличения m ускорение также увеличивается и достигает 49 ($m = 1000$ и $N = 4425$). Также наблюдается сходимость значения ускорения к значению по оценке (3.3), подтверждая корректность этой формулы. При этом использование в качестве начального приближения вектора решения предыдущей СЛАУ предпочтительнее по сравнению с фиксированным начальным приближением. Так, разница в значении ускорения достигает до 1,4 раза (при $N = 4425$).

Таблица 6.2 – Ускорение (относительно метода Гаусса) решения итерационным методом m СЛАУ

m	Фиксированное начальное приближение				Начальное приближение равно вектору решения предыдущей СЛАУ			
	$N = 708$	$N = 1416$	$N = 3540$	$N = 4425$	$N = 708$	$N = 1416$	$N = 3540$	$N = 4425$
1	0,36	0,51	0,52	0,31	0,36	0,51	0,52	0,31
5	1,37	2,15	2,43	1,52	1,53	2,27	2,49	1,53
10	2,12	3,65	4,53	2,93	2,52	4,00	4,74	2,98
100	4,12	9,58	20,53	18,09	5,70	12,74	24,82	20,42
1000	4,55	11,43	31,71	37,36	6,59	16,32	43,09	49,3
∞	4,61	11,69	33,78	42,43	6,71	16,86	46,96	58,59

Часто необходимо выполнять многовариантный анализ или оптимизацию структуры при изменении её геометрических параметров, что приводит к изменению значений элементов матрицы СЛАУ, расположенных в произвольных местах. Для оценки эффективности выбора начального приближения выполнен вычислительный эксперимент с использованием алгоритма 3.1, на примере МПЛ, рисунок 6.3.

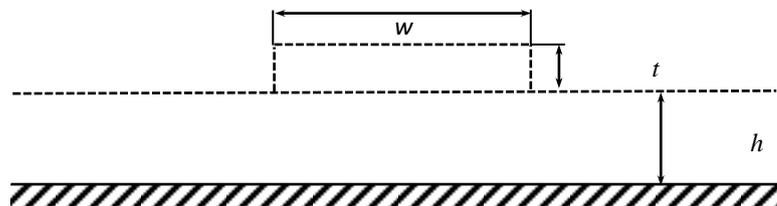


Рисунок 6.3 – Вид поперечного сечения МПЛ

Выполнена оценка затрат времени на вычисление 100 ёмкостных матриц. Получены 3 набора последовательностей СЛАУ путем изменения одного из размеров структуры: высоты подложки h (в диапазоне 12–112 мкм или на 933%), ширины проводника w (в диапазоне 18–118

мкм или на 656%) и высоты проводника t (в диапазоне 6–106 мкм или на 1767%). Порядки всех матриц СЛАУ были одинаковы ($N = 1600$, неизменное количество подынтервалов на каждой границе структуры), что обеспечило корректность сравнения результатов вычислений. Итерационный процесс продолжался, пока относительная норма вектора невязки не становилась меньше $tol = 10^{-8}$.

Далее с использованием РС (параметры приведены выше) выполнено исследование 4 вариантов вычислений, отличающихся выбором начального приближения и использованием предобусловливания. Так, в варианте 1 оба способа ускорения вычислений не использовались. При вариантах вычислений 2, 3 эти способы использовались отдельно, а при варианте 4 – совместно. На рисунке 6.4 приведено полученное изменение количества итераций (N_{it}) при решении последовательности СЛАУ для каждого из 4 вариантов вычислений.

Анализ полученных данных (рисунок 6.4) позволяет сделать несколько выводов. При варианте 1 количество итераций велико и в среднем постоянно. Для варианта 2 наблюдается небольшое и постепенное уменьшение количества итераций и, тем самым, времени решения СЛАУ. В варианте 3 при решении первой СЛАУ количество итераций равно 1 (используется предобусловливатель, вычисленный из матрицы первой СЛАУ), а при решении последующих СЛАУ это количество растёт из-за больших изменений в матрице. При варианте 4 количество итераций минимально, что, соответственно, даёт минимизацию общего времени решения всей последовательности СЛАУ и, тем самым, доказывает эффективность совместного использования обоих способов ускорения.

Следует отметить, что при изменении разных геометрических параметров структуры количество итераций для решения всех СЛАУ разное. Так, при изменении t количество итераций больше чем при изменении h и w , что обусловлено гораздо большими изменениями в значениях элементов матрицы СЛАУ. Для количественной оценки этих изменений использованы нормы матриц вариаций $\|\Delta \mathbf{A}_k\|_1$ и $\|\Delta \mathbf{A}_k\|_\infty$, где $\Delta \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_1$. Расчет норм матрицы выполнен по следующим формулам:

$$\|\Delta \mathbf{A}_k\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}|,$$

$$\|\Delta \mathbf{A}_k\|_\infty = \max_j \sum_i |a_{ij}|.$$

Результаты оценки в виде отношения норм матриц $\|\Delta \mathbf{A}_k\|_1 / \|\Delta \mathbf{A}_1\|_1$, $\|\Delta \mathbf{A}_k\|_\infty / \|\Delta \mathbf{A}_1\|_\infty$ приведены на рисунке 6.5. Из него видно, что, как и утверждалось выше, при изменении параметра t матрица СЛАУ претерпевают существенно большие изменения, чем при вариации h и w .

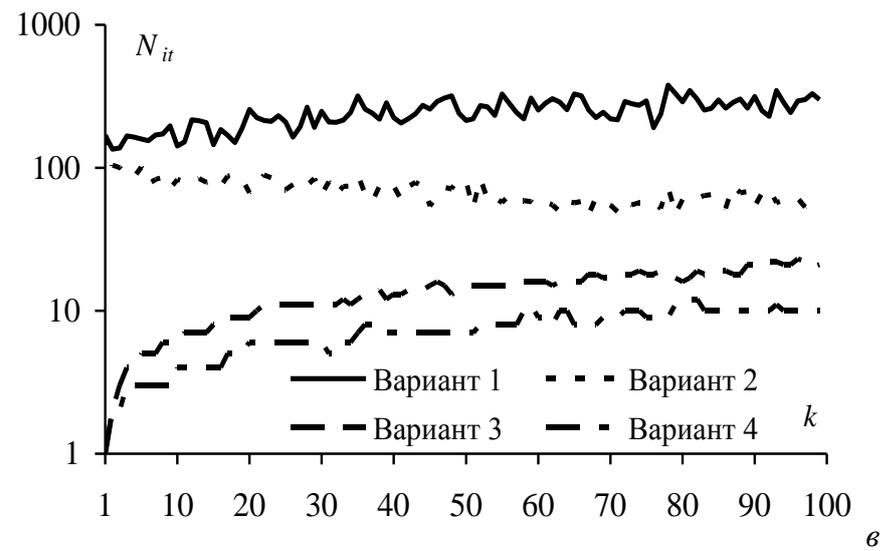
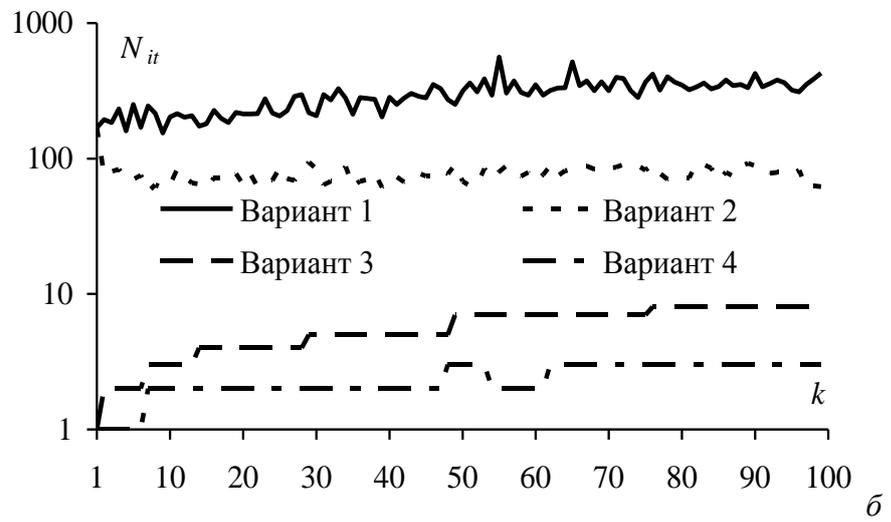
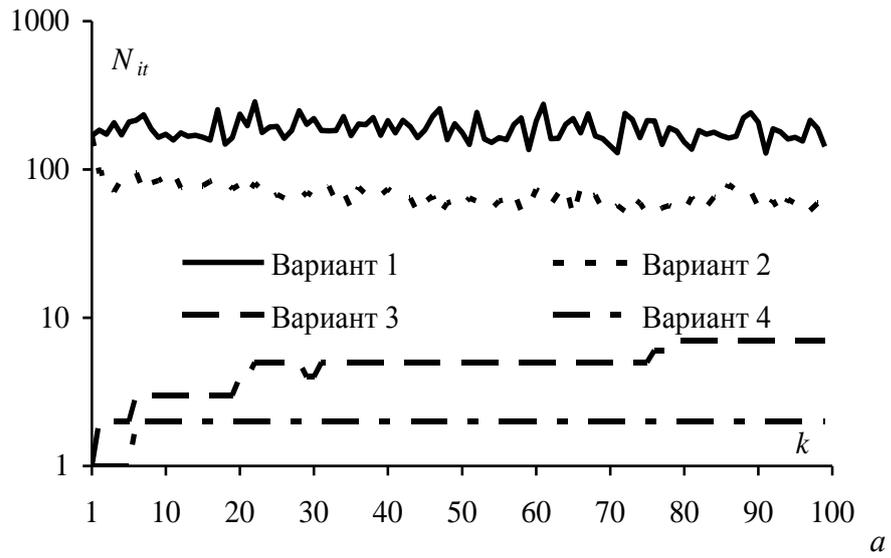


Рисунок 6.4 – Количество итераций при решении k -й из 100 СЛАУ методом BiCGStab

для вариантов 1–4 при изменении: $a - h$; $b - w$; $v - t$

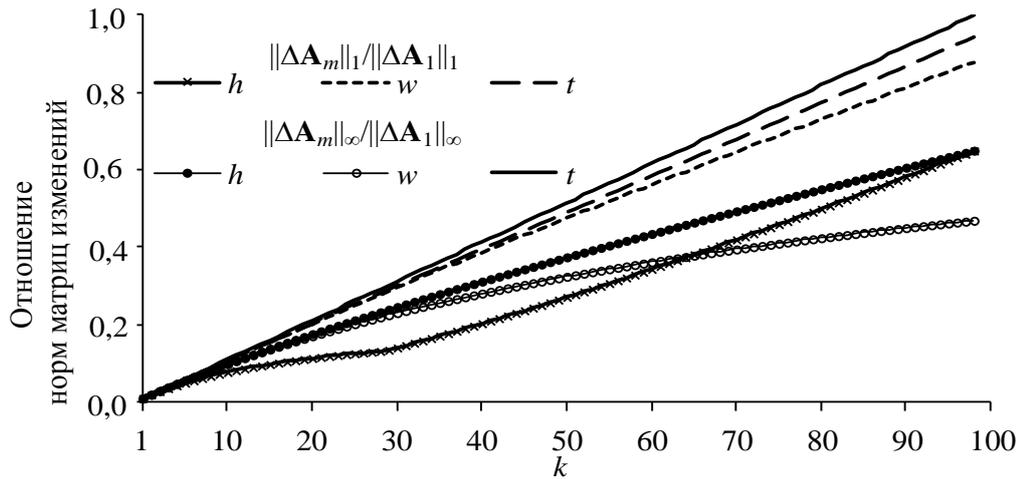


Рисунок 6.5 – Зависимости отношений норм матриц изменений, полученных при изменении h, w, t , от номера матрицы СЛАУ

Портреты матриц ΔA_{100} при изменении h, w, t показаны на рисунке 6.6. Видно, что изменение каждого из параметров имеет свою специфику и оказывает различное влияние на портрет матрицы.

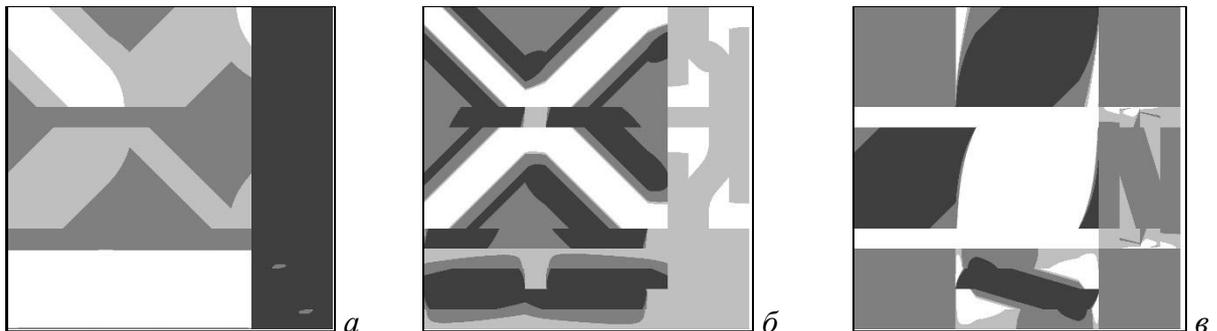
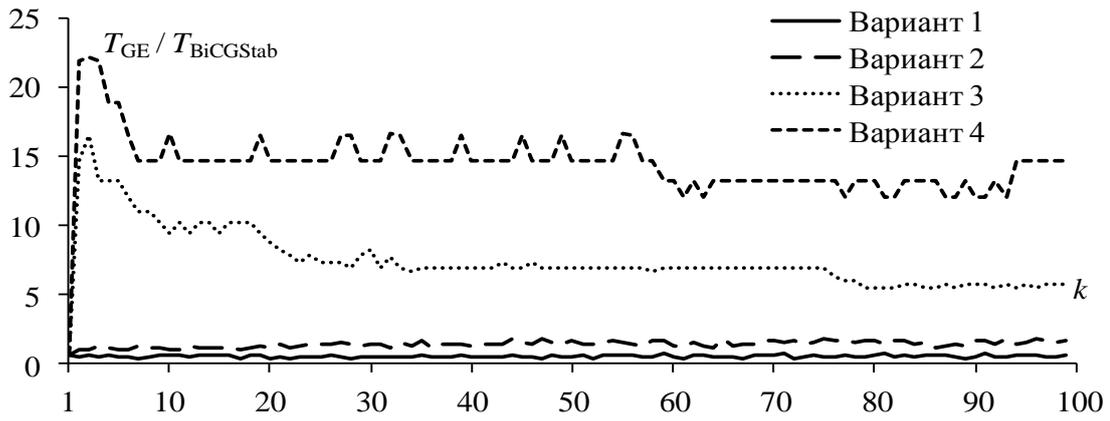
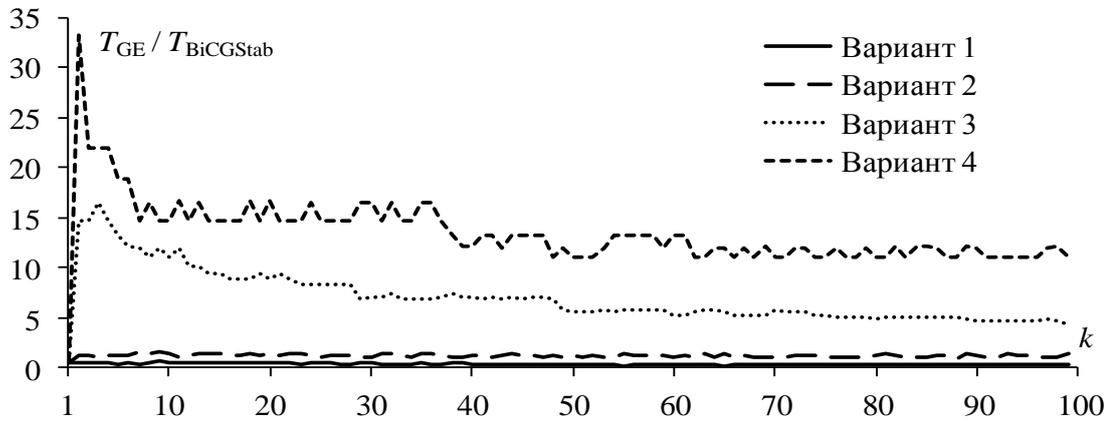


Рисунок 6.6 – Портрет матрицы ΔA_{100} при изменении значений геометрических параметров структуры: h (а), w (б) и t (в)

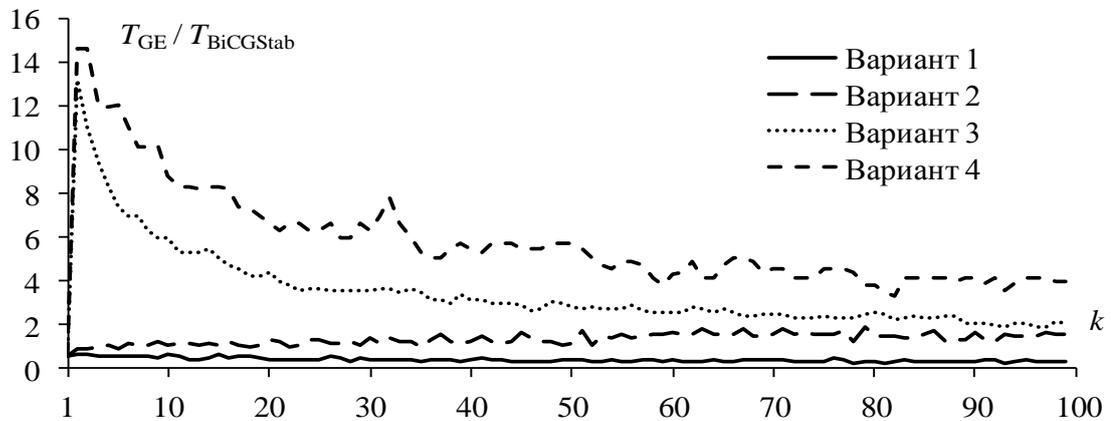
Отношение времени для решения k -й из 100 СЛАУ методом Гаусса ко времени её решения методом BiCGStab для вариантов 1–4 приведено на рисунке 6.7. На рассмотренных примерах вариант 4 позволил получить максимальное ускорение. Так, при малых изменениях (до 100%) размеров возможно получение довольно большого ускорения (10–30 раз). Снижение ускорения при увеличении количества решаемых СЛАУ обусловлено значительным изменением (до 1767%) размеров структуры, и тем самым, уменьшением эффективности предобусловливателя, вычисленного из первой матрицы, приводящим к росту количества итераций (см. рисунок 6.4). Отношение общего времени решения последовательности из 100 СЛАУ методом Гаусса ко времени решения методом BiCGStab приведены в таблице 6.3.



a



б



в

Рисунок 6.7 – Отношение времени решения k -й СЛАУ методом Гаусса (T_{GE}) ко времени её решения методом BiCGStab ($T_{BiCGStab}$) для вариантов 1–4 при изменении h (*a*), w (*б*) и t (*в*)

Таблица 6.3 – Ускорение решения 100 СЛАУ при использовании 4 вариантов ускорения

Изменяемый параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
h	0,48	1,32	6,49	11,77
w	0,31	1,15	5,87	10,98
t	0,37	1,28	2,87	4,92

Из таблицы 6.3 следует, что использование вариантов 2 и 3 позволяет получить значительно меньшее ускорение по сравнению с вариантом 4. При варианте 1 получено замедление процесса решения относительно метода Гаусса, из-за неиспользования способов ускорения вычислений. Также стоит отметить, что при использовании варианта 4 и изменении t итоговое значение ускорения меньше, по сравнению с изменением h и w , из-за роста количества итераций, требуемых для получения решения.

Для подтверждения корректности полученных результатов далее выполнена оценка влияния выбора значения параметра tol на точность результатов. На рисунке 6.8 приведены зависимости от t относительной погрешности значения ёмкости МПЛ, вычисленного из вектора-решения СЛАУ, полученного с помощью метода BiCGStab (\underline{C}_{it}) при 3 значениях параметра tol . Погрешность оценивалась относительно результатов, полученных методом Гаусса (\underline{C}). Видно, что при $tol = 10^{-4}$ погрешность составляет порядка 1%, а при 10^{-8} уменьшается до 0,001%. Таким образом, полученные результаты обладают высокой точностью.

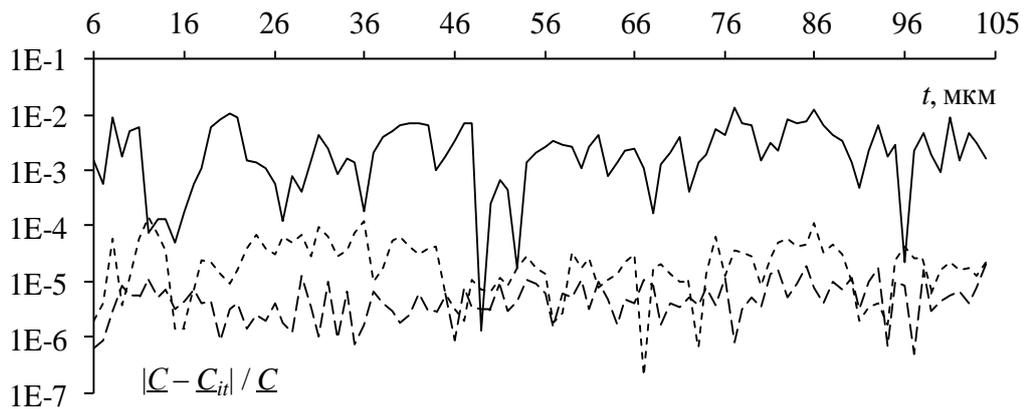


Рисунок 6.8 – Относительная погрешность значения ёмкости МПЛ при изменении t , $N = 1600$ и $tol = 10^{-4}$ (—), 10^{-6} (- -) и 10^{-8} (- -)

6.1.2 Переформирование предобусловливателя

6.1.2.1 Увеличение количества итераций выше порога

Для оценки эффективности условия переформирования предобусловливателя по порогу количества итераций, использованы РС (параметры указаны в пункте 6.1.1) и МПЛ (рисунок 6.3). Задачей было вычисление 100 ёмкостных матриц при изменении t . Порядок матрицы СЛАУ – $N = 1600$, итерационный метод – BiCGStab, $tol = 10^{-8}$, начальное приближение – вектор-решение предыдущей СЛАУ (для первой – единичный вектор).

Вычисления проведены при нескольких значениях порога переформирования предобусловливателя. Для наглядности, на рисунке 6.9 приведены изменения количества итераций, требуемых для получения решения с заданной точностью tol , при минимальном ($N_{it}^{\max} = 2$) и максимальном ($N_{it}^{\max} = 13$) значениях порога.

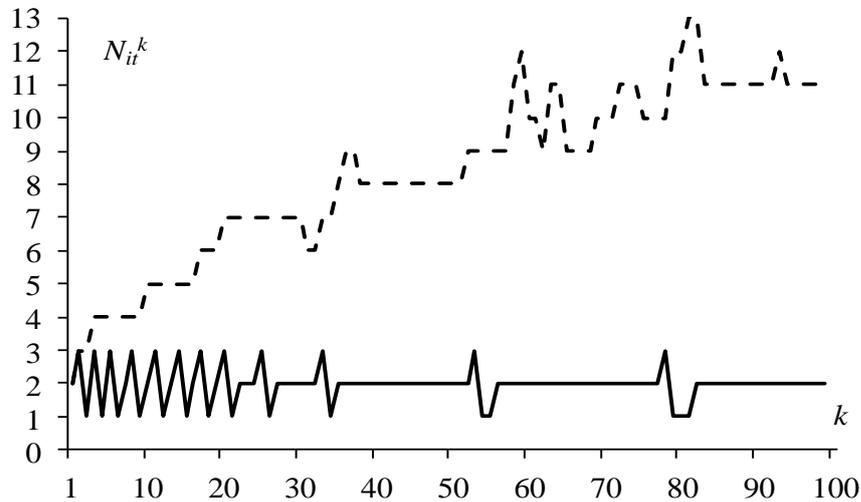


Рисунок 6.9 – Зависимости количества итераций при решении k -й СЛАУ при $N_{it}^{\max} = 2$ (—) и $N_{it}^{\max} = 13$ (- -)

Из рисунка 6.9 видно, что значение порога оказывает сильное влияние на итерационный процесс решения последовательности СЛАУ. Например, при минимальном пороге общее количество переформирований велико (12 – по количеству минимумов на графике зависимости), а при максимальном пороге переформирований нет. График зависимости количества итераций при $N_{it}^{\max} = 2$ примечателен частотой переформирований: в начале решения последовательности СЛАУ она максимальна и уменьшается с ростом k , демонстрируя этим способность заново переформированного предобусловливателя обеспечить решение СЛАУ с измененной матрицей не более чем за 2 итерации. Для дальнейшего анализа, характеристики решения при различных значениях N_{it}^{\max} приведены в таблице 6.4. Также приведено ускорение относительно решения по алгоритму 3.1 (без переформирований).

Из таблицы 6.4 видно, что при $N_{it}^{\max} = 2$ переформирований достаточно много и это увеличивает общие затраты времени решения, т.к. время каждого из переформирований значительно. В то же время, среднее количество требуемых итераций для одного решения очень мало, поскольку оно ограничено выбранным порогом. Поэтому вклад в общие затраты времени, вносимый итерациями, мал, а основная часть общих затрат приходится на переформирования. При этом они избыточны, т.к. увеличивают затраты времени относительно алгоритма, не использующего переформирования (ускорение 0,77 при $N_{it}^{\max} = 2$). При максимальном пороге,

переформирований нет (ускорение 1,00 при $N_{it}^{max} = 13$), и общие затраты – это затраты, приходящиеся на итерационный процесс. Между тем, они значительны, несмотря на малость затрат на одну итерацию, т.к. среднее количество итераций при таком пороге увеличилось в 4 раза. Анализ данных при промежуточных значениях порога показывает, что существуют его оптимальные значения (по критерию минимального времени): глобальный (при $N_{it}^{max}=4$), дающий наибольшее уменьшение затрат времени (ускорение до 1,72 раза), и локальный ($N_{it}^{max}=7$), дающий немного меньшее ускорение (до 1,68 раза). Полученные значения ускорения представляются значительными, поскольку они получены только за счёт переформирований предобусловливателя (дополнительно к двум способам ускорения из пункта 6.1.1).

Таблица 6.4 – Характеристики многократного решения СЛАУ с переформированием предобусловливателя по порогу количества итераций при различных его значениях

N_{it}^{max}	Количество переформирований	Общее количество итераций	Общее время решения, мс	Ускорение
2	12	196	53673	0,77
3	5	249	30701	1,35
4	2	307	24039	1,72
5	2	415	29504	1,40
6	1	416	26040	1,59
7	1	387	24571	1,68
8	1	389	24978	1,66
9	1	487	28903	1,43
10	1	487	29018	1,43
11	1	496	29303	1,41
12	1	666	37122	1,11
13	0	825	41364	1,00

6.1.2.2 Использование среднего арифметического времени решения

Для подтверждения возможности использования среднего арифметического времени решения в целях адаптивного переформирования предобусловливателя, выполнен вычислительный эксперимент на примере определения изменения ёмкости МПЛ (рисунок 6.3). Для этого использована РС с параметрами: процессор – Intel Core i7, тактовая частота – 2,80 ГГц; объём ОЗУ – 12 Гбайт; количество ядер – 8; операционная система – Windows 8x64. Параллелизация вычислений не применялась. Использовались метод BiCGStab, решение предыдущей системы в качестве начального приближения (для первой – единичный вектор) и $tol = 10^{-8}$. Количество подынтервалов на границах структуры не изменялось, что давало постоянство порядка матрицы ($N = 1600$) СЛАУ.

Полученные зависимости времени решения k -й СЛАУ и среднего арифметического времени решения приведены на рисунке 6.10. Видно, что зависимость среднего арифметического времени имеет минимум при $k = 52$. Таким образом, его можно использовать для адаптивного переформирования преобусловливателя.

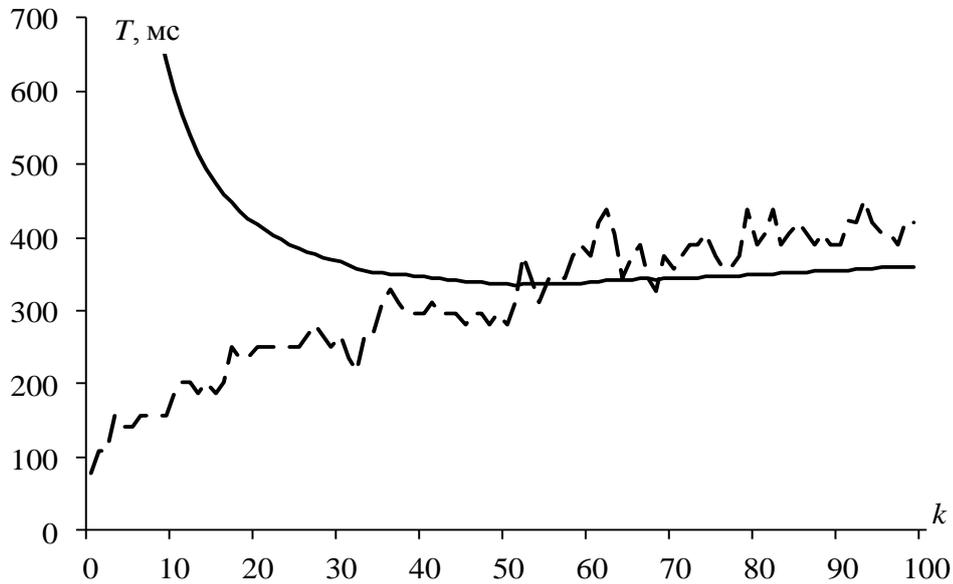


Рисунок 6.10 – Зависимости от k времени: решения k -й СЛАУ T_k (---) и среднего арифметического $\bar{T}(k)$ (—)

Для дальнейшего тестирования алгоритма 3.3 рассмотрен анализ двух структур. Так, для структуры 1 (рисунок 6.3), матрицы с порядком $N = 1600$ сформированы за счёт изменения высоты проводника (t) в диапазоне 6, 7, ... 105 мкм. Для структуры 2 (рисунок 6.11) – модального фильтра (МФ) с торцевой связью [737], матрицы порядка $N = 2001$ получены путем изменения зазоров (s) в диапазоне 100, 101, ... 200 мкм (МФ – полосковый фильтр на связанных линиях, позволяющий раскладывать импульсный сигнал с длительностью, меньшей разности задержек мод в линии, для защиты РЭС [738]). Итого получено по 100 СЛАУ. Далее учащением сегментации границ структур 1 и 2 получены вторые последовательности СЛАУ с матрицами порядков 3200 и 3001 соответственно.

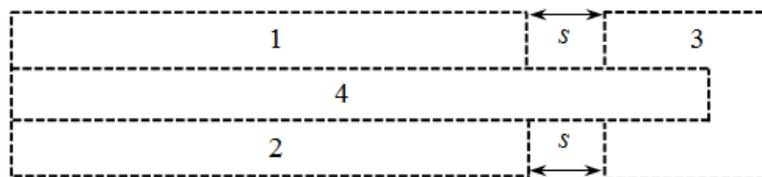


Рисунок 6.11 – Вид поперечного сечения МФ: структура 2 (1–3 – проводники, 4 – диэлектрик)

Результаты анализа полученных матриц сведены в таблицу 6.5. Для наглядности, на рисунке 6.12 приведены портреты первых матриц последовательностей СЛАУ.

Таблица 6.5 – Характеристики матриц для структур 1 (рисунок 6.3) и 2 (рисунок 6.11)

Структура	N	N_A	Плотность матрицы A , %	$\text{cond}(A)$
1	1600	1200	99,23	$4,49 \cdot 10^3$
	3200	2400	99,22	$9,07 \cdot 10^3$
2	2001	1700	97,74	$2,93 \cdot 10^8$
	3001	2550	97,74	$6,39 \cdot 10^8$

Полученные ускорения за счёт использования алгоритма 3.3 по отношению к алгоритму 3.1 (без переформирования предобусловливателя) для обеих структур приведены в таблице 6.6. Также в таблице приведены результаты, полученные при использовании алгоритма 3.2 при оптимальном значении порога (указано в скобках).

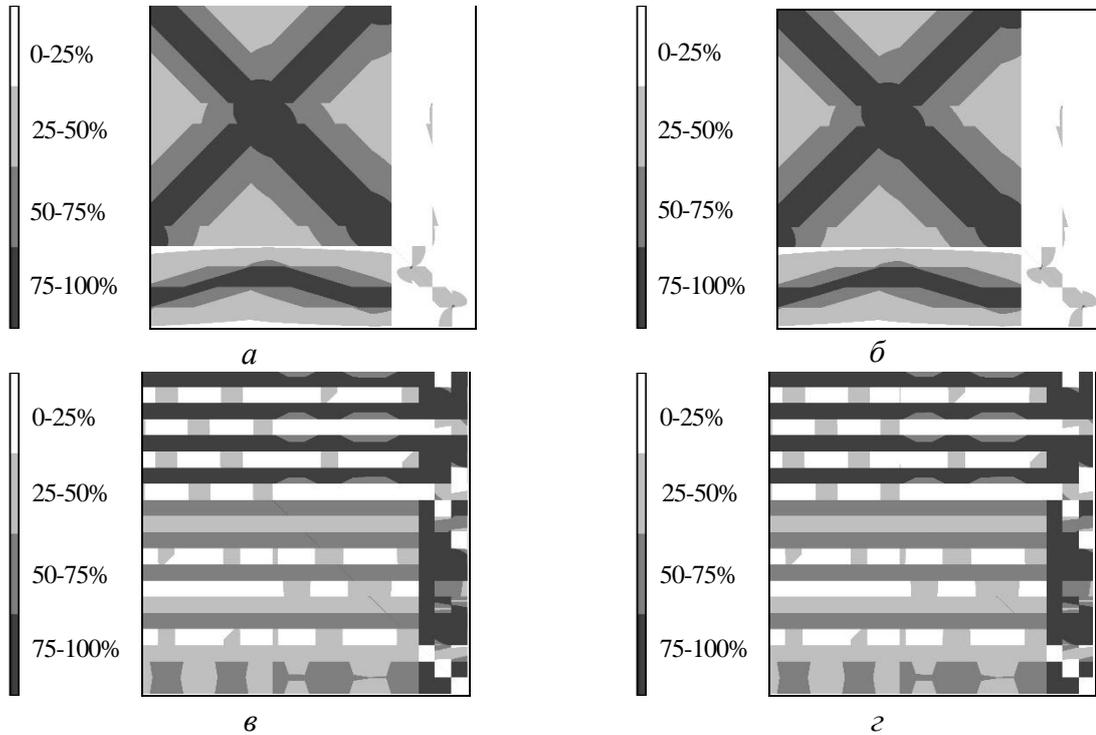


Рисунок 6.12 – Портреты матриц для структуры 1 при $N = 1600$ (а), 3200 (б) и структуры 2 при $N = 2001$ (в), 3001 (г)

Таблица 6.6 – Ускорение решения 100 СЛАУ с переформированием предобусловливателя относительно решения без переформирования

Алгоритм	Структура 1		Структура 2	
	$N = 1600$	$N = 3200$	$N = 2001$	$N = 3001$
По порогу количества итераций (3.2)	1,51 (8)	1,24 (8)	1,62 (10)	1,58 (10)
По среднему арифметическому времени (3.3)	1,51	1,15	1,60	1,46

Из таблицы 6.6 видно, что максимальное ускорение даёт использование алгоритма с перестроением предобусловливателя по порогу количества итераций (алгоритм 3.2). Также видно, что при использовании РС с другими параметрами для вычислений изменило значение оптимального порога количества итераций при анализе МПЛ (см. таблицу 6.4). Алгоритм 3.3 показал чуть меньшие значения ускорения. Так, максимальное различие в значении ускорения для структуры 2 при $N = 3001$ составило менее 7,6%. Для пояснения полученных результатов, на рисунке 6.13 показано, как меняется количество итераций при решении последовательности СЛАУ для обеих структур при использовании алгоритмов 3.2 (при оптимальном пороге) и 3.3.

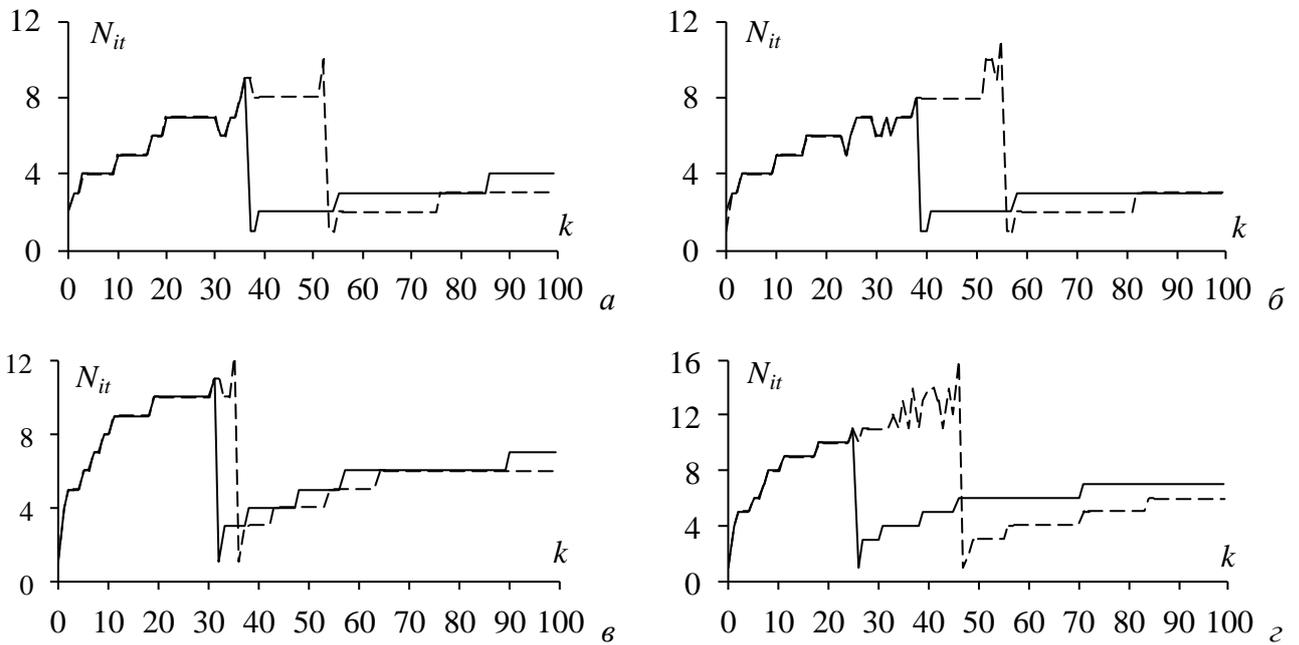


Рисунок 6.13 – Количество затраченных итераций, в зависимости от k , при вычислениях по алгоритмам с перестроением предобусловливателя: при увеличении среднего арифметического времени (---) и по оптимальному порогу количества итераций (—) для структуры 1 при $N = 1600$ (а), 3200 (б) и структуры 2 при $N = 2001$ (в), 3001 (г)

Из рисунка 6.13 видно, что, например, для структуры 1 (рисунок 6.13б) алгоритм 3.3 (по увеличению среднего арифметического времени) при одном перестроении предобусловливателя (при $k = 56$) даёт ускорение в 1,15 раза, а алгоритм 3.2 (по порогу количества итераций) также при одном, но более раннем перестроении (при $k = 39$) – 1,24 раза. Таким образом, более позднее перестроение уменьшает итоговое ускорение решения всей последовательности СЛАУ. Однако алгоритм 3.3 имеет ощутимое преимущество. Он адаптивно определяет момент перестроения предобусловливателя, что позволяет, в

независимости от загрузки центрального процессора РС посторонними задачами, минимизировать общее время решения всей последовательности СЛАУ.

6.1.2.3 Средняя арифметическая сложность решения

Вначале выполнена проверка корректности оценок для LU-разложения на тестовых матрицах. Так, полученное время вычисления (T) и оценки сложности по O -нотации (O) и арифметической сложности (Q), пронормированные по максимальным значениям, приведены на рисунке 6.14. Из него следует, что полученные зависимости практически полностью совпадают. Для получения количественной оценки полученных различий на рисунке 6.15 представлены относительные отклонения нормированных значений оценок от нормированного измеренного времени, полученные как

$$\Delta O = \left| \frac{T - O}{T} \right| \cdot 100\%, \quad (6.1)$$

$$\Delta Q = \left| \frac{T - Q}{T} \right| \cdot 100\%. \quad (6.2)$$

Полученные отклонения не превышают 9% для малого порядка матрицы и уменьшаются с его ростом практически до нуля.

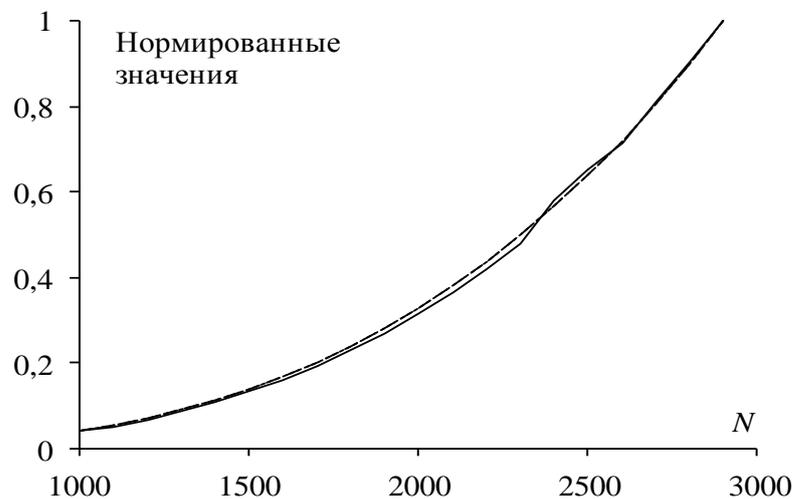


Рисунок 6.14 – Нормированные значения времени (—)
и оценок сложности с помощью O -нотации (- -)
и арифметической сложности (- -) LU-разложения в зависимости от N

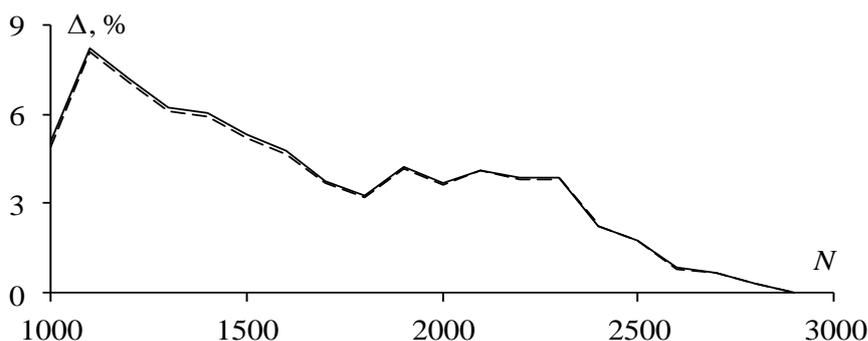


Рисунок 6.15 – Относительные отклонения оценок сложности ΔO (—) и ΔQ (---) LU-разложения в зависимости от N , полученные по (6.1) и (6.2)

Далее сформировано по 100 СЛАУ для трех структур. Для структуры 1 (рисунок 6.3) матрицы с $N = 1600$ сформированы путем изменения высоты проводника (в диапазоне 6, 7, ... 105 мкм), для структуры 2 (рисунок 6.11) матрицы с $N = 2001$ – зазоров (в диапазоне 100, 101, ... 199 мкм), а для структуры 3 (рисунок 6.16), представляющей собой зеркально-симметричный МФ [739], матрицы с $N = 1709$ – зазоров (в диапазоне 7,1; 7,2; ...; 16,9 мкм). Затем учащением сегментации границ этих структур сформированы матрицы с порядками 3200, 3001 и 3109 соответственно. В последующих экспериментах правая часть всех СЛАУ – единичный вектор.

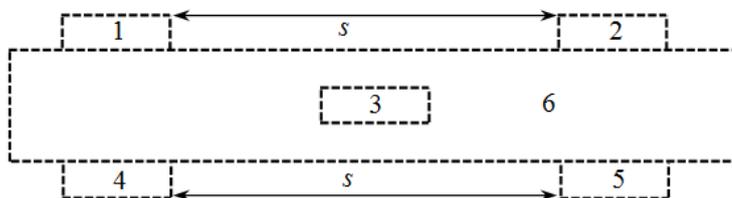


Рисунок 6.16 – Вид поперечного сечения зеркально-симметричного МФ: структура 3 (1–5 –проводники, 6 – диэлектрик)

Характеристики матриц для структур 1 и 2 приведены в таблице 6.5. Для структуры 3 характеристики сведены в таблицу 6.7, а портреты матриц приведены на рисунке 6.17.

Таблица 6.7 – Характеристики матриц для структуры 3 (рисунок 6.16)

N	N_A	Плотность матрицы \mathbf{A} , %	Плотность матрицы \mathbf{M} , %	$\text{cond}(\mathbf{A})$
1709	1220	95,9	100	$2,57 \cdot 10^7$
3109	2220	95,9	100	$8,29 \cdot 10^7$

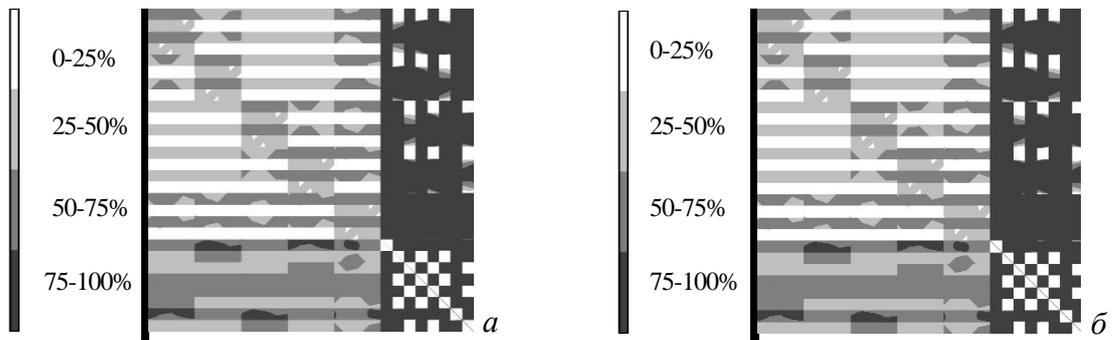


Рисунок 6.17 – Портреты матриц для структуры 3 при разных N : 1709 (а); 3109 (б)

Для сравнения оценок сложности методов BiCGStab и CGS (аналогично LU-разложению) использованы последовательность из 100 СЛАУ, $N = 1600$, $tol = 10^{-8}$ и структура 1 (рисунок 6.3). Для более корректной оценки искусственно увеличены количество итераций и время решения СЛАУ за счёт использования предобусловливателя Якоби (предобусловливатель является диагональной матрицей). На рисунке 6.18 приведено время решения k -й СЛАУ и количество итераций при использовании метода BiCGStab без переформирования предобусловливателя (алгоритм 3.1). На рисунке 6.19 приведены нормированные значения времени решения и оценок сложности. Видно, что, как и случае с LU-разложением, графики практически совпадают. Для более детального сравнения на рисунке 6.20 приведены отклонения нормированных значений, полученные по (6.1) и (6.2). Видно, что максимальное отклонение составляет около 4 %, что подтверждает корректность полученных оценок арифметической сложности.

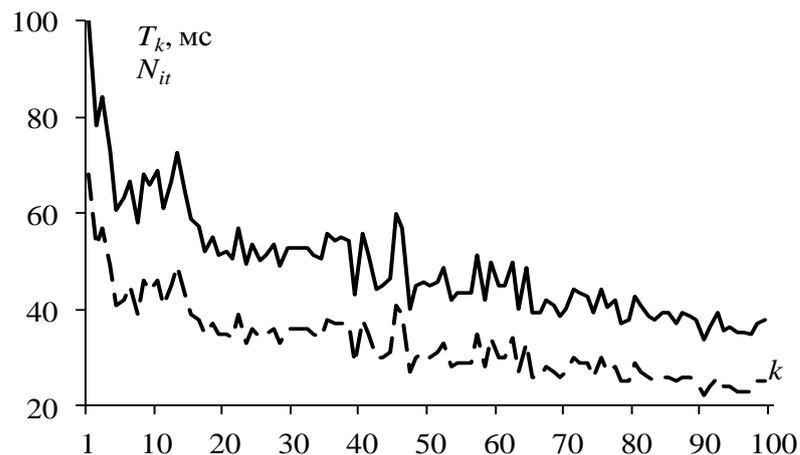


Рисунок 6.18 – Количество итераций (---) и увеличенное в 10 раз время решения (—) k -й СЛАУ методом BiCGStab с диагональным предобусловливателем в зависимости от k



Рисунок 6.19 – Нормированные значения времени решения k -й СЛАУ (—) и оценок сложности с помощью O -нотации (— —) и арифметической сложности (- -) метода BiCGStab с диагональным предобусловливателем в зависимости от k

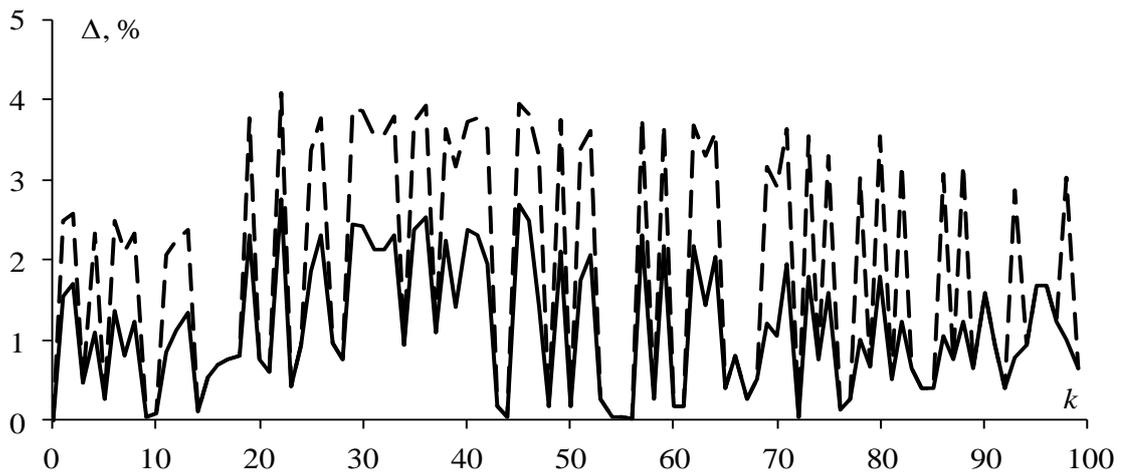


Рисунок 6.20 – Отклонения оценок ΔO (—) и ΔQ (- -) для BiCGStab в зависимости от k

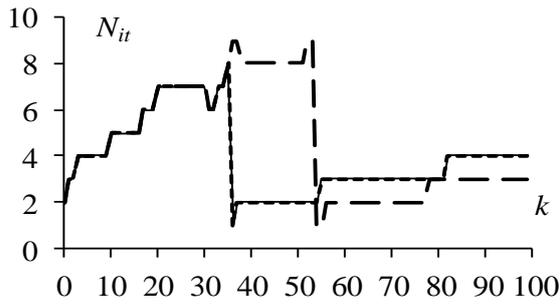
Далее выполнен эксперимент по решению сформированных 100 СЛАУ для всех 3 структур. Полученные значения ускорения относительно алгоритма без переформирования предобусловливателя (алгоритма 3.1) для обоих методов приведены в таблице 6.8. Для наглядности также приведены полученные результаты при использовании переформирования предобусловливателя по порогу количества итераций при его оптимальном значении (указано в скобках).

Таблица 6.8 – Ускорение решения 100 СЛАУ итерационными методами с переформированием предобусловливателя относительно использования алгоритма 3.1

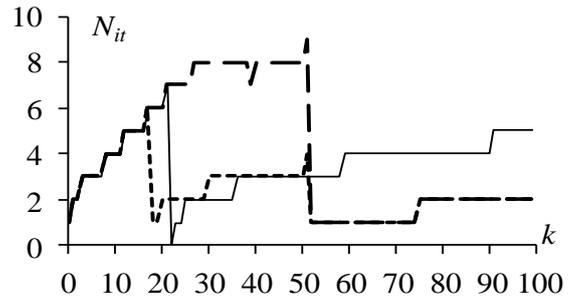
Структура	N	По порогу количества итераций (алгоритм 3.2)		По средней арифметической сложности (алгоритм 3.4)			
				O-нотация		Q	
		BiCGStab	CGS	BiCGStab	CGS	BiCGStab	CGS
1	1600	1,51 (8)	1,34 (7)	1,20	1,52	1,12	1,40
	3200	1,24 (8)	1,35 (7)	0,92	1,27	0,86	1,01
2	2001	1,62 (10)	1,44 (8)	1,60	0,94	1,52	1,05
	3001	1,58 (10)	1,31 (9)	1,55	0,87	1,44	0,95
3	1709	1,12 (9)	1,18 (8)	1,55	1,57	1,55	1,57
	3109	1,03 (10)	1,00 (16)	1,59	1,33	1,59	1,33

Из таблицы 6.8 видно, что алгоритм с переформированием предобусловливателя по порогу количества итераций не всегда даёт максимальное ускорение. Также ускорение решения всей последовательности СЛАУ разработанными алгоритмами не постоянно. Так, при использовании метода BiCGStab получены отклонения значений ускорения для структуры 1 до 26%, для структуры 2 до 9%, а для структуры 3 до 55%. В случае использования метода CGS аналогичные отклонения составили 28, 35 и 34% соответственно. Такие отклонения объясняются тем, что, при использовании разных алгоритмов, переформирования происходят в разные моменты. Так, на рисунке 6.21 приведено количество итераций при решении k -й СЛАУ с использованием приведенных алгоритмов и обоих итерационных методов для структур 1 и 2.

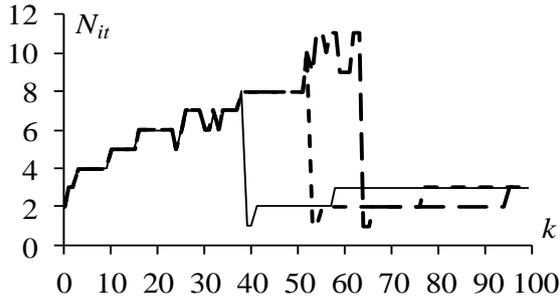
Из данных рисунка 6.21 и таблицы 6.8 видно, что меньшие значения ускорения соответствуют более поздним переформированиям предобусловливателя. Так, для структуры 1 при использовании арифметической сложности (рисунок 6.21в) переформирование происходит после 64 СЛАУ и ускорение отсутствует. Тогда как, использование оптимального порога количества итераций ускоряет решение последовательности СЛАУ в 1,16 раза при переформировании предобусловливателя после 39 СЛАУ. Таким образом, момент переформирования предобусловливателя оказывает сильное влияние на скорость решения последовательности СЛАУ, и при более позднем переформировании значение ускорения уменьшается. При этом, чем ближе момент переформирования к концу последовательности СЛАУ, тем меньшее значение ускорения будет получено.



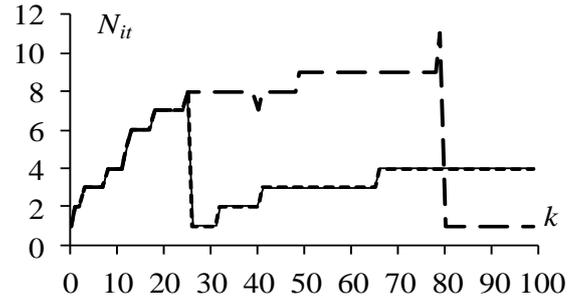
a



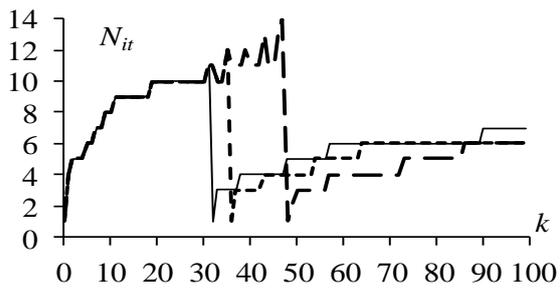
б



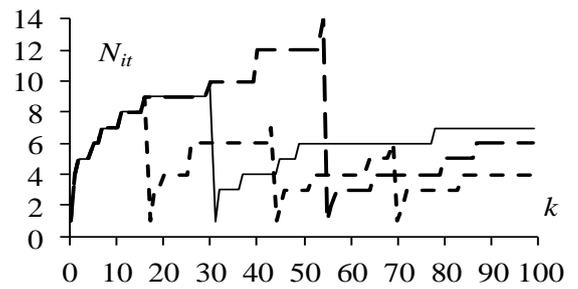
в



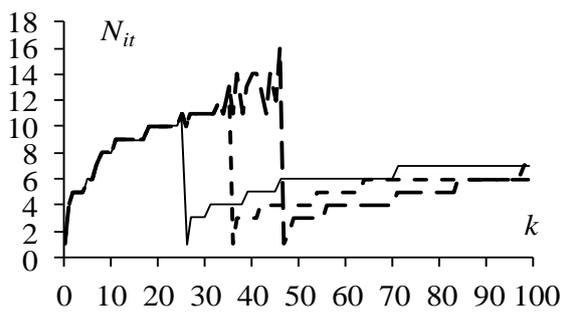
г



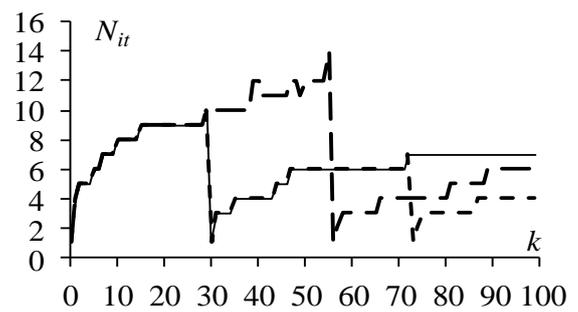
д



е



ж



з

Рисунок 6.21 – Количество требуемых итераций по алгоритмам: с оценкой сложности по O -нотации (---), по арифметической сложности (— · —) и заданием оптимального порога количества итераций (—) при использовании метода BiCGStab:

для структур 1 при $N = 1600$ (a), 3200 (в) и 2 при $N = 2001$ (д), 3001 (ж);

CGS: для структур 1 при $N = 1600$ (б), 3200 (г) и 2 при $N = 2001$ (е), 3001 (з)

6.1.3 Выбор оптимальной очередности решения

Для оценки изменений матрицы СЛАУ, как и ранее, использовались матричные нормы: $\|\Delta\mathbf{A}_{i,j}\|_1$ и $\|\Delta\mathbf{A}_{i,j}\|_\infty$, где $\Delta\mathbf{A}_{i,j}$ – матрица изменений, вычисляемая как $\Delta\mathbf{A}_{i,j} = \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j$, i и j – номера матриц из последовательности ($i, j = 1, 2, \dots, m$, m – общее количество СЛАУ). Сначала рассмотрена структура МФ (рисунок 6.11). Матрицы с порядком $N = 2001$ сформированы изменением величины зазоров. Это изменение осуществлялось в прямом (100, 101, ..., 199 мкм) и обратном (199, 198, ..., 100 мкм) порядках. Полученные зависимости относительных норм матрицы изменений при использовании обоих порядков от номера решаемой СЛАУ приведены на рисунке 6.22.

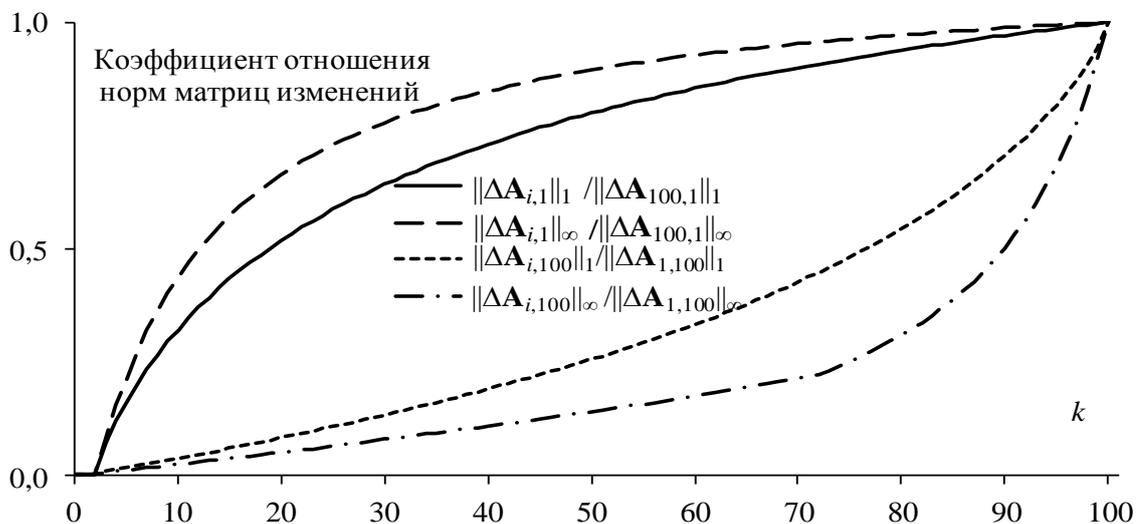


Рисунок 6.22 – Зависимости относительных норм матрицы изменений от номера решаемой СЛАУ при разных порядках решения для структуры из рисунка 6.11

Как видно из рисунка 6.22, характер зависимостей для каждой из норм одинаков, однако в случае использования прямого порядка решения при увеличении количества решаемых СЛАУ наблюдается их монотонное нарастание с уменьшающейся скоростью, более выраженной в начале диапазона и менее – в его конце. При использовании обратного порядка решения этот характер противоположен. Ранее было показано, что существует связь между эффективностью предобусловливателя от количества изменений в матрицах СЛАУ решаемой последовательности. Их рисунка видно, что эти изменения при использовании обратного порядка решения почти всегда меньше, чем при использовании прямого порядка. Поэтому при использовании обратного порядка эффективность предобусловливателя более существенна, что объясняется меньшими и более плавными изменениями в матрице. Таким образом, для

уменьшения затрат времени на решение последовательности СЛАУ следует сначала решать системы, характеризующимися наименьшими изменениями между их матрицами, и только потом – с большими. Для этого целесообразно определить наиболее близкие по значениям между собой матрицы, т.е. найти $\min_j \|\Delta \mathbf{A}_{i,j}\|_1$ или $\min_j \|\Delta \mathbf{A}_{i,j}\|_\infty$, и далее с помощью сортировки ранжировать матрицы по возрастанию этих различий. Однако такой подход непрактичен, поскольку основан на трудоемком поиске, т.к. для его реализации требуется m^2 раз выполнить оценку изменений в значениях матрицы.

Далее для вычислительного эксперимента использованы РС с параметрами из подпункта 6.1.2.2, методы BiCGStab и CGS, а также 3 структуры: 1 – из рисунка 6.3, 2 – из рисунка 6.11, 3 – из рисунка 6.16. Выполнено решение последовательности из 100 СЛАУ при использовании прямого и обратного порядков решения. Полученное уменьшение затрат времени на решение этой последовательности за счёт использования обратного порядка относительно прямого, выраженное для наглядности в виде ускорения, сведено в таблицу 6.9.

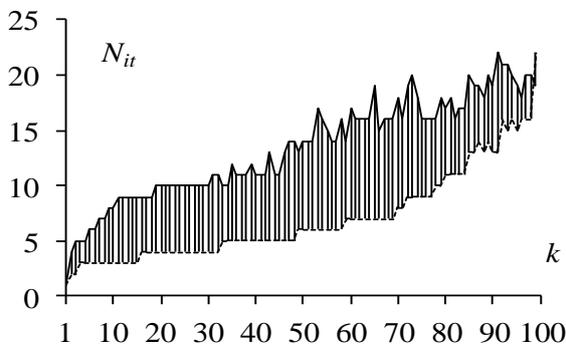
Из таблицы 6.9 видно, что при исследовании всех трех структур получено ускорение за счет использования обратного порядка решения относительно прямого, вне зависимости от порядка N и задействованного для вычислений итерационного метода. В целом, получено большее ускорение для метода BiCGStab. Полученное ускорение объясняется разницей в количестве итераций, требуемых для решения последовательности СЛАУ в прямом (N_{it}^+) и обратном (N_{it}^-) порядках. Эта разница выражается в виде площади фигуры, которая ограничена полученными зависимостями количества итераций, представленными рисунками 6.23 и 6.24 для методов BiCGStab и CGS соответственно.

Таблица 6.9 – Ускорение решения последовательности из 100 СЛАУ методами BiCGStab и CGS за счёт использования обратного порядка решения относительно прямого

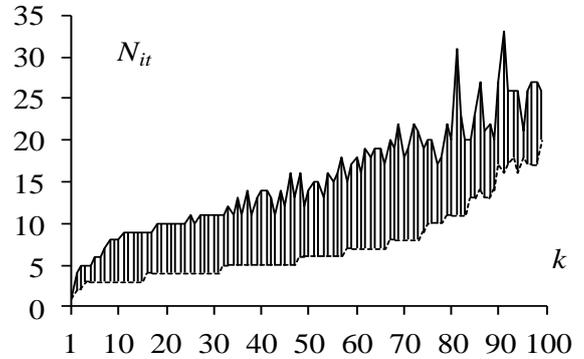
Структура	N	BiCGStab	CGS
1	1600	1,76	1,73
	3200	1,63	1,66
2	2001	1,71	1,58
	3001	1,84	1,53
3	1709	1,82	1,59
	3109	1,83	1,32

Из рисунков 6.23 и 6.24 видно, что для всех структур количество итераций при решении СЛАУ в прямом порядке больше, чем в обратном. Главная причина такого различия

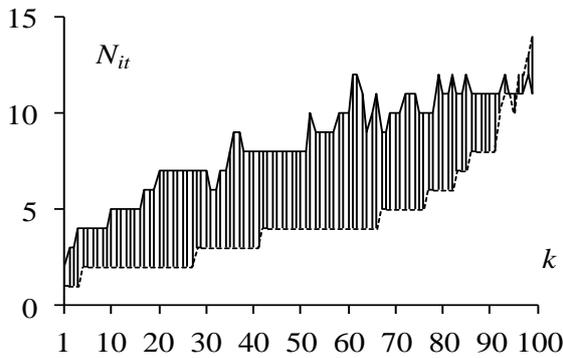
заключается в разных матрицах СЛАУ, из которых вычислен предобуславливатель: в прямом из матрицы первой СЛАУ, а в обратном – из 100-й. На количество требуемых итераций повлияла и различная степень изменений в значениях элементов матрицы СЛАУ в начале (сильная) и конце (слабая) последовательности.



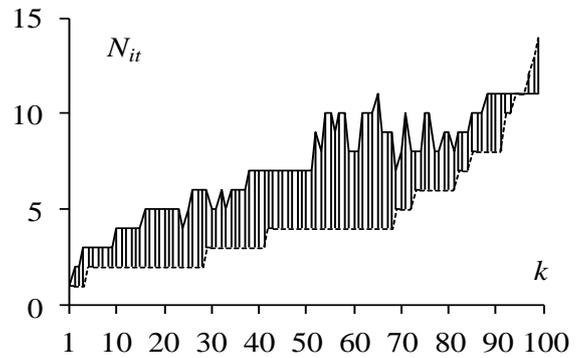
a



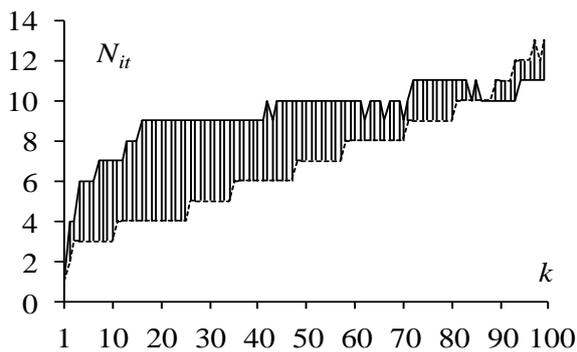
б



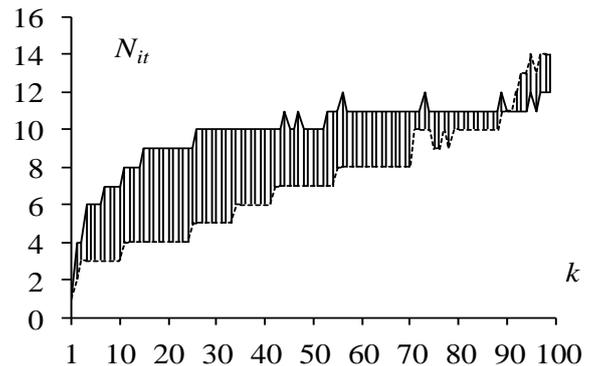
в



г



д



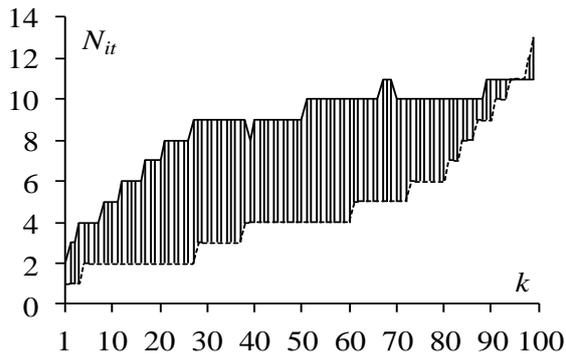
е

Рисунок 6.23 – Количество требуемых итераций для решения последовательности из 100СЛАУ

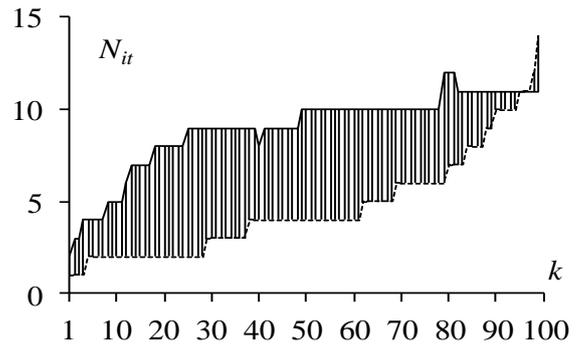
методом BiCGStab в прямом (—) и обратном (- -) порядках

для структур: 1 – при $N = 1600$ (*a*), 3200 (*б*); 2 – при $N = 2001$ (*в*), 3001 (*г*);

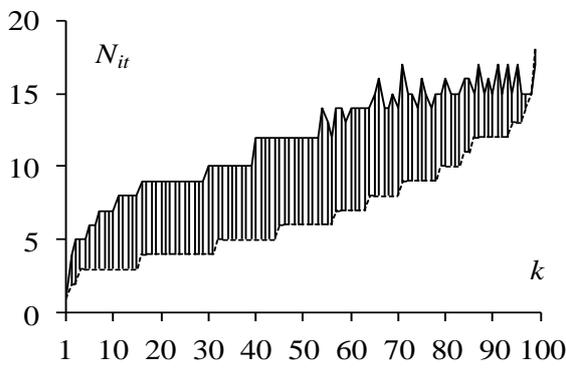
3 – при $N = 1709$ (*д*), 3109 (*е*)



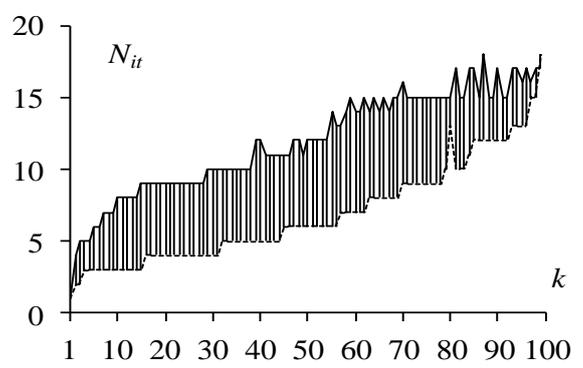
a



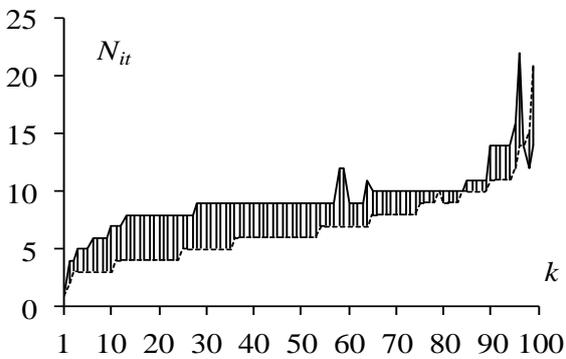
б



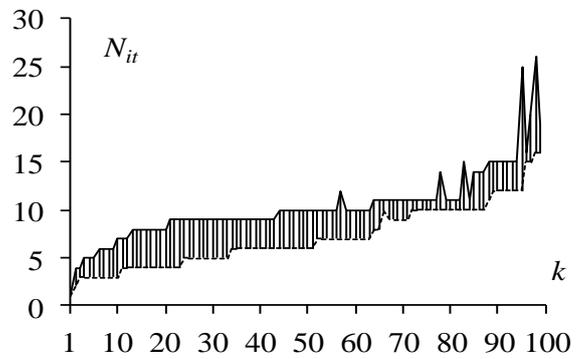
в



з



д



е

Рисунок 6.24 – Количество требуемых итераций для решения последовательности из 100 СЛАУ итерационным методом CGS в прямом (N_{it}^+) и обратном (N_{it}^-) порядках для структур: 1 – при $N = 1600$ (a), 3200 (б); 2 – при $N = 2001$ (в), 3001 (з); 3 – при $N = 1709$ (д), 3109 (е)

6.1.4 Выбор оптимальной матрицы для вычисления предобусловливателя

Для демонстрации эффективности алгоритма решения последовательности СЛАУ с выбором матрицы для вычисления предобусловливателя (алгоритм 3.6) выполнен вычислительный эксперимент с использованием РС (с параметрами из подпункта 6.1.2.2) и метода BiCGStab. Рассмотрено 3 структуры: структура 1 из рисунка 6.3, 2 – из рисунка 6.11 и 3 – из рисунка 6.16.

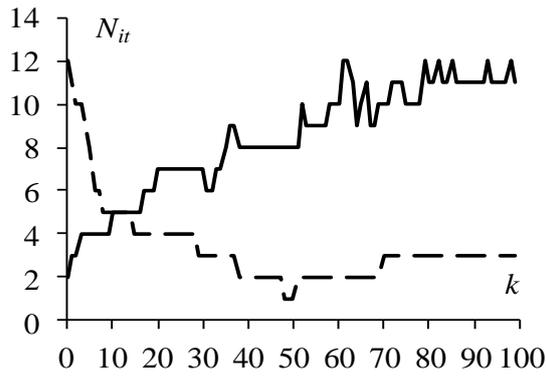
Сначала для вычисления предобусловливателя выбрана 50-я матрица последовательности СЛАУ и прямой порядок решения (с 1-й по 100-ю СЛАУ). В таблицу 6.10 сведены полученные значения ускорения относительно случая вычислений по алгоритму 3.1 (предобусловливатель вычислен из 1-й матрицы последовательности СЛАУ).

Таблица 6.10 – Ускорение решения 100 СЛАУ согласно алгоритму 3.6 с выбором 50-й матрицы для вычисления предобусловливателя относительно выбора 1-й матрицы (алгоритм 3.1)

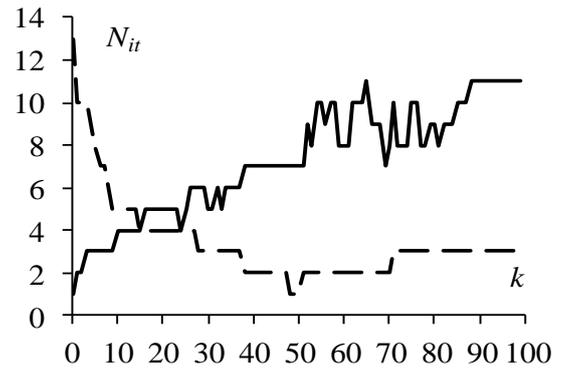
Структура	N	Ускорение
1	1600	2,07
	3200	2,21
2	2001	2,14
	3001	1,94
3	1709	1,81
	3109	1,86

Видно, что для всех структур и N наблюдается ускорение и его значение достигает 2,21 раза (структура 1, $N = 3200$). Это ускорение получено за счет снижения общего количества итераций при многократном решении СЛАУ. Так, на рисунке 6.25 приведены зависимости количества итераций при решении k -й СЛАУ при использовании предобусловливателя, вычисленного из 1-й и из 50-й матриц последовательности СЛАУ. Из рисунка следует, что количество итераций при выборе 50-й матрицы значительно меньше, чем при выборе 1-й. Их разница и объясняет полученное ускорение решения всей последовательности СЛАУ.

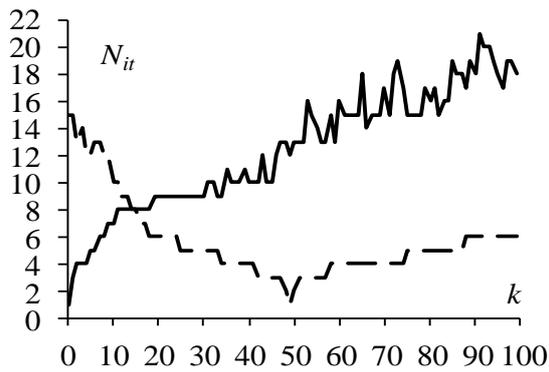
Далее выполнена оценка совместного использования выбора матрицы для вычисления предобусловливателя согласно алгоритму 3.6 и очередности решения согласно алгоритму 3.5. При вычислениях также использован метод BiCGStab. Для формирования предобусловливателя выбрана 50-я матрица последовательности СЛАУ. Рассмотрено 3 возможных варианта выбора очередности, схематично показанных в таблице 6.11 (направление стрелок указывает на изменение порядкового номера решаемой СЛАУ).



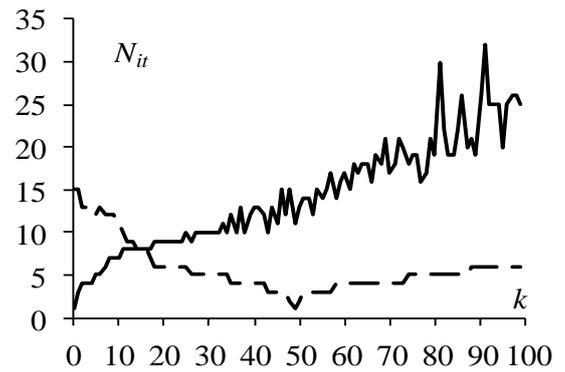
a



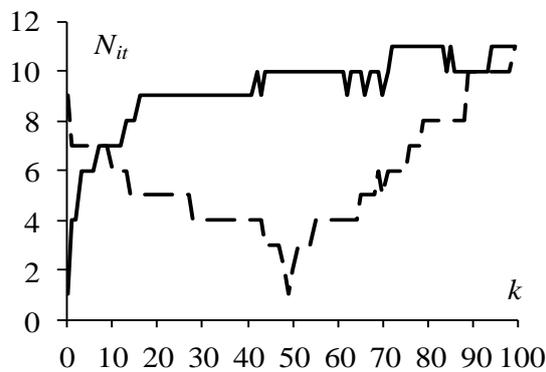
б



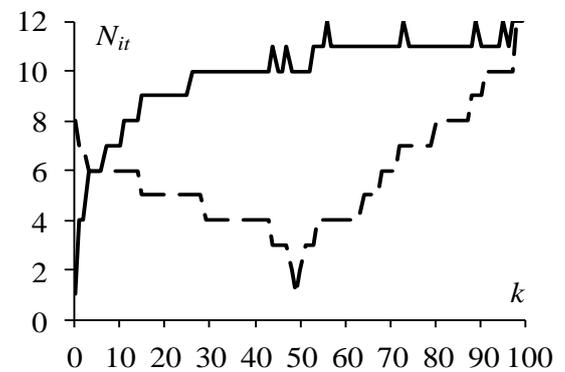
в



г



д



е

Рисунок 6.25 – Количество итераций, в зависимости от k , при вычислении предобусловливателя из 1-й (—) и 50-й (---) матриц последовательности СЛАУ для структур: 1 – при $N = 1600$ (a), 3200 (б); 2 – $N = 2001$ (в), 3001 (г); 3 – $N = 1709$ (д), 3109 (е)

Таблица 6.11 – Варианты очередности решения 100 СЛАУ при использовании 50-й матрицы для вычисления предобусловливателя

Вариант	Очередность решения СЛАУ	
	1–49	51–100
1	←	←
2	→	←
3	←	→

В таблице 6.12 приведены значения ускорения, полученные относительно вычисления по алгоритму алгоритм 3.1 (выбор 1-й матрицы для вычисления предобусловливателя и прямого порядка решения). Видно, что полученные значения ускорения, при разных вариантах выбора очередности вычисления, для всех структур практически одинаковы. Так, максимальное различие в значениях составляет около 1 % относительно среднего ускорения. Это объясняется разбросом измерения времени при вычислениях.

Таблица 6.12 – Ускорение решения последовательности из 100 СЛАУ методом BiCGStab с выбором средней матрицы для вычисления предобусловливателя при разной очередности

Структура	N	Вариант очередности решения		
		1	2	3
1	1600	2,16	2,16	2,16
	3200	1,95	1,94	1,96
2	2001	2,05	2,07	2,07
	3001	2,19	2,21	2,20
3	1709	1,81	1,80	1,80
	3109	1,85	1,86	1,86

Далее выполнено исследование по выявлению влияния выбора i -го номера матрицы последовательности СЛАУ для вычисления предобусловливателя на общий процесс решения этой последовательности. В качестве первого исследования рассмотрена структура 2, которая характеризуется худшей обусловленностью матрицы СЛАУ. Полученное ускорение относительно решения с использованием первой матрицы для вычисления предобусловливателя (алгоритм 3.1) приведено на рисунке 6.26. Из рисунка видно, что выбор 1-й матрицы последовательности для вычисления предобусловливателя является наихудшим. При этом выбор любой из последующих матриц даёт ускорение. Однако его значение различно при выборе конкретной матрицы. Так, максимальные значения ускорения для разных порядков матрицы составляют: 2,1 раза при $N = 2001$ ($i = 51$) и 2,21 раза при $N=3001$ ($i = 50$). Из рисунка также видно, что в диапазоне i от 30 до 60 значение ускорения меняется незначительно, что облегчает выбор оптимальной матрицы для вычисления предобусловливателя.

Для оценки работоспособности разработанных алгоритмов для решения последовательности СЛАУ с несколькими правыми частями рассмотрена задача многократного вычисления ёмкостной матрицы для 2 структур МФ: структура 2 (рисунок 6.11) и 3 (рисунок 6.16). Для структуры 2 порядок матрицы $N = 3001$ и количество правых частей (p) – 2, а для структуры 3 – 3109 и 4 соответственно. Используются методы BiCGStab (последовательное

решение с каждой правой частью) и BI-BiCGStab, максимальное количество итераций – 200 (в случае BiCGStab для решения с каждой правой частью) и $tol = 10^{-6}$. Правые части получены из задачи определения ёмкостной матрицы. Для решения СЛАУ использован пакет Matlab и реализованная в нем функция решения СЛАУ методом BiCGStab. Для проведения корректного сравнения автором самостоятельно реализована функция метода BI-BiCGStab, поскольку стандартная функция отсутствует [740].

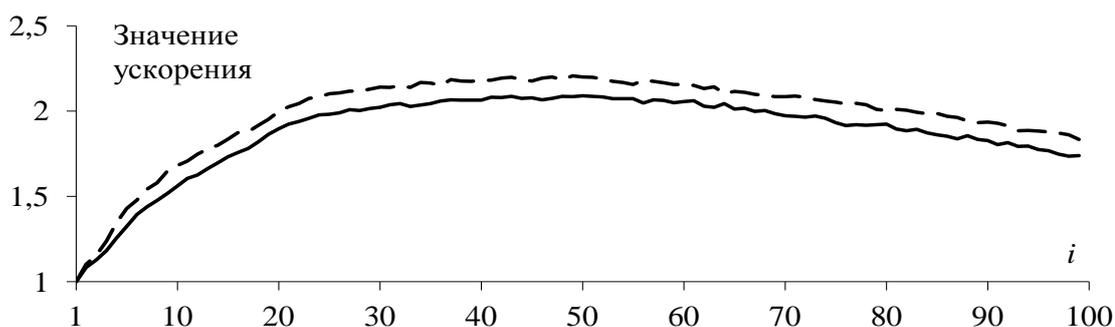


Рисунок 6.26 – Ускорение решения последовательности из 100 СЛАУ методом BiCGStab с выбором i -й матрицы относительно случая с выбором 1-й матрицы для вычисления предобусловливателя для структуры 2 при $N = 2001$ (—) и $N = 3001$ (— —)

На рисунке 6.27 для структуры 2 приведены зависимости требуемого количества итераций от номера решаемой СЛАУ при использовании 2-х вариантов выбора начального приближения (нулевое и решение предыдущей СЛАУ) и 3-х вариантов выбора матрицы для вычисления предобусловливателя (прямой порядок или из 1-й матрицы, обратный порядок или из последней (100-й) и из 50-й матриц СЛАУ). В таблице 6.13 приведены значения полученного ускорения относительно использования метода BiCGStab, прямого порядка решения (вычисление предобусловливателя из 1-й матрицы) и нулевого начального приближения. На рисунке 6.28 и в таблице 6.14 приведены аналогичные результаты для структуры 3.

Таблица 6.13 – Ускорение решения 100 СЛАУ с двумя правыми частями методами BiCGStab и BI-BiCGStab с разными предобусловливателями и начальными приближениями для структуры 2

Номер матрицы СЛАУ для вычисления предобусловливателя	BiCGStab		BI-BiCGStab	
	Нулевое	Предыдущее решение	Нулевое	Предыдущее решение
1 (прямой порядок)	1,00	1,55	3,47	4,34
100 (обратный порядок)	2,61	3,71	6,36	8,06
50	3,39	4,77	7,22	9,01

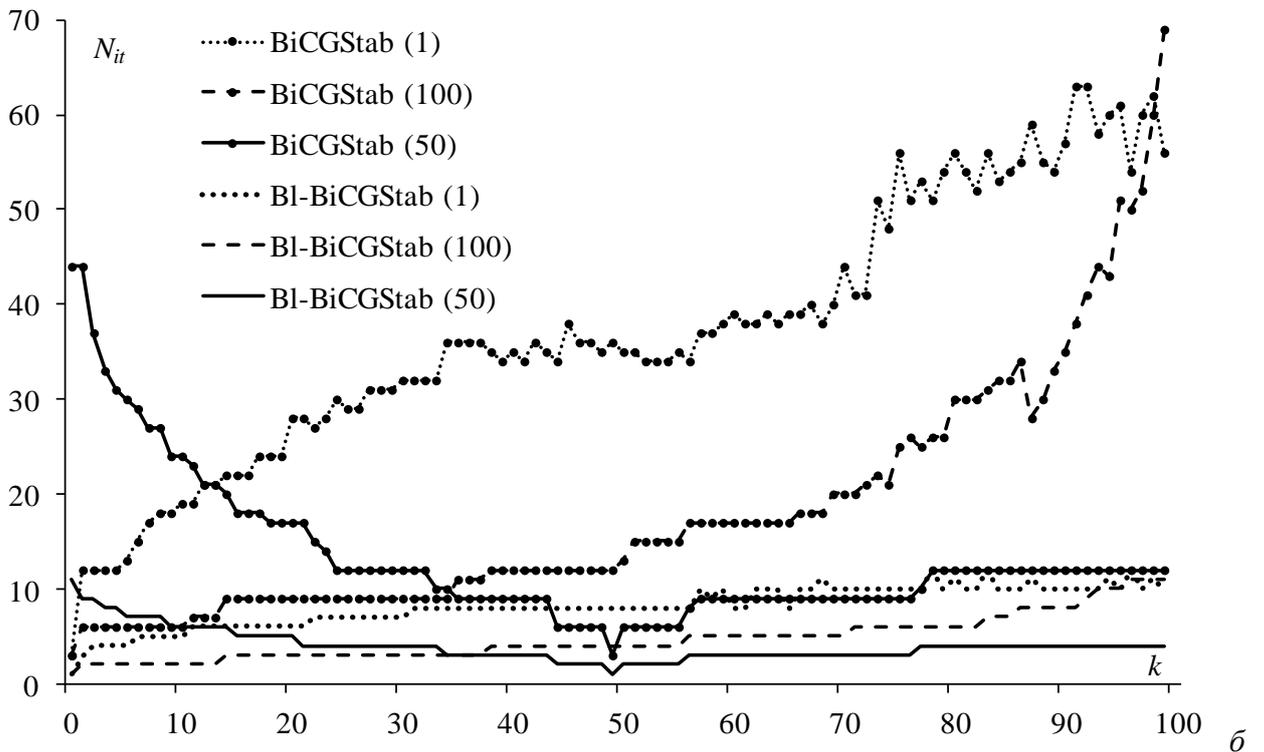
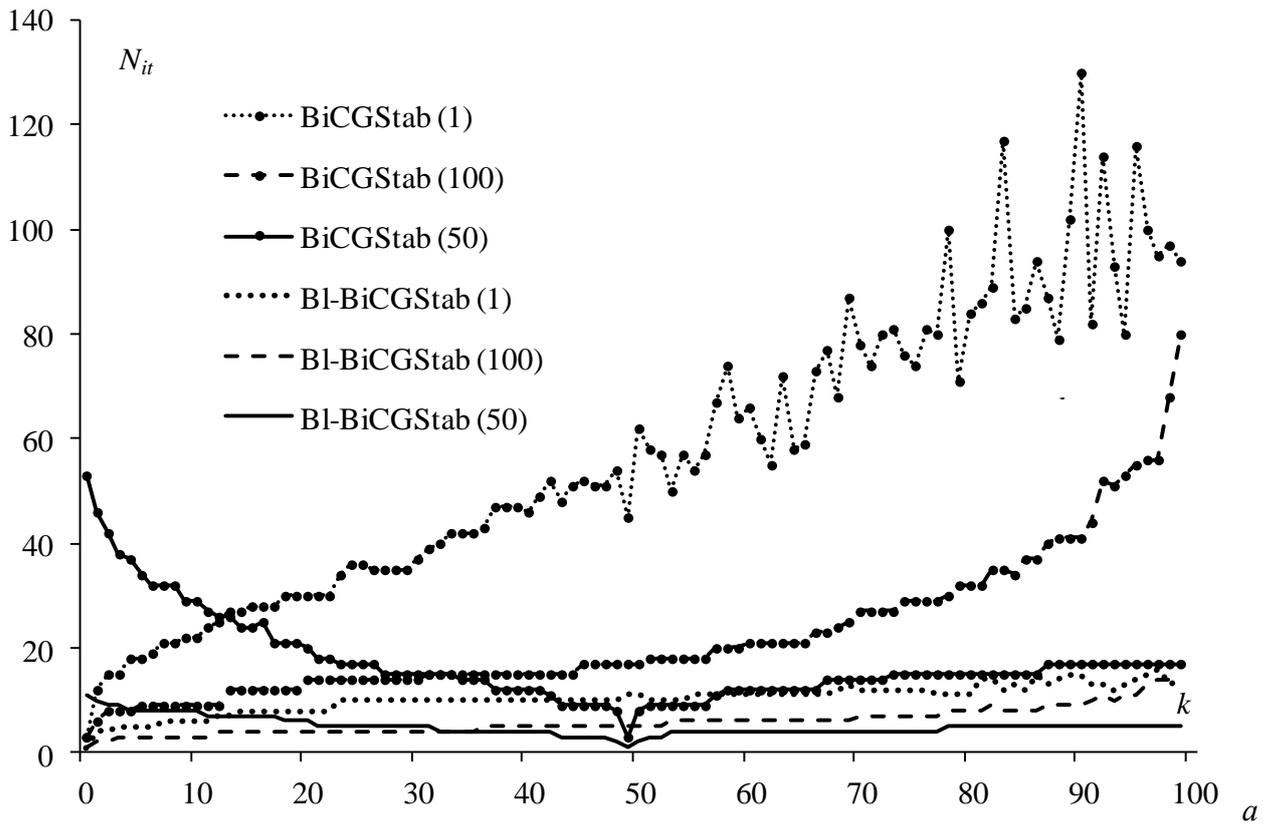


Рисунок 6.27 – Количество итераций в зависимости от k при решении последовательности из 100 СЛАУ методами BiCGStab и BI-BiCGStab с выбором для вычисления предобусловливателя 1-й, 50-й и 100-й матриц для структуры 2 (рисунок 6.11) при использовании начального приближения: нулевого (а) и решения предыдущей СЛАУ (б)

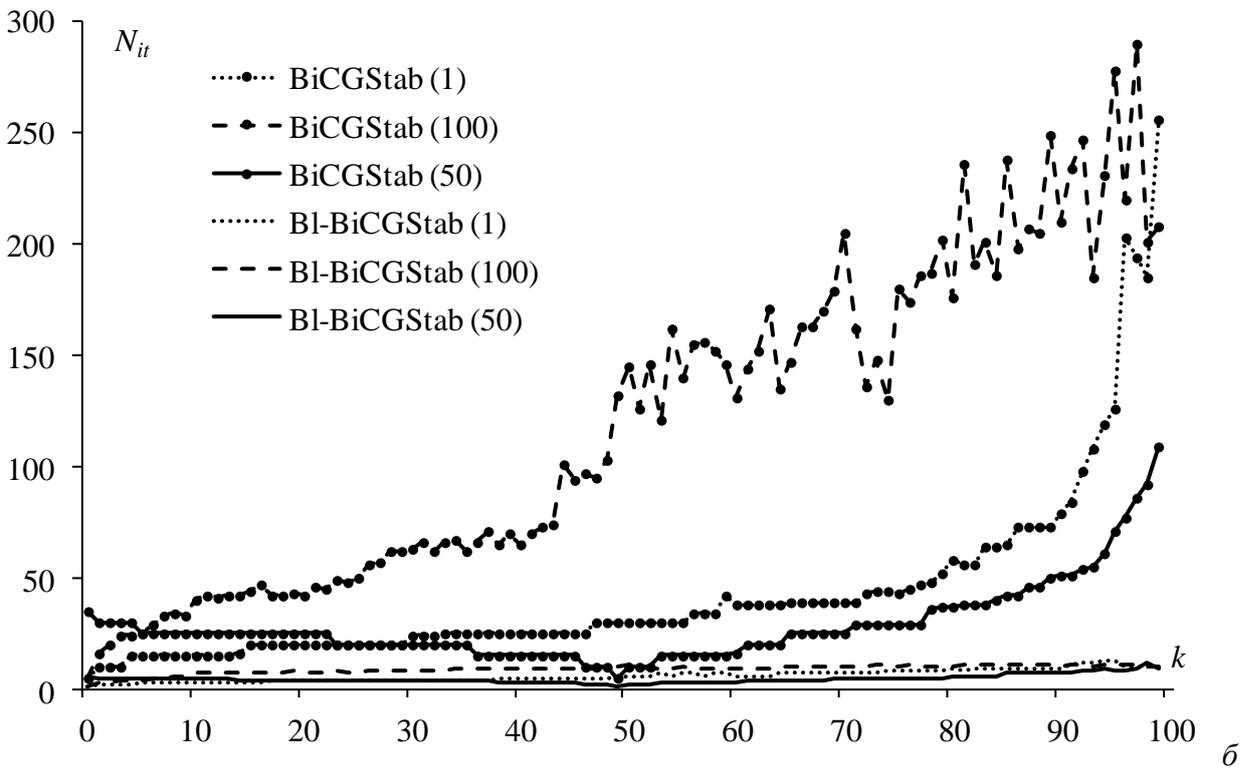
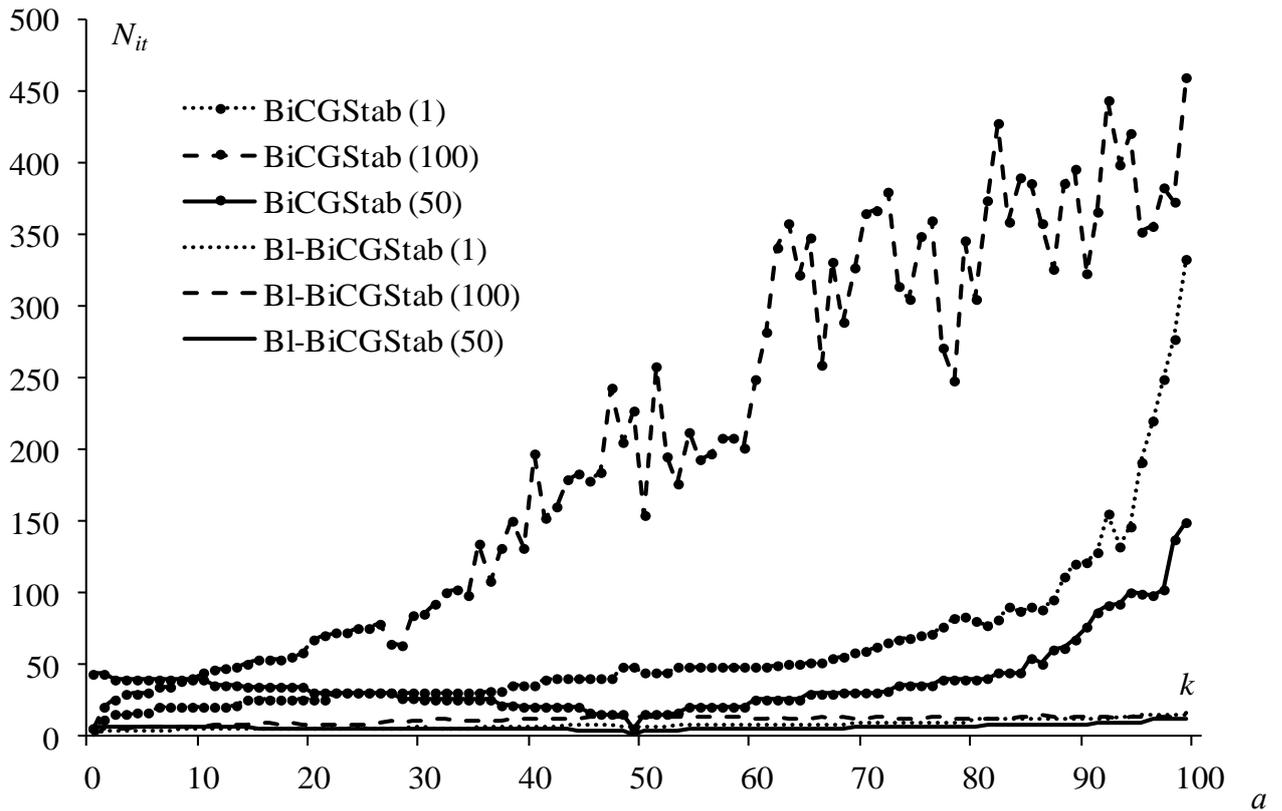


Рисунок 6.28 – Количество итераций в зависимости от k при решении последовательности из 100 СЛАУ методами BiCGStab и BI-BiCGStab с выбором для вычисления предобусловливателя 1-й, 50-й и 100-й матриц для структуры 3 (рисунок 6.16) при использовании начального приближения: нулевого (а) и решения предыдущей СЛАУ (б)

Таблица 6.14 – Ускорение решения 100 СЛАУ с четырьмя правыми частями методами BiCGStab и BI-BiCGStab с разными предобусловливателями и начальными приближениями для структуры 3

Номер матрицы СЛАУ для вычисления предобусловливателя	BiCGStab		BI-BiCGStab	
	Нулевое	Предыдущее решение	Нулевое	Предыдущее решение
1 (прямой порядок)	1,00	2,01	10,86	12,21
100 (обратный порядок)	3,80	5,33	14,76	20,09
50	5,98	7,79	20,68	22,37

Из рисунков 6.27, 6.28 и таблиц 6.13, 6.14 видно, что полученные ранее результаты решения последовательности СЛАУ с одной правой частью хорошо коррелируются на случай с несколькими правыми частями. Так, использование обратного порядка решения и, тем более, выбор средней матрицы последовательности СЛАУ для формирования предобусловливателя, при увеличении количества правых частей, еще больше ускоряет процесс многократного решения СЛАУ. При этом использование блочной версии метода BiCGStab особенно эффективно по сравнению с его последовательной версией. Так, значение ускорения достигает 9 и более 22 раз для структур 2 и 3 соответственно.

Далее выполнен вычислительный эксперимент для оценки применимости метода Seed-BiCGStab. Для этого также использованы 2 структуры и перечисленные выше варианты вычислений. При вычислениях «опорная» (seed) правая часть выбиралась произвольно.

В разделе 1 (подпункт 1.6.3.2) упоминалось, что использование метода Seed-BiCGStab для решения последовательности СЛАУ является эффективным, только если правые части слабо отличаются друг от друга. Однако, для рассматриваемой задачи многократного вычисления ёмкостной матрицы, различия правых частей оказываются слишком существенны, для эффективной работы метода. Так, на рисунке 6.29 приведены результаты применения метода для обеих структур при «лучшем» и «худшем» наборах вычислительных параметров (матрица для вычисления предобусловливателя и начальное приближение), с точки зрения минимизации общего количества итераций. Видно, что рассмотренные варианты выбора очередности решения и матрицы для формирования предобусловливателя, а также начального приближения, в сочетании с методом Seed-BiCGStab плохо применимы. Так, при всех рассмотренных наборах вычислительных параметров, наблюдается неспособность метода получать решение с требуемой точностью за заданное количество итераций. Поэтому использование метода Seed-BiCGStab при решении задачи многократного вычисления ёмкостной матрицы полосковой

структуры (в данном случае МФ) методом моментов не эффективен, и его лучше не использовать.

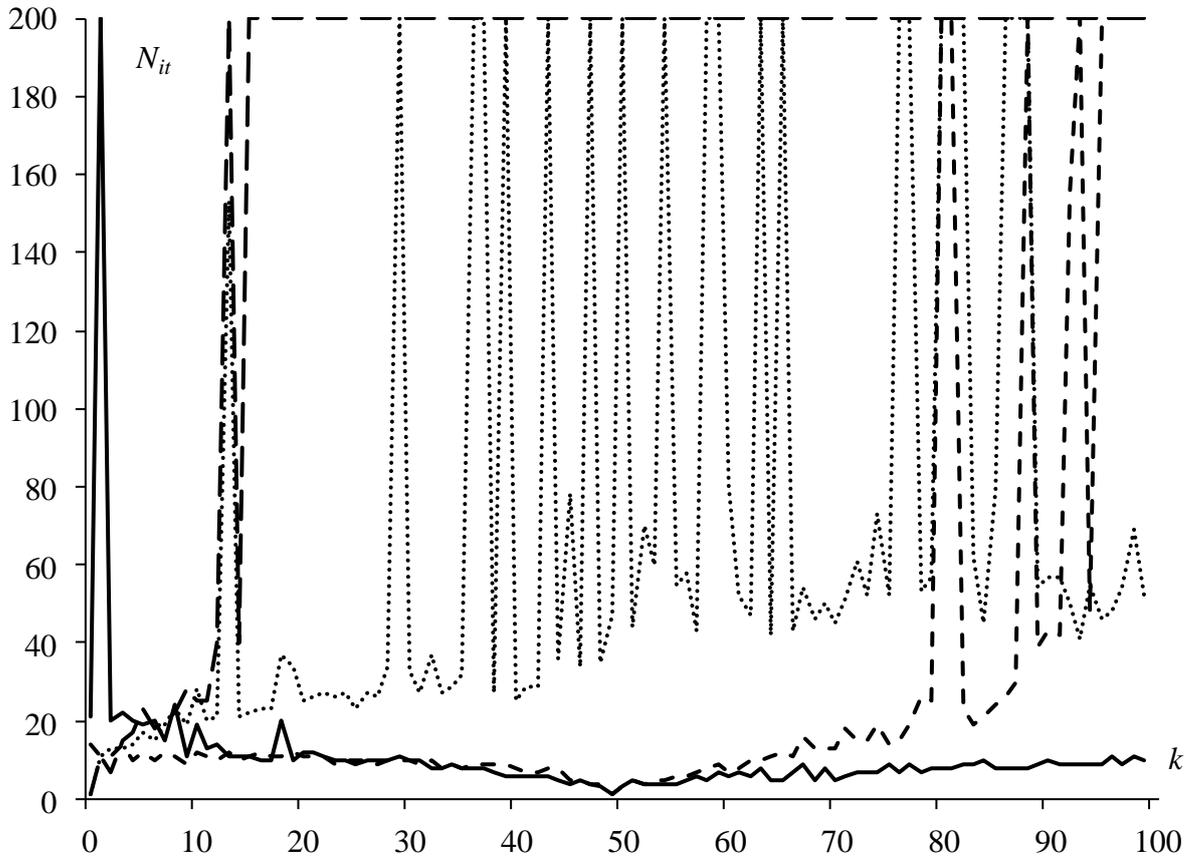


Рисунок 6.29 – Количество итераций в зависимости от k при решении 100 СЛАУ методом Seed-BiCGStab для структуры 2 (рисунок 6.11): с выбором 1-й матрицы и нулевого начального приближения (...); 50-й матрицы и начального приближения в виде решения предыдущей СЛАУ (—), и для структуры 3 (рисунок 6.16): 100-й (- -) и 50-й (—) матрицы при использовании решения предыдущей СЛАУ в качестве начального приближения

6.2 Ускорение за счёт использования блочного LU-разложения при решении СЛАУ

6.2.1 Изменение диэлектрической проницаемости диэлектрика

Далее приведены результаты вычислительного эксперимента, позволяющие оценить эффективность предложенных модификаций алгоритма, представленного в пункте 3.3.1 [741]. Для исследований с помощью скрипта TALGAT создана программа, формирующая соединитель СНП 339 (геометрическая модель поперечного сечения показана на рисунке 6.30a), имеющий 42 внутренних проводника во внешнем прямоугольном (опорном) проводнике-корпусе. Вокруг

каждого внутреннего проводника и внутри внешнего проводника имеется тонкий слой воздуха (рисунок 6.30б, и 6.30в).

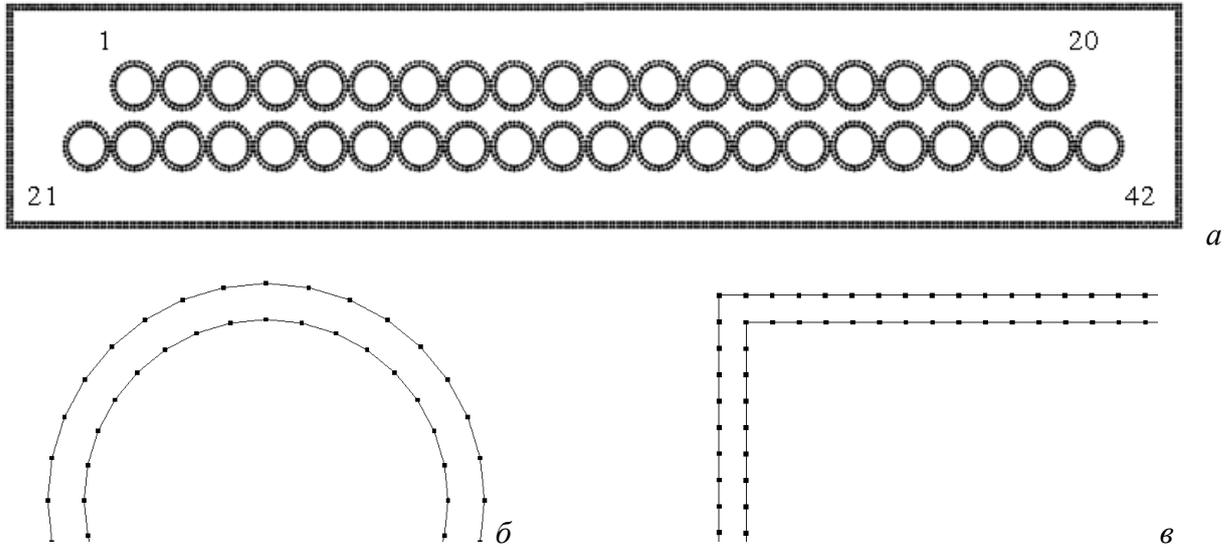


Рисунок 6.30 – Геометрическая модель поперечного сечения соединителя с наличием диэлектрических слоев (а), увеличенные фрагменты с сегментацией внутреннего круглого (б) и внешнего прямоугольного (в) проводников с воздушными слоями

При изменении параметров сегментации проводников и диэлектриков (отношения N_A/N) оценивалось ускорение, которое возможно получить при использовании блочных операций в скрипте TALGAT. Целью моделирования являлась оценка временных затрат на вычисление 10 ёмкостных матриц ($\epsilon_r = 5; 5,5; \dots; 9,5$) при учащении сегментации проводников и диэлектриков. Для достижения этой цели использованы СЛАУ 3 порядков (N), а также 2 РС, характеристики которых приведены в таблице 6.15.

Таблица 6.15 – Характеристики рабочих станций (РС)

РС	Процессор	Тактовая частота процессора, ГГц	Объём ОЗУ, Гбайт	Количество ядер/потоков	Операционная система
1	Intel Celeron P4500	1,86	2	2/2	Windows 7
2	Intel Core i7-970	3,20	12	6/12	Windows 7

Временные затраты приведены в таблице 6.16. С ростом N_A/N для каждого значения N увеличивается выигрыш по времени при использовании алгоритма 3.9, по сравнению с алгоритмом 3.7, независимо от используемой РС. Максимальный выигрыш достигает 2,5 раза при $N = 4145$ и $N_A/N = 0,81$, в случае использования РС1. Таким образом, очевидна более высокая эффективность использования алгоритма 3.9 по сравнению с алгоритмом 3.7 для многократного вычисления ёмкостной матрицы.

Таблица 6.16 – Время вычисления (T , с) 10 ёмкостных матриц, используя алгоритмы 3.7 и 3.9, при учащении сегментации проводников и диэлектриков

N_A/N	PC	$N = 1037$			$N = 2071$			$N = 4145$		
		$T_{3.7}$	$T_{3.9}$	$T_{3.7}/T_{3.9}$	$T_{3.7}$	$T_{3.9}$	$T_{3.7}/T_{3.9}$	$T_{3.7}$	$T_{3.9}$	$T_{3.7}/T_{3.9}$
0,18	1	14,5	11,7	1,24	63,5	48,2	1,31	322,4	271,2	1,19
	2	5	4,3	1,16	20,2	16	1,26	92,3	68,3	1,35
0,50	1	12,9	8	1,61	57,6	40,1	1,44	275,4	167,3	1,65
	2	4,3	3,3	1,30	17,6	12	1,47	79,6	48,9	1,63
0,81	1	10,4	5,9	1,76	52,5	23,6	2,22	241,3	98	2,46
	2	3,2	2,2	1,45	14	8,3	1,69	67,9	38,4	1,77

Для оценки последующих усовершенствований алгоритма 3.9 проведен аналогичный вычислительный эксперимент на PC1 с матрицей $N = 4145$ при изменении сегментации проводников и диэлектриков, для алгоритмов 3.9 и 3.11. Результаты приведены в таблице 6.17. Для наглядности также приведены результаты применения алгоритма 3.7, не использующего блочное представление матрицы, а также отношения времени работы алгоритмов. Видно, что использование алгоритма 3.11 предпочтительнее, чем алгоритмов 3.7 и 3.9. Так, оно дает ускорение по сравнению с алгоритмом 3.7 около 2,7 раза при $N_A/N = 0,81$ и около 1,5 раза при $N_A/N = 0,18$ по сравнению с алгоритмом 3.9. В случае использования алгоритма 3.8, являющегося матричной версией исходного алгоритма, полученный выигрыш незначительно снизится. Стоит отметить, что увеличение количества определяемых ёмкостных матриц приведет к увеличению выигрыша времени при использовании предложенных усовершенствований.

Таблица 6.17 – Время вычисления ёмкостных матриц, используя алгоритмы 3.7, 3.9 и 3.11 при $N = 4145$ для PC1

N_A/N	$T_{3.7}$	$T_{3.9}$	$T_{3.11}$	$T_{3.7}/T_{3.9}$	$T_{3.7}/T_{3.11}$	$T_{3.9}/T_{3.11}$
0,18	322,4	271,2	185,4	1,19	1,74	1,46
0,50	275,4	167,3	119,9	1,46	2,3	1,4
0,81	241,3	98	89,1	2,46	2,71	1,1

Для проверки корректности полученных аналитических оценок разработана программа для многократного решения СЛАУ [679], используемая для нахождения m ёмкостных матриц согласно алгоритмов 3.8 и 3.10. Использована PC с параметрами: процессор – Intel Core i5-2410, тактовая частота – 2,30 ГГц; объем ОЗУ – 4 Гбайт; количество ядер – 2; количество виртуальных процессоров – 4; операционная система – Windows 7. Вычислительные оценки ускорения выполнены при $N = 1000$, $N_A/N = 0,9$, $N_{\text{COND}} = 1, 10$ и $m = 100, 200, \dots, 1000$. Результаты сведены

в таблицу 6.18. Для удобства сравнения в ней также приведены аналитические оценки ускорения из таблицы 3.5.

Таблица 6.18 – Аналитические и численные оценки ускорения решения СЛАУ с использованием блочного LU-разложения для вычисления m ёмкостных матриц

N_{COND}	Оценка	m									
		100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1	Аналитика	27,73	49,59	67,26	81,84	94,1	104,52	113,5	121,32	128,18	134,27
	РС 2	5,98	11,97	16,93	22,09	27,07	31,53	35,56	38,72	42,1	44,56
10	Аналитика	26,33	44,68	58,20	68,58	76,80	83,47	88,98	93,63	97,58	101,0
	РС 2	5,94	11,86	16,33	21,46	25,93	29,39	32,75	33,91	38,03	42,10

Результаты, представленные в таблице 6.18, подтверждают ряд оценок, сделанных выше. Хотя, результаты аналитических оценок гораздо выше (в 3–5 раза) вычислительных, характер роста ускорения одинаков: с увеличением m возрастает и ускорение. Характер зависимости ускорения от N_{COND} также совпадает – с увеличением N_{COND} ускорение уменьшается.

Далее проведено исследование разработанного алгоритма 3.11 на примере проводных отводов силовой шины электропитания (СШЭП) космического аппарата [742]. Общий вид СШЭП и поперечные сечения её проводных отводов в виде жгутов из 2 и 5 проводов, используемых для подключения нагрузки к СШЭП, приведены на рисунке 6.31. В качестве проводников взяты широко используемые провода марки БС 35-1298, для покрытия которых использована экранирующая лента (ЛМММс).

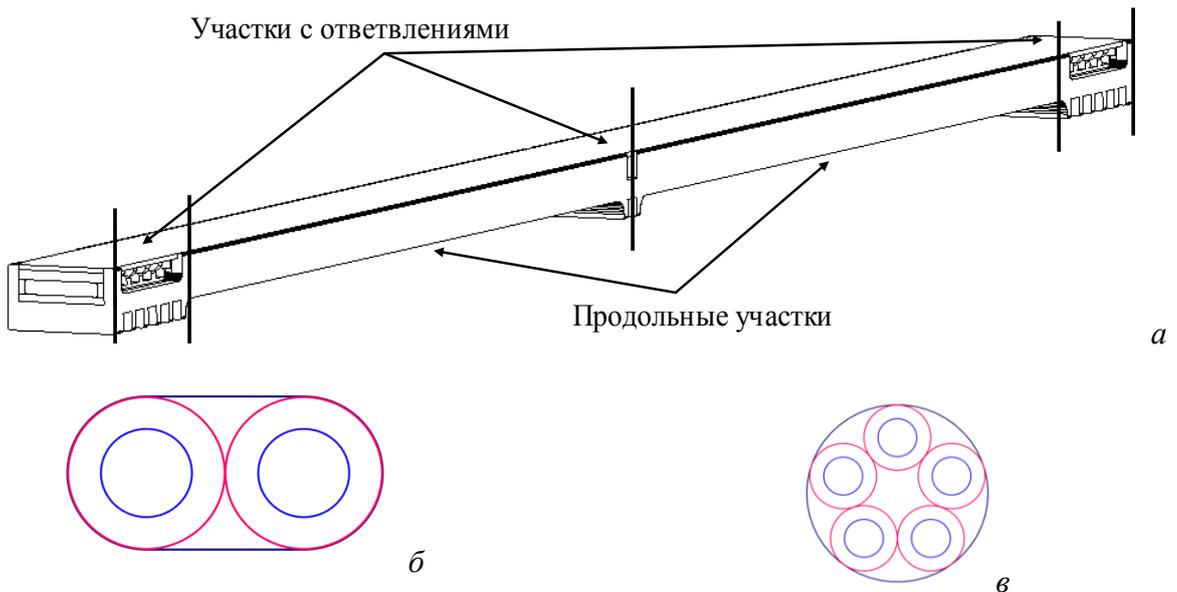


Рисунок 6.31 – Общий вид макета СШЭП (а) и поперечные сечения проводных отводов в виде жгутов из 2 (б) и 5 проводов (в) марки БС 35-1298

В таблице 6.19 приведены результаты ускорения при использовании данной модели по сравнению с исходной и полным перевычислением ёмкостной матрицы для проводных отводов. При вычислениях использована РС 2 из таблицы 6.15. Получены результаты для $m = 128$ и 512 частотных точек при учащении сегментации, характеризующемся отношением N_A/N . Видно, что ускорение может быть существенным и для 2-проводного отвода достигать почти 19 раз. Для 5-проводного отвода оно меньше (около 6 раз), поскольку значение N_A/N в 1,4 раза меньше, чем для 2-проводного.

Таблица 6.19 – Ускорение многократного вычисления ёмкостной матрицы проводных отводов при учащении сегментации и увеличении числа частотных точек

Структура из рисунка 6.31б			Структура из рисунка 6.31в		
N_A/N	$m = 128$	$m = 512$	N_A/N	$m = 128$	$m = 512$
768/1025	5,67	5,68	769/1409	6,08	6,14
1536/2049	12,18	15,35	1536/2817	6,22	6,77
3072/4097	14,48	18,81	3075/5633	6,31	6,96

Далее проведены исследования зависимости времени и ускорения вычисления ёмкостной матрицы от порядка N матрицы СЛАУ, оценка которых актуальна для практических задач (анализ сложных структур).

Для исследования использована система TALGAT, реализующая вычисление комплексной матрицы МПП, учитывающее частотную зависимость материала FR-4 диэлектрической подложки [680]. Рассмотрена связанная МПЛ. Вид её поперечного сечения приведен на рисунке 6.32.



Рисунок 6.32 – Вид поперечного сечения связанной МПЛ

Сначала оценены затраты времени на однократное вычисление ёмкостной матрицы \underline{C} при порядках $N = 1125, 2250, 4500$ и разном количестве подынтервалов границ проводник-диэлектрик N_A и диэлектрик-диэлектрик N_D при одинаковом их соотношении $N_A/N = 0,53$ ($N = N_A + N_D$) [743, 744]. Как было показано ранее, данное значение близко к оптимальному (по критерию минимальных затрат времени) для однократного решения СЛАУ. При этом использование алгоритма 3.10 (или алгоритма 3.11 при наличии плоскости земли) для разового вычисления матрицы \underline{C} неэффективно, поскольку в ходе первого вычисления происходит

преобразование матрицы СЛАУ к виду, пригодному для последующих многократных вычислений.

При вычислениях использовалась РС с параметрами: Intel Core i7-860, тактовая частота – 2,8 ГГц, количество ядер – 4; объем ОЗУ – 12 Гбайт; операционная система – Windows 7×64. В таблице 6.20 приведены время однократного и многократных ($m = 2^n$, где $n = 7, 8, 9, 10$) вычислений ёмкостной матрицы исходным 3.8 ($T_{3.8}$) и усовершенствованным 3.10 ($T_{3.10}$) алгоритмами, а также их соотношение.

Таблица 6.20 – Время однократного и многократных вычислений ёмкостной матрицы алгоритмами 3.8 и 3.10 при $N_A/N = 0,53$

m	N	$T_{3.8}, \text{с}$	$T_{3.10}, \text{с}$	$T_{3.8}/T_{3.10}$
1	1125	0,32	0,36	0,89
	2250	1,4	1,88	0,74
	4500	6,9	10,8	0,64
2^7	1125	40,2	13,9	2,9
	2250	182,2	57,4	3,2
	4500	887,0	248,2	3,6
2^8	1125	81,1	27,4	2,95
	2250	366,1	113,8	3,2
	4500	1777,2	489,1	3,6
2^9	1125	162,6	54,9	2,96
	2250	732,3	225,8	3,25
	4500	3552,2	970,6	3,65
2^{10}	1125	325,3	109,2	2,98
	2250	1465,1	451,8	3,25
	4500	7101,5	1935,6	3,7

Из таблицы 6.20 следует, что, как и отмечалось ранее, алгоритм 3.10 неэффективен для разового вычисления матрицы С. Так, при увеличении порядка N соотношение времен уменьшается до 0,64 раза для случая $N = 4500$. Также видно, что время вычисления согласно алгоритму 3.10 меньше чем алгоритма 3.8. Ускорение возрастает от 2,9 до 3,7 раза, при росте N от 1125 до 4500 и практически не зависит от количества вычислений m . Это объясняется особенностью работы алгоритма 3.10. Важно отметить, что на первое вычисление, при использовании алгоритма 3.10, например, для $N = 4500$, затрачивается порядка 11 с, что для $m = 128$ составляет лишь 4% от общих временных затрат. Таким образом, при больших значениях m время первого вычисления почти не влияет на общее время вычисления, что подтверждает полученное выражение (3.8).

Далее исследовано применение предложенного блочного алгоритма 3.10 для вычисления временного отклика сигнала, передаваемого по линии передачи, при контролируемой точности вычислений. Сначала выполнен анализ точности результатов, а затем – скорости получения отклика. При моделировании задач ЭМС печатной платы необходимо знать значение ϵ_r её диэлектрической подложки. При этом, комплексная относительная диэлектрическая проницаемость является функцией, зависящей от частоты, т.е. $\epsilon_r(f)$, что необходимо учитывать при вычислении временного отклика МПЛП, т.к. это ведет к получению более «физичных» результатов [745]. При этом, как упоминалось ранее, такое моделирование характеризуется довольно большими временными затратами, значительная часть которых связана с многократным (может достигать десятков тысяч) вычислением ёмкостной матрицы, поскольку она должна вычисляться на каждой частоте спектра воздействующего сигнала.

Оценка применимости алгоритма 3.10 выполнена путем увеличения длины подынтервалов l на границах диэлектрик-диэлектрик структуры (рисунок 6.32). Данное увеличение ведет к уменьшению размера блока **D** и, тем самым, общего времени вычислений. Выполнено моделирование по получению отклика линии передачи длиной 1 м, при воздействии на неё трапециевидным импульсом с длительностью фронтов 100 пс и вершины 10 пс. Количество СЛАУ (временных отсчетов сигнала) составляло 2^{16} (отношение длительности анализируемого временного интервала к длительности одного отсчета). В качестве материала диэлектрической подложки взят широко распространённый FR-4, для которого зависимость $\epsilon_r(f)$ хорошо известна [746] и реализована в системе TALGAT в виде аппроксимирующей функции.

Сначала выполнено моделирование при учете $\epsilon_r(f)$ FR-4 с помощью обоих алгоритмов: исходного 3.8 и усовершенствованного 3.10 [680]. Корректность вычислений (отклик в конце активной линии) показана на рисунке 6.33.

Далее оценено влияние на получаемый отклик изменения длины подынтервалов l границ диэлектрик-диэлектрик [747]. С каждым вычислением отклика значение l удваивалось (от 5 мкм до 640 мкм). При значении $l = 640$ мкм диэлектрические границы больше не делятся на подынтервалы. Полученные результаты приведены на рисунке 6.34, из которого следует, что рост l всё больше влияет на отклик. Так, график сдвигается влево, а амплитуды импульсов увеличиваются.

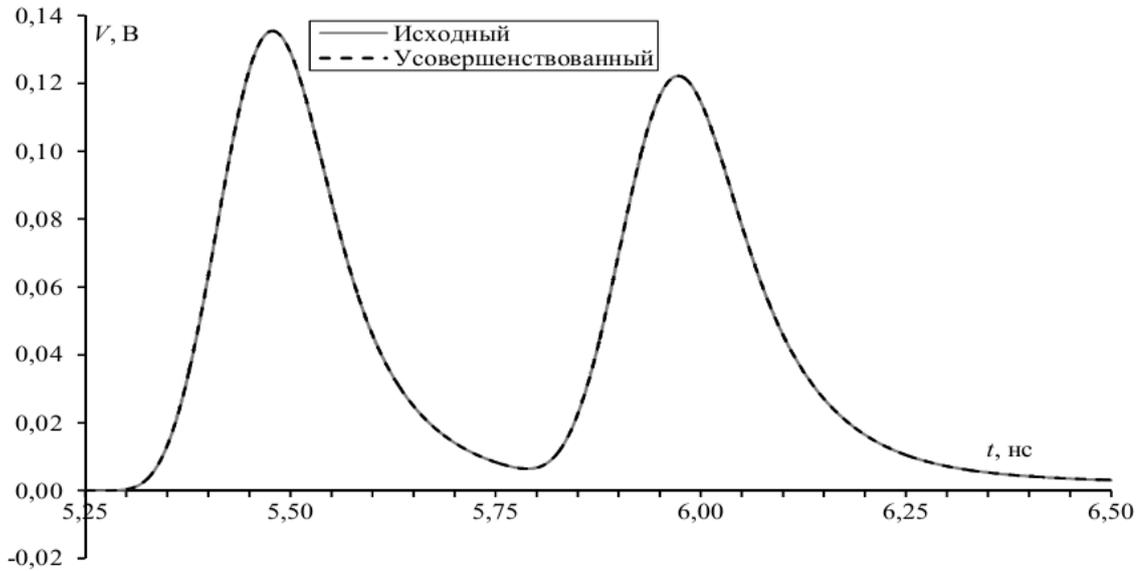


Рисунок 6.33 – Отклик в конце активного проводника связанной МПЛ при использовании алгоритмов 3.8 (исходный) и 3.10 (усовершенствованный)

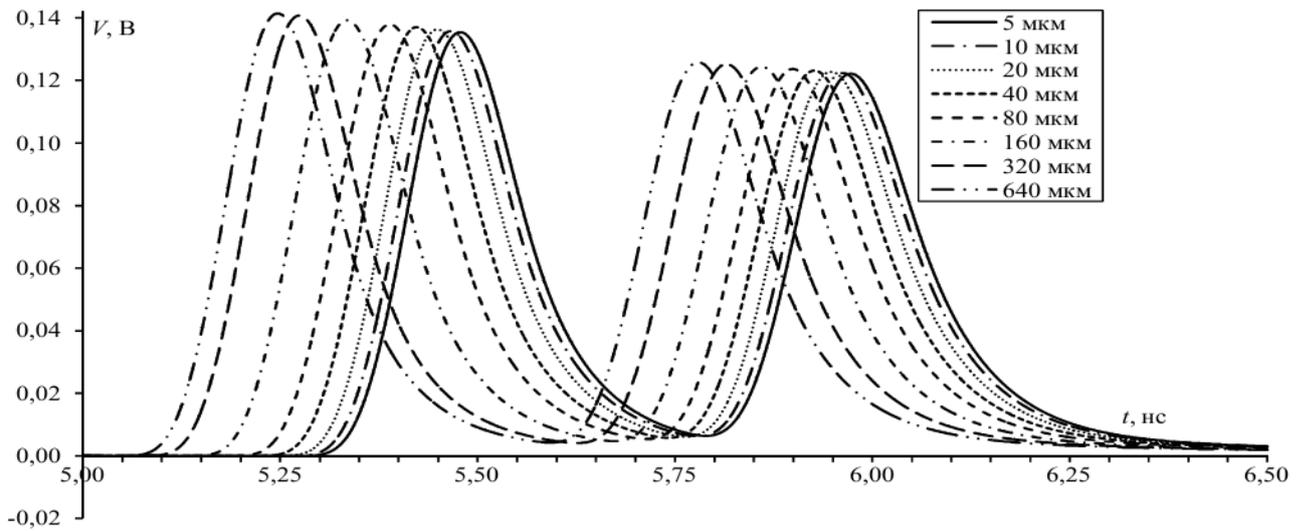


Рисунок 6.34 – Отклик в конце активного проводника линии передачи (рисунок 6.32) при изменении длины подынтервалов l

В таблице 6.21 приведено время, в которое импульсы достигают своих максимальных значений, их амплитуды, а также ошибки по времени и амплитуде в зависимости от l (отличие результатов, полученных алгоритмами 3.8 и 3.10). Из таблицы 6.21 также следует, что увеличение l от 5 до 640 мкм приводит к уменьшению времени задержки на 4,22% и 3,21% для первого и второго импульсов. При этом наблюдается увеличение на 8,11 % разности задержек. Амплитуда первого импульса увеличилась на 4,35%, а второго – на 2,94%. Таким образом, даже при очень грубой сегментации на диэлектрических границах может сохраняться приемлемая точность вычисления отклика. На практике часто используются структуры с большим

количеством слоев диэлектрика, сегментация которых сначала может быть очень грубой, а затем учащаться с контролем точности вычислений. Это приведет к СЛАУ минимального размера N и, соответственно, к минимизации времени её решения. При этом N уменьшается из-за уменьшения количества подынтервалов на границах диэлектрик-диэлектрик, что приводит к $N_A/N \rightarrow 1$. Поэтому далее оценено ускорение, полученное за счет использования алгоритма 3.10.

Таблица 6.21 – Время и амплитуда импульсов и их относительные ошибки в зависимости от l

l , мкм	t_1 , нс	$ \Delta t_1 /t_1$, %	V_1 , В	$\Delta V_1/V_1$, %	t_2 , нс	$ \Delta t_2 /t_2$, %	V_2 , В	$\Delta V_2/V_2$, %	t_2-t_1 , нс	$\Delta(t_2-t_1)/(t_2-t_1)$, %
5	5,4730	0	0,1355	0	5,9660	0	0,1222	0	0,493	0
10	5,4615	-0,20	0,1358	0,22	5,9575	-0,14	0,1224	0,16	0,496	0,60
20	5,4430	-0,55	0,1363	0,59	5,9428	-0,39	0,1228	0,49	0,500	1,41
40	5,4178	-1,00	0,1371	1,18	5,9215	-0,75	0,1232	0,82	0,504	2,23
80	5,3823	-1,66	0,1378	1,69	5,8940	-1,20	0,1237	1,22	0,512	3,85
160	5,3295	-2,62	0,1393	2,80	5,8545	-1,87	0,1244	1,80	0,525	6,50
320	5,2690	-3,73	0,1408	3,91	5,8100	-2,61	0,1252	2,45	0,541	9,73
640	5,2418	-4,22	0,1414	4,35	5,7743	-3,21	0,1258	2,94	0,533	8,11

В таблицу 6.22 сведены результаты вычисления отклика при задействованном одном и всех ядрах компьютера. Видно, что с закруглением сегментации время вычислений значительно уменьшается. Так, для исходного алгоритма 3.8 сокращение составило примерно 6 раз, а для алгоритма 3.10 – 4 раза. При этом ускорение уменьшилось с 2 до 1,5 раза. Также видно, что алгоритм 3.10 при $l > 40$ мкм не ускоряется за счёт использования нескольких ядер, а дальше увеличивать l не имеет смысла, поскольку ускорение возрастает незначительно, а ошибка – наоборот существенно. Так, например, при $l = 40$ мкм ускорение составляет 1,6–1,9 раза, а ошибка – порядка 2%. Таким образом, сохраняя приемлемую точность вычислений, можно получить их ускорение.

Таблица 6.22 – Время и ускорение вычисления отклика в зависимости от длины подынтервалов l при использовании разного количества ядер компьютера

l , мкм	N_A	N	N_A/N	Одно ядро			Все ядра		
				$T_{3,8}$, с	$T_{3,10}$, с	$T_{3,8}/T_{3,10}$	$T_{3,8}$, с	$T_{3,10}$, с	$T_{3,8}/T_{3,10}$
5	288	708	0,40	9825	4587	2,14	6565	3913	1,68
10	288	498	0,58	4341	2012	2,16	3215	1897	1,69
20	288	393	0,75	2668	1312	2,03	2174	1297	1,67
40	288	339	0,85	2057	1088	1,89	1757	1093	1,61
80	288	314	0,92	1820	1024	1,77	1601	1021	1,56
160	288	302	0,95	1722	995	1,73	1513	991	1,52
320	288	295	0,98	1654	976	1,69	1466	976	1,50
640	288	291	0,99	1610	969	1,66	1436	966	1,48

Отметим несколько факторов, повлиявших на незначительность полученного ускорения. Приведенные значения ускорения получены путем сложения временных затрат на многократное вычисление ёмкостной матрицы и вычисление отклика. При этом операции ускорения последнего не применялись. Вторым фактором является малость порядков матриц решаемых СЛАУ. Тот факт, что исследование выполнено на примере вычисления временного отклика лишь одного отрезка, простой линии передачи (содержащей только один диэлектрический слой) не означает, что алгоритм 3.10 не может применяться к более сложным структурам. Еще раз подчеркнем, что ускорение достигается именно на этапе вычисления ёмкостной матрицы, поэтому, чем сложнее структура, тем более выгодным ставится использование данного алгоритма. Помимо этого, ускорение (даже без закругления сегментации) сильно зависит от конкретной структуры поперечного сечения линии передачи, и, в частности, от специфики её диэлектрических границ (числа диэлектриков, протяженности границ и начальной сегментации). Наконец, важно понимать, что специфика диэлектрического заполнения при закруглении сегментации может давать различные ошибки вычисления отклика, что требует их контроля.

Таким образом, полученное выражение для аналитической оценки, а также полученные результаты, говорят об эффективности многократных вычислений ёмкостной матрицы с помощью блочного LU-разложения при изменении ϵ_r . Однако сравнение аналитических и вычислительных оценок показало, что результаты, полученные с их помощью, хоть и схожи по характеру зависимости от количества точек изменения матрицы СЛАУ m , но отличаются по характеру зависимости от количества правых частей N_{COND} и по значениям. Поэтому далее выполнены более детальные оценки для программной реализации матричных операций, используемых при блочном LU-разложении.

6.2.1.1 Оценка влияния программной реализации на эффективность работы алгоритмов

Для оценки влияния программной реализации на эффективность разработанных алгоритмов 3.8 и 3.10 использованы математические пакеты Matlab, Octave и Scilab, широко используемые при научных исследованиях и инженерных расчетах [748, 749], а также библиотека Eigen. При вычислениях использовалась PC с параметрами: ОС – Microsoft Windows 7×64, процессор – Intel Core i7-970, тактовая частота – 3,20 ГГц, объем ОЗУ – 24 Гбайт, а также пакеты Matlab 2013b (Intel MKL), Octave 4.4.0 (Open BLAS) Scilab 5.5.2 (Intel MKL), а также библиотека Eigen 3.3.4 и MSVS 2013 (ключи компиляции: /O2, /Ot, /Gt, /GL, /MD, /Qpar,

/arch:SSE2, /openmp). Далее совместному использованию Eigen и MSVS соответствует обозначение пакет Eigen.

Вначале выполнено тестирование вариантов решения СЛАУ, основанных на LU-разложении, на примере системы вида $S\Sigma = V$, где S – квадратная, действительная и плотная матрица (типовая матрица при анализе полосковых структур), V – матрица размера $N \times 10$, при $N = 100, 200, \dots, 5000$. Матрицы были заполнены с помощью генератора случайных чисел (в Matlab функция rand()).

Исследованные варианты реализации приведены в таблице 6.23 и таблице 6.24 [750]. Согласно справочной документации варианты I и II во всех пакетах эквивалентны, но для чистоты эксперимента протестированы отдельно. Вариант III (согласно той же документации) при хорошей обусловленности матрицы (число обусловленности меньше $1/(10 \times \text{eps})$, где eps – машинный эpsilon) основан на LU-разложении и последующем решении двух треугольных систем (при плохой обусловленности используется метод наименьших квадратов). В тестировании использовались только «хорошо обусловленные» матрицы ($\text{cond}(S) < 10^8$). Вариант IV отличается хранением матрицы перестановок в виде вектора (в Scilab – отсутствует).

Таблица 6.23 – Варианты реализации решения СЛАУ в Matlab/Octave/Scilab с помощью LU-разложения

Вариант	Список команд
I	$[L,u]=lu(S); \Sigma=u \setminus (L \setminus V);$
II	$[L,u,p]=lu(S); \Sigma=u \setminus (L(p*V));$
III	$\Sigma=S \setminus V;$
IV	$[L,u,p]=lu(S,'vector'); \Sigma=u \setminus (L(V(p,:)));$

На рисунке 6.35 приведены полученные результаты (здесь и далее в этом пункте среднее время 10-кратных вычислений). В Matlab наименьшее время работы соответствует использованию варианта IV, а Octave и Scilab – III. Расхождение при использовании различных вариантов в Matlab является наименьшим, а при Scilab – наибольшим. При использовании Eigen, время практически не зависит от реализации, а наибольшее различие во времени между разными вариантами менее 3%. Наименьшее среднее время решения соответствует варианту IV. Поэтому для дальнейшего исследования алгоритма 3.8 в Matlab и Eigen использовался вариант IV, а Octave и Scilab – III.

Таблица 6.24 – Варианты реализации решения СЛАНУ в Eigen с помощью LU-разложения

Вариант	Список команд
I	$\Sigma = S.lu().solve(V);$
II	$\Sigma.noalias() = S.lu().solve(V);$
III	$\Sigma = S.lu().solve(V).eval();$
IV	$ppLU.compute(S); \Sigma = ppLU.solve(V);$
V	$PartialPivLU<Matrix> lu(S);$ $T = lu.matrixLU().triangularView<UnitLower>().solve(lu.permutationP()*V);$ $\Sigma = lu.matrixLU().triangularView<Upper>().solve(T);$

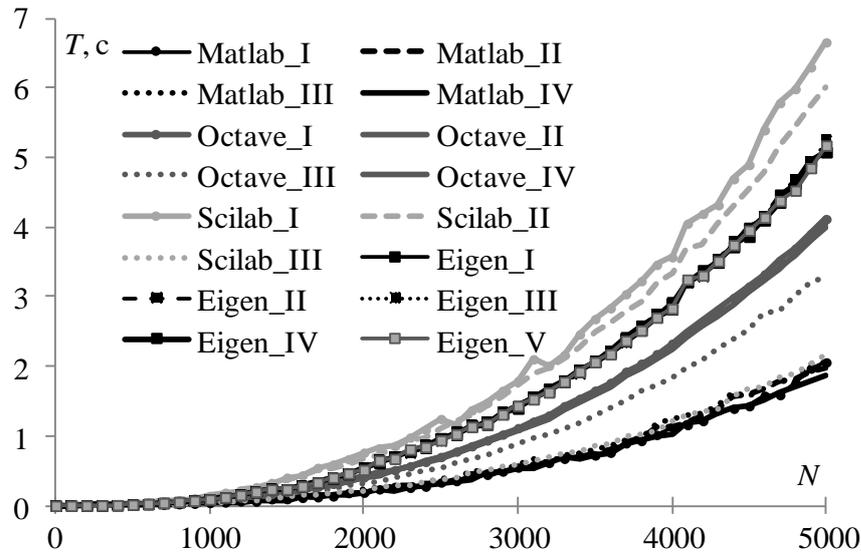


Рисунок 6.35 – Время решения СЛАНУ с помощью LU-разложения: Matlab, Scilab, Octave и Eigen

Перечень использованных функций (команд) для реализации алгоритма 3.10 на примере Matlab приведен в таблице 6.25 (принятые обозначения интуитивно понятны, поэтому приведены без дополнительных пояснений). В таблице 6.26 приведено время вычислений при $N = 1000, 3000, N_A = N/2, N_{COND} = 10$ и $m = 100, 500, 1000$ по алгоритму 3.8, а в таблице 6.27 – алгоритму 3.10 при тех же параметрах. Для заполнения матриц использована функция `rand()`.

Таблица 6.25 – Реализация функций алгоритма 3.10 с использованием синтаксиса Matlab

№ шага	Реализация
4	$S(1:N_A, 1:N_A) = inv(S(1:N_A, 1:N_A))$
5	$S(1:N_A, N_A+1:N) = S(1:N_A, 1:N_A) * S(1:N_A, N_A+1:N)$
6	$S(N_A+1:N, N_A+1:N) = S(N_A+1:N, N_A+1:N) - S(N_A+1:N, 1:N_A) * S(1:N_A, N_A+1:N)$
8	$X(1:N_A, 1:N_{COND}) = S(1:N_A, 1:N_A) * V(1:N_A, 1:N_{COND})$
9	$X(N_A+1:N, 1:N_{COND}) = V(N_A+1:N, 1:N_{COND}) - S(N_A+1:N, 1:N_A) * X(1:N_A, 1:N_{COND})$
12	$nz = N_A * (N + 1); step_ = N + 1; end_ = N * N; S(nz:step_ :end_) = S(nz:step_ :end_) + Diag_mat';$
13	$SIGMA(N_A+1:N, 1:N_{COND}) = inv(S(N_A+1:N, N_A+1:N)) * X(N_A+1:N, 1:N_{COND})$
14	$SIGMA(1:N_A, 1:N_{COND}) = X(1:N_A, 1:N_{COND}) - S(1:N_A, N_A+1:N) * SIGMA(N_A+1:N, 1:N_{COND})$
16	$S(nz:step_ :end_) = S(nz:step_ :end_) - Diag_mat';$

Таблица 6.26 – Время работы (с) алгоритма 3.8

N	Пакет	m		
		100	500	1000
1000	Matlab	3,57	16,49	31,09
	Octave	5,91	28,84	58,42
	Scilab	4,03	19,57	39,81
	Eigen	8,91	44,47	89,16
3000	Matlab	49,63	225,90	456,54
	Octave	86,25	429,23	859,76
	Scilab	55,40	278,86	568,44
	Eigen	138,95	696,55	1403,08

Таблица 6.27 – Время работы (с) алгоритма 3.10 при $N_A = 0,5N$

N	Пакет	m		
		100	500	1000
1000	Matlab	1,60	6,84	13,35
	Octave	2,72	13,21	25,97
	Scilab	1,60	6,88	13,61
	Eigen	9,41	45,93	91,67
3000	Matlab	25,00	106,19	211,08
	Octave	39,78	192,48	381,78
	Scilab	25,73	110,50	216,40
	Eigen	188,10	927,34	1854,33

Из таблиц 6.26 и 6.27 видно, что наименьшее время, для реализации обоих алгоритмов, соответствует использованию Matlab. Максимальное различие во времени вычислений при использовании Scilab относительно Matlab для алгоритма 3.8 составило 1,28 раза, для алгоритма 2 – 1,03. Использование Octave даёт различие относительно Matlab в 1,90 и 1,95 раза, а Eigen – 3,08 и 8,79 соответственно.

Далее исследована зависимость времени выполнения шагов алгоритма 3.10 от порядка матрицы \mathbf{S} в каждом пакете. Используются следующие параметры: $N = 100, 200, \dots, 5000$, $N_A = 0,5N$, $N_{\text{COND}} = 10$, $m = 500$. На рисунке 6.36 приведено время вычислений, соответствующее шагам 4–6, 8 и 9 (однократные вычисления при $k = 1$) и шагам 12–14 (многократные вычисления). Для наглядности на рисунках также приведена графическая интерпретация соответствующих операций. Затраты на шаге 16 идентичны затратам на шаге 12, поэтому отдельно не приведены. Затраты на вычисления элементов, согласно шагов 7, 15 и 17, не учитывались в виду их малости (оценивались только затраты, приходящиеся на решение СЛАУ). Как видно, преобладающие временные затраты приходятся на шаг 13.

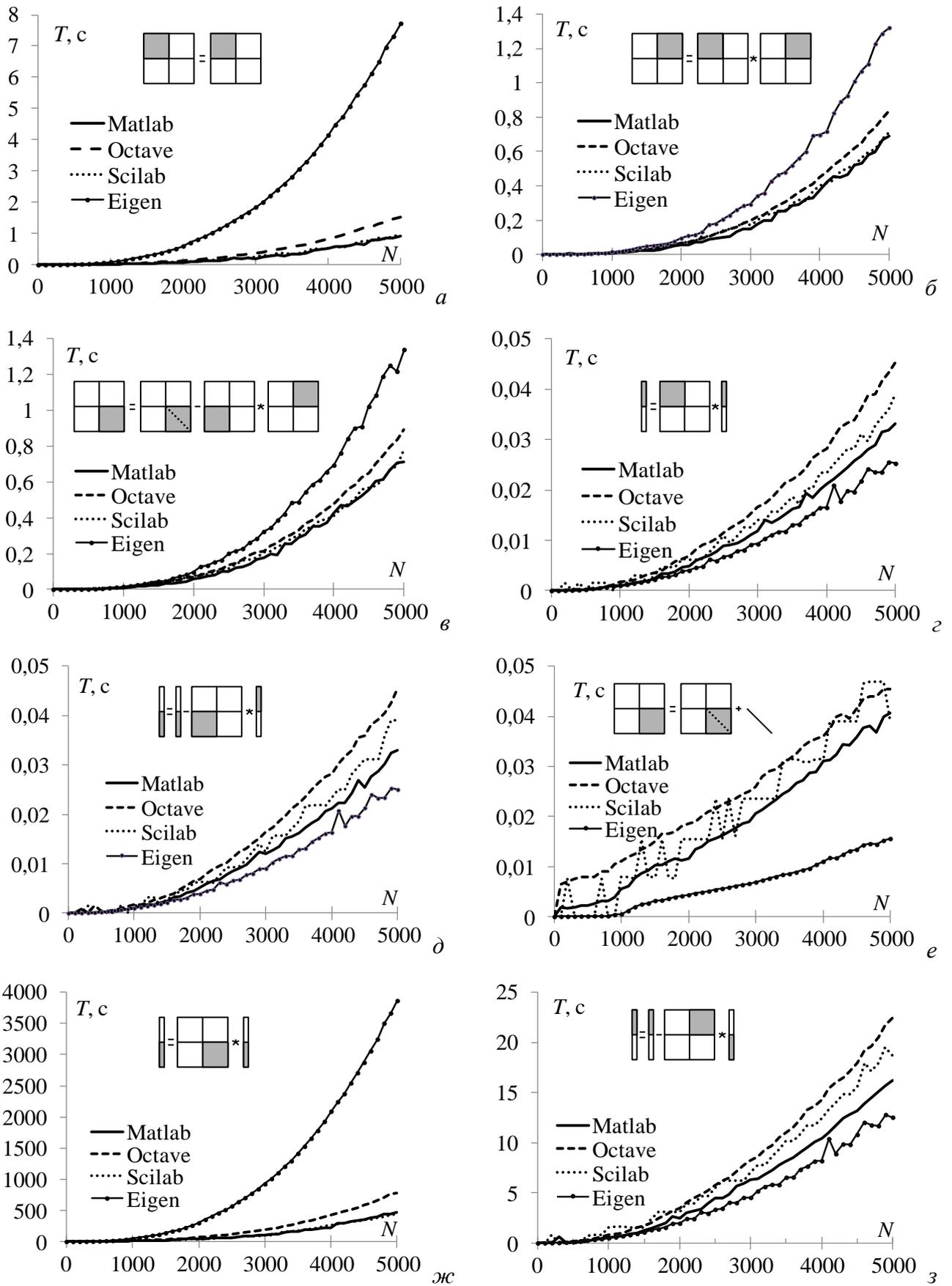


Рисунок 6.36 – Время выполнения шагов алгоритма 3.10:

4 (а), 5 (б), 6 (в), 8 (г), 9 (д), 12 (е), 13 (ж) и 14 (з)

В таблицу 6.28 сведены полученные вычислительные и аналитические оценки ускорения. Видно, что в целом оценки согласуются между собой. Стоит отметить, что практически всегда использование пакета Scilab дает наибольшее ускорение, вне зависимости от N , а использование Eigen дает замедление процесса вычислений. Последний факт объясняется неоптимальной реализацией функции обращения матриц (рисунок 6.36а и рисунок 6.36ж). При этом в случае $m \gg 1$ шаг 4 мало влияет на получаемое ускорение. Поэтому для большего ускорения требуется совершенствовать шаг 13 алгоритма 3.10.

Таблица 6.28 – Оценки ускорения решения при использовании алгоритма 3.10 относительно алгоритма 3.8

N	Оценка	Пакет	m		
			100	500	1000
1000	Аналитическая		1,95	1,99	2,00
	Вычислительная	Matlab	2,23	2,41	2,33
		Octave	2,17	2,18	2,25
		Scilab	2,52	2,84	2,93
		Eigen	0,95	0,97	0,97
3000	Аналитическая		1,95	1,99	2,00
	Вычислительная	Matlab	1,99	2,13	2,16
		Octave	2,17	2,23	2,25
		Scilab	2,15	2,52	2,63
		Eigen	0,74	0,75	0,76

В таблице 6.29 приведены временные затраты на реализацию алгоритма 3.10-У1 (при тех же параметрах, что и в таблице 6.27), а в таблице 6.30 аналитические и вычислительные оценки ускорения, относительно алгоритма 3.8. Из таблиц 6.29 и 6.30 видно, что оценки в целом согласуются, а наименьшее время, для реализации алгоритма 3.10-У1, как и в случае с алгоритмом 3.10, соответствует случаю использования Matlab. Максимальное различие во времени вычислений при использовании Scilab относительно Matlab составило 1,25 раза, Octave и Eigen – 1,91 и 2,44 раза соответственно. При этом Eigen, вне зависимости от N , дает наибольшее ускорение (что еще раз подтверждает факт неоптимальной реализации функции обращения матриц). Однако при этом, общие временные затраты больше в сравнении с использованием других пакетов.

Таким образом, предложенное усовершенствование алгоритма 3.10 позволило дополнительно уменьшить (примерно в 2 раза) затраты времени на вычисление.

Таблица 6.29 – Время работы (с) алгоритма 3.10-У1 при $N_A = 0,5N$

N	Пакет	m		
		100	500	1000
1000	Matlab	0,81	3,90	7,41
	Octave	1,54	7,17	14,18
	Scilab	1,00	4,79	8,77
	Eigen	1,76	8,17	15,80
3000	Matlab	11,50	51,95	99,59
	Octave	18,08	83,91	164,99
	Scilab	14,05	63,95	124,80
	Eigen	26,69	125,75	242,70

Таблица 6.30 – Оценки ускорения решения по алгоритму 3.10-У1 при $N_{COND}=10$

N	Оценка	Пакет	m		
			100	500	1000
1000	Аналитическая		6,75	7,23	7,36
	Вычислительная	Matlab	4,41	4,23	4,20
		Octave	3,84	4,02	4,12
		Scilab	4,03	4,09	4,54
		Eigen	5,06	5,44	5,64
3000	Аналитическая		7,09	7,62	7,76
	Вычислительная	Matlab	4,32	4,35	4,58
		Octave	4,77	5,12	5,21
		Scilab	3,94	4,36	4,55
		Eigen	5,21	5,54	5,78

6.2.1.2 Трехмерные линии передачи

Далее выполнены оценки применимости разработанного алгоритма 3.10-У1 при анализе трехмерных структур. Для этого использована МПЛ с количеством проводников 3 (рисунок 6.37а), 5, 10 (рисунок 6.37б) и $m = 10, 20, \dots, 100$, а также РС с параметрами: процессор – Intel Core i7-4770, тактовая частота – 3,4 ГГц,; объем ОЗУ – 8 Гбайт; операционная система – Windows 7×64. Параметры структуры: $w = 500$ мкм; $t = 5$ мкм; $s = 5$ мкм; $h = 100$ мкм. Значение ε_r изменялось в диапазоне от 2 до 10.

Для наглядности в таблице 6.31 приведены результаты вычислений при $N_{COND} = 10$ ($N = 2260$), а ускорение при использовании алгоритма 3.10-У1 и $N_{COND} = 3$ ($N = 1000$), 5 ($N = 1360$), 10 относительно алгоритма 3.8 – на рисунке 6.38.

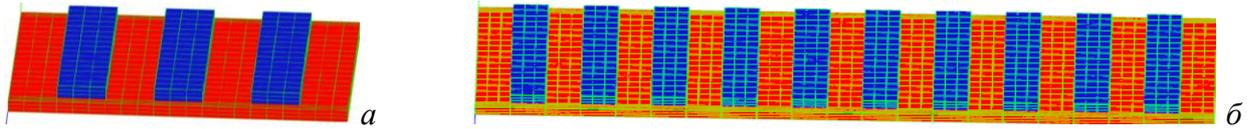


Рисунок 6.37 – Общий трехмерный вид МПЛ при $N_{COND} = 3$ (а) и 10 (б)

Таблица 6.31 – Время (с) m -кратного вычисления ёмкостной матрицы трехмерной МПЛ по алгоритмам 3.8, 3.10-У1 и их отношение при $N_{COND}=10$

m	$T_{3.8}, c$	$T_{3.10-У1}, c$	$T_{3.8} / T_{3.10-У1}$
10	103,31	10,31	10,02
20	199,11	17,62	11,32
30	294,85	24,98	11,80
40	390,50	32,22	12,12
50	486,29	39,49	12,31
60	582,08	47,34	12,29
70	677,82	55,29	12,26
80	773,80	62,61	12,36
90	869,12	70,06	12,41
100	964,73	77,54	12,44

Для оценки точности вычислений, в таблице 6.32 приведены значения элементов ёмкостных матриц, полученных при использовании обоих алгоритмов. Видно, что значения полностью совпадают, что подтверждает корректность реализации и универсальность разработанного алгоритма.

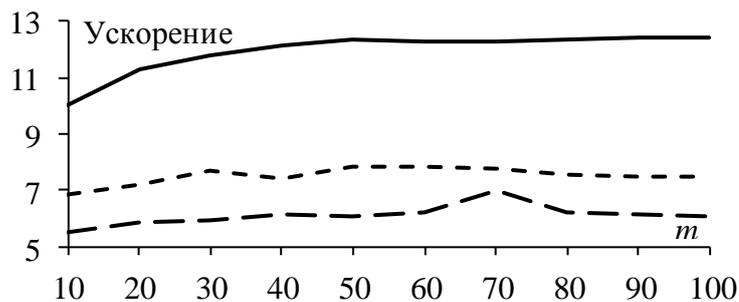


Рисунок 6.38 – Зависимость ускорения от m при использовании алгоритма 3.10-У1 относительно алгоритма 3.7 при $N_{COND} = 3$ (- · -), 5 (- -) и 10 (—)

Отдельно стоит отметить, что полученные значения элементов ёмкостных матриц являются исходными (сырыми) данными. Для дальнейшего использования полученная матрица дополнительно симметрируется, в результате чего получается «физическая» ёмкостная матрица.

Таблица 6.32 – Ёмкостные матрицы, полученные по алгоритмам 3.8 и 3.10-У1 при $N_{COND} = 3$

m	$\underline{C}_{3.8}, 10^{-16} \Phi/M^2$			$\underline{C}_{3.10-У1}, 10^{-16} \Phi/M^2$		
1	2253,69	-74,6346	-8,48081	2253,69	-74,6346	-8,48081
	-74,6715	2260,40	-74,6715	-74,6715	2260,40	-74,6715
	-8,48081	-74,6346	2253,69	-8,48081	-74,6346	2253,69
2	2881,96	-74,9255	-8,63213	2881,96	-74,9255	-8,63213
	-74,9753	2888,62	-74,9753	-74,9753	28,8862	-74,9753
	-8,63213	-74,9255	2881,96	-8,63213	-74,9255	2881,96
3	3505,39	-75,6812	-8,78641	3505,39	-75,6812	-8,78641
	-75,7398	3512,08	-75,7398	-75,7398	3512,08	-75,7398
	-8,78641	-75,6812	3505,39	-8,78641	-75,6812	3505,39
4	4126,32	-76,6283	-8,93708	4126,32	-76,6283	-8,93708
	-76,6939	4133,09	-76,6939	-76,6939	4133,09	-76,6939
	-8,93708	-76,6283	4126,32	-8,93708	-76,6283	4126,32
5	4745,79	-77,6686	-9,08383	4745,79	-77,6686	-9,08383
	-77,7403	4752,66	-77,7403	-77,7403	4752,66	-77,7403
	-9,08383	-77,6686	4745,79	-9,08383	-77,6686	4745,79
6	5364,34	-78,7597	-9,22732	5364,34	-78,7597	-9,22732
	-78,8368	5371,32	-78,8368	-78,8368	5371,32	-78,8368
	-9,22732	-78,7597	5364,34	-9,22732	-78,7597	5364,34
7	5982,27	-79,8809	-9,36826	5982,27	-79,8809	-9,36826
	-79,9629	5989,35	-79,9629	-79,9629	5989,35	-79,9629
	-9,36826	-79,8809	5982,27	-9,36826	-79,8809	5982,27
8	6599,75	-8,10211	-9,50718	6599,75	-8,10211	-9,50718
	-81,1077	6606,95	-81,1077	-81,1077	6606,95	-81,1077
	-9,50718	-81,0211	6599,75	-9,50718	-81,0211	6599,75
9	7216,91	-82,1737	-9,64452	7216,91	-82,1737	-9,64452
	-82,2649	7224,23	-82,2649	-82,2649	7224,23	-82,2649
	-9,64452	-82,1737	7216,91	-9,64452	-82,1737	7216,91
10	7833,83	-83,335	-9,78061	7833,83	-83,335	-9,78061
	-83,4304	7841,27	-83,4304	-83,4304	7841,27	-83,4304
	-9,78061	-83,335	7833,83	-9,78061	-83,335	7833,83

6.2.2 Изменение высоты диэлектрика

Выполнено исследование работы алгоритма 3.12 на предмет ускорения вычислений. Для этого использована РС без использования параллельных вычислений (работало одно ядро процессора): платформа AMD FX(tm)-8350 Eight-Core Processor; операционная система Windows 7×64; частота процессора 4,01 ГГц; объем ОЗУ 32 Гбайт. Для наглядного сравнения

параметры матрицы СЛАУ и значения m приняты такими же, как в таблице 3.7. Полученные результаты сведены в таблицу 6.33.

Результаты, представленные в таблице 6.33, подтверждают правильность оценок, полученных ранее. Так, значение ускорения увеличивается при увеличении роста N_A и m , однако вычислительные оценки в среднем в 1,5 раза ниже полученных аналитически. В то же время, характер зависимости ускорения от N_A и m схож при обеих оценках. При этом значение минимального ускорения составляет 1,17 раза, а максимального – 15,17 раза. Из таблицы 6.33 также видно, что ускорение увеличивается с ростом N , при исследованных параметрах на 16%, чего не наблюдалось по аналитическим оценкам. Данная зависимость от N объясняется тем, что при подсчете арифметических операций алгоритмов 3.8 и 3.12, не учитывались затраты на запись матриц в память, а также возможные промахи кэша, связанные со спецификой алгоритма 3.12 (одновременный доступ к разным областям памяти).

Таблица 6.33 – Вычислительные оценки ускорения многократного решения СЛАУ при использовании алгоритма 3.12

N	N_A	m									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1000	900	1,17	1,68	1,96	2,14	2,26	2,36	2,43	2,50	2,54	2,57
	990	1,37	2,58	3,65	4,70	5,60	6,50	7,28	8,03	8,75	9,35
	999	1,39	2,74	3,98	5,36	6,65	7,99	9,26	10,56	11,81	13,00
2000	1800	1,31	1,89	2,22	2,44	2,59	2,69	2,77	2,83	2,90	2,94
	1980	1,51	2,89	4,16	5,32	6,37	7,34	8,25	9,06	9,87	10,57
	1998	1,54	3,07	4,59	6,10	7,58	9,06	10,35	11,92	13,38	14,75
3000	2700	1,35	1,95	2,29	2,52	2,67	2,78	2,88	2,95	2,99	3,04
	2970	1,55	2,97	4,25	5,44	6,53	7,54	8,48	9,34	10,12	10,87
	2997	1,59	3,14	4,70	6,30	7,76	9,26	10,78	12,26	13,69	15,17

Далее для реализации априорного определения значения порога N_A/N , выше которого предпочтительнее использовать алгоритм 3.12, по сравнению с алгоритмом 3.8, выполнена оценка ускорения при изменении порядка блока с неизменяющимися элементами N_A . Полученные значения при $m = 10$ и 100 для $N = 1000$ сведены в таблицу 6.34, из которой следует, что ускорение возрастает при росте N_A/N . При этом при $N_A/N < 0,4$ ускорение не зависит от m . Однако дальнейшее увеличение N_A/N ведет к большему росту ускорения при $m = 100$, чем при $m = 10$. Так, значение N_A/N , при котором временные затраты при использовании алгоритмов 3.12 и 3.8 равны между собой, при $m = 10$ близко к 0,8, а для

$m = 100$ – к 0,7. При этом максимальное ускорение при $m = 10$ составляет 1,17 раза, а для $m = 100$ – 2,57 раза.

Таблица 6.34 – Оценка ускорения многократного решения СЛАУ в зависимости от N_A/N при $m = 10$ и 100 для $N = 1000$

N_A/N	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$m = 10$	0,17	0,23	0,31	0,41	0,55	0,68	0,83	0,98	1,17
$m = 100$	0,17	0,23	0,31	0,42	0,57	0,77	1,05	1,48	2,57

Таким образом, значение порога N_A/N , при котором проявляется эффективность алгоритма 3.12, зависит от количества решаемых СЛАУ m , и при малых значениях m оно выше, чем при больших. Также стоит отметить, что при малых значениях N_A и m предпочтительнее использование алгоритма 3.8, что согласуется с аналитическими оценками, полученными ранее.

6.2.3 Произвольное изменение геометрических параметров

Выполнена апробация алгоритма 3.13 для многовариантного анализа двух- и трехпроводных линий передачи, поперечные сечения которых приведены на рисунок 6.39. Геометрические параметры структуры 1: $s = 900$ мкм, $w = 1890$ мкм, толщина подложки $h = 290$ мкм, начальная толщина проводников $t = 35$ мкм, порядок матрицы \mathbf{S} $N = 1100$. Параметры структуры 2: $s = 10$ мкм, $w = 8$ мкм, $h_1 = 6$ мкм, $h_2 = 11$ мкм, начальная толщина проводников $t = 6$ мкм, $N = 1700$. Использована РС со следующими параметрами: процессор – Intel Core i7-930, тактовая частота – 2,80 ГГц; объем ОЗУ – 12 Гбайт; количество ядер – 8; операционная система – Windows 7×64.

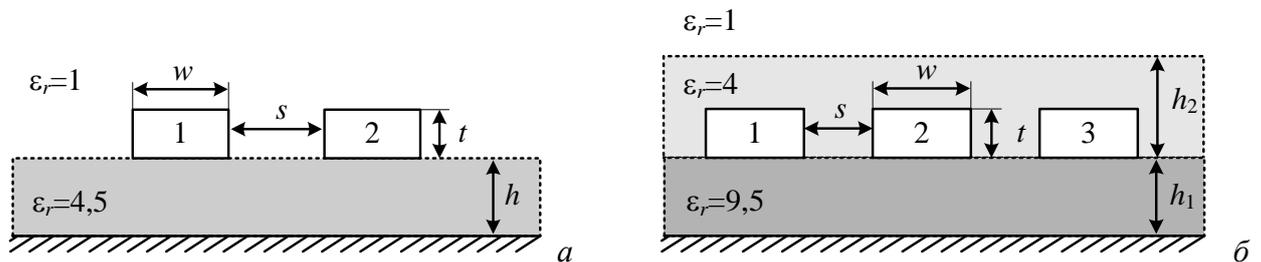


Рисунок 6.39 – Двух- (а) и трех- (б) проводные линии передачи (1, 2, 3 – проводники)

В таблице 6.35 приведены оценки ускорения многократного вычисления матрицы \mathbf{C} за счет использования алгоритма 3.13. Вычисления выполнялись при изменении толщины одного (вариант 1) и двух проводников (вариант 2). Количество изменений составляло 2^k , $k = 1, 2, \dots, 10$. Аналогичные результаты для структуры 2 сведены в таблицу 6.36.

Таблица 6.35 – Оценки ускорения многократного вычисления матрицы \underline{C} для структуры из рисунка 6.39а

Вариант	k	N_A/N	Аналитическая	Вычислительная
1	1	0,73	0,69	1,99
	2		0,95	1,95
	3		1,15	1,94
	4		1,30	1,93
	5		1,38	1,93
	6		1,43	1,93
	7		1,46	1,97
	8		1,47	2,01
	9		1,48	1,93
2	1	0,46	0,63	1,98
	2		0,67	2,04
	3		0,70	2,18
	4		0,71	2,18
	5		0,71	2,14
	6		0,72	2,12
	7		0,72	2,13
	8		0,72	2,25
	9		0,72	2,20

Таблица 6.36 – Оценки ускорения многократного вычисления матрицы \underline{C} для структуры из рисунка 6.39б

Вариант	k	N_A/N	Аналитическая	Вычислительная
1	1	0,82	0,64	2,64
	2		0,99	2,67
	3		1,36	2,71
	4		1,68	2,75
	5		1,90	2,83
	6		2,03	2,72
	7		2,11	2,78
	8		2,15	2,68
	9		2,17	2,69
2	1	0,65	0,72	2,58
	2		0,89	2,78
	3		1,01	2,88
	4		1,08	2,98
	5		1,12	2,97
	6		1,14	2,99
	7		1,15	2,87
	8		1,16	3,03
	9		1,16	3,03

Из полученных результатов видно, оценки в целом согласуются, однако их поведение различно. Так, численные оценки выше, чем аналитические для обеих структур и обоих вариантов. Также можно заметить, что чем больше количество изменений, тем больше оценка, однако наблюдается и её понижение в некоторых случаях. Так, ускорение наблюдается при $k > 2$ для всех случаев кроме структуры 1 и варианта 2. Таким образом, полученные оценки показывают, что использование перенумерации в большинстве случаев позволяет ускорить процесс многократного вычисления матрицы **С**. При этом с увеличением значения N_A/N ускорение увеличивается.

Далее выполнены вычисления при изменении толщины только одного из проводников (рисунок 6.39). Отношение N_A/N для структуры 1 составило 0,73 (таблица 6.37), а для структуры 2 – 0,82 (таблица 6.38). Для наглядности ускорения приведены с учетом и без учета затрат на формирование матрицы **S** и её блоков.

Таблица 6.37 – Оценки ускорения многократного вычисления матрицы **С** для структуры из рисунка 6.39а при $N_A/N = 0,73$

k	Аналитическая		Вычислительная
	Без учета Q_s, Q_3, Q_{13}	С учетом Q_s, Q_3, Q_{13}	
5	1,38	1,59	1,93
6	1,43	1,64	1,93
7	1,46	1,66	1,97
8	1,47	1,67	2,01

Таблица 6.38 – Оценки ускорения многократного вычисления матрицы **С** для структуры из рисунка 6.39б при $N_A/N=0,82$

k	Аналитическая		Вычислительная
	Без учета Q_s, Q_3, Q_{13}	С учетом Q_s, Q_3, Q_{13}	
5	1,90	2,07	2,83
6	2,03	2,20	2,72
7	2,11	2,27	2,78
8	2,15	2,30	2,68

Из таблиц 6.37 и 6.38 видно, что полученные оценки хорошо согласуются между собой. С учетом затрат на формирование матрицы **S** и её блоков, расхождение между оценками для двухпроводной линии составляет около 17%, а трехпроводной – до 32%. Таким образом, полученные оценки показывают, что для рассмотренных структур использование перенумерации позволяет ускорить многократное вычисление матрицы **С** до 2,68 раза. Также

можно сделать вывод, что чем больше отношение N_A/N , тем выше эффективность применения перенумерации с точки зрения минимизации затрат времени.

6.3 Ускорение за счёт использования гибридного метода решения СЛАУ

Для тестирования разработанного гибридного алгоритма (алгоритм 3.10-У2) использованы МФ в виде 5-проводной МПЛ [751] и плоский симметричный 10-проводный кабель с двумя диэлектрическими слоями, поперечные сечения которых приведены на рисунке 6.40, а также пакет Matlab. СЛАУ формировались в системе TALGAT, после чего они загружались в Matlab, где и выполнялись основные вычисления, согласно алгоритму 3.10-У2. Полученные результаты (матрицы \mathbf{X}^k) загружались в систему TALGAT, где выполнялось вычисление ёмкостной матрицы (\mathbf{C}^k).

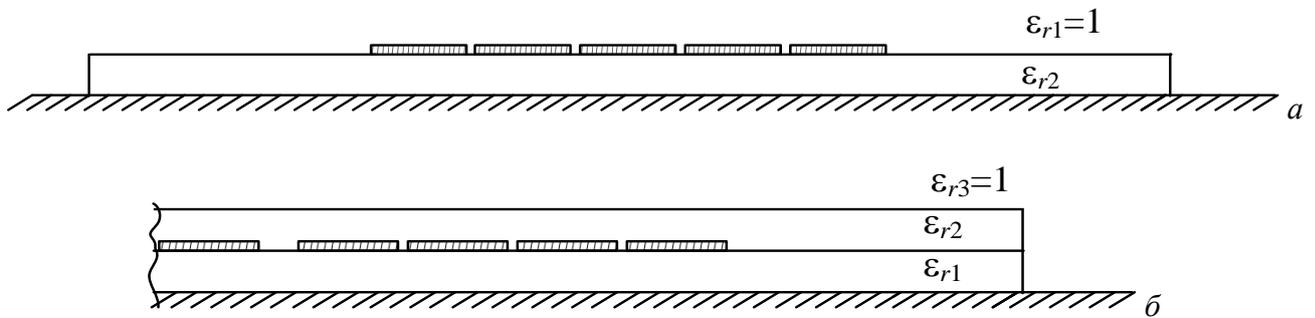


Рисунок 6.40 – Поперечные сечения МФ (5-проводной МПЛ) (а) и симметричного 10-контактного плоского кабеля (б)

При анализе рассматривалось линейное изменение относительной диэлектрической проницаемости (ϵ_{r2}) подложки для МПЛ и покрывающего слоя для кабеля, в диапазоне от 1,11 до 11,01 ($k = 1, \dots, m, m = 100$). Для кабеля относительная диэлектрическая проницаемость подложки (ϵ_{r1}) была принята равной 5,4. Исследовано несколько вариантов реализации алгоритма: выбор порядка (прямой (\rightarrow) или обратный (\leftarrow)) изменения ϵ_{r2} ; использование в качестве начального приближения решения, полученного на предыдущем ($k-1$)-м шаге; использование диагонального предобуславливания. Прямой порядок соответствовал приращению 1,11, 1,21, ..., 11,01. Использовано три порядка СЛАУ (полученных учащением сегментации границ структуры). Для первой структуры N_A/N : 1050/1370, 2100/2740 и 4200/5480, а для второй – 500/1000, 1552/3032 и 3004/5864. Итерационный процесс останавливался, если относительная норма невязки (tol) становилась меньше значения 10^{-4} .

Полученные результаты для первой структуры сведены в таблицу 6.39, а для второй – в таблицу 6.40 (I – нулевое начальное приближение, II – предыдущее решение, III – нулевое

начальное приближение и диагональное предобусловливание, и IV – предыдущее решение и диагональное предобусловливание). Курсивом помечено общее количество затраченных итераций. (Отметим, что первая СЛАУ полностью решалась прямым методом, а последующие СЛАУ – с блоком **D**, уже итерационно. Поэтому количество итераций иногда оказывалось меньше количества решаемых СЛАУ.) Для наглядности использован верхний индекс в виде «*», сигнализирующий о том, что хотя бы при решении одной СЛАУ требуемое количество итераций достигало максимального, которое было принято равным 100.

Из представленных результатов видно, что предложенный гибридный метод существенно сокращает время вычислений. Так, для 5-проводной МПЛ ускорение достигает 25 раз относительно алгоритма 3.8. При этом выбор предыдущего решения в качестве начального приближения следующего решения является наилучшим вариантом. В то же время, выбор порядка решения практически не влияет на затраты времени.

В случае симметричного кабеля, для всех исследованных версий алгоритма 3.10-У2, за исключением 3.10-У2-I, использование обратного порядка предпочтительнее по сравнению с прямым. Использование диагонального предобусловливания практически всегда снижает количество итераций, но это снижение не существенно и поэтому его использование не позволяет получить желаемое ускорение. Еще одним важным наблюдением является то, что, с точки зрения минимизации затрат времени, использование в качестве начального приближения решения предыдущей СЛАУ является более выигрышным по сравнению с фиксированным начальным приближением (в данной случае нулевым).

Таблица 6.39 – Время работы (с) и количество итераций алгоритмов при разных наборах параметров и $tol = 10^{-4}$ для структуры из рисунка 6.40а

N_A/N	Алгоритм						
	3.8	3.10	3.10-У1	3.10-У2-I		3.10-У2-II	
				→	←	→	←
1050/1370	9,01	1,18	0,86	0,70 <i>195</i>	0,69 <i>194</i>	0,51 99	0,51 99
2100/2740	44,81	5,24	3,78	2,76 <i>196</i>	2,70 <i>195</i>	2,34 99	2,34 99
4200/5480	250,05	24,02	16,48	12,40 <i>197</i>	12,40 <i>197</i>	9,94 99	9,94 99

Таблица 6.40 – Время работы (с) и количество итераций алгоритмов при разных наборах параметров и $tol = 10^{-4}$ для структуры из рисунка 6.40б

N_A/N	Алгоритм								
	3.10-У1	3.10-У2-I		3.10-У2-II		3.10-У2-III		3.10-У2-IV	
		→	←	→	←	→	←	→	←
500/1000	0,81	1,87 650	1,95 653	1,82 469	1,76 462	3,98 1879*	2,05 621	2,42 698	2,03 398
1552/3032	11,27	9,45 698	9,36 694	6,86 363	6,83 359	21,05 1718*	11,40 655	11,58 682	8,65 349
3004/5864	62,34	36,49 776	36,58 777	25,27 336	24,45 330	59,89 1327*	42,50 700	41,44 667	31,72 351

Для демонстрации точности предлагаемого подхода, на рисунке 6.41а и рисунке 6.41б приведены соответственно последние ($k = 100$) ёмкостные матрицы (пФ/м), полученные в системе TALGAT при использовании алгоритма 3.8 (\underline{C}_{100}^T) и алгоритма 3.10-У2-II в сочетании с обратным порядком при $tol = 10^{-4}$ (\underline{C}_{100}) для случая 3004/5864. Для облегчения визуального сравнения полученных результатов значения элементов матрицы \underline{C}_{100} , имеющие различия с соответствующими значениями элементов матрицы \underline{C}_{100}^T , помечены подчеркиванием. Видно, что различия малы, а самые существенные имеют отличие во втором знаке после запятой. При этом наибольшая поэлементная относительная погрешность составляет менее 1%.

Далее при анализе кабеля при 3004/5864 и алгоритма 3.10-У2-II была уменьшена требуемая точность вычислений до $tol = 10^{-1}$. При этом затраты времени составили 18,15 с, а требуемое количество итераций – 104. Полученная матрица \underline{C}'_{100} приведена на рисунке 6.41в. Видно, что различия в подавляющем большинстве, как и раньше, незначительны, а наибольшая поэлементная относительная погрешность составляет менее 4%.

Таким образом, при незначительной потере точности, удалось ускорить процесс многократного решения СЛАУ до 2,5 ($tol = 10^{-4}$) и 3,4 ($tol = 10^{-1}$) раза, для 3004/5864 при использовании алгоритма 3.10-У2-II и обратного порядка, относительно алгоритма 3.10-У1. При этом ускорение относительно алгоритма 3.10 (использование обращения блока **D**) и 3.8 (исходный с полным пересчетом LU-разложения) еще более существенно. В заключение отметим, что аналогичным образом модифицируются алгоритмы 3.12 и 3.13.

$$\underline{C}_{100}^T = \begin{bmatrix} 159,166 & -27,0511 & -1,00930 & -0,46658 & -0,22882 & -0,14323 & -0,09452 & -0,06018 & -0,04806 & -0,04847 \\ -27,0593 & 167,278 & -25,1093 & -0,98541 & -0,33222 & -0,18046 & -0,10778 & -0,06596 & -0,05076 & -0,04881 \\ -1,01324 & -25,1093 & 167,285 & -0,26995 & -0,71115 & -0,30135 & -0,15701 & -0,08980 & -0,06611 & -0,06123 \\ -0,46676 & -0,98228 & -26,9889 & 159,789 & -6,62611 & -0,78963 & -0,31274 & -0,15648 & -0,10757 & -0,09571 \\ -0,23142 & -0,33499 & -0,71977 & -6,62628 & 159,785 & -27,1995 & -0,77653 & -0,29849 & -0,17934 & -0,14432 \\ -0,14347 & -0,18015 & -0,30074 & -0,77652 & -27,1995 & 159,785 & -6,62630 & -0,71491 & -0,03340 & -0,23320 \\ -0,09525 & -0,10825 & -0,15782 & -0,31273 & -0,78963 & -6,62611 & 159,789 & -26,9735 & -0,98663 & -0,47196 \\ -0,06046 & -0,06599 & -0,08985 & -0,15580 & -0,29928 & -0,70697 & -26,9814 & 168,314 & -26,7845 & -1,01661 \\ -0,04828 & -0,05077 & -0,06612 & -0,10713 & -0,17964 & -0,33119 & -0,98898 & -26,7844 & 168,308 & -27,0448 \\ -0,04847 & -0,04861 & -0,06099 & -0,09497 & -0,14408 & -0,23056 & -0,47179 & -1,01341 & -27,0351 & 159,166 \end{bmatrix} \quad a$$

$$\underline{C}_{100} = \begin{bmatrix} 159,166 & -27,0511 & -1,00930 & -0,46658 & -0,22882 & -0,14323 & -0,09452 & -0,06018 & -0,04806 & -0,04847 \\ -27,0593 & 167,278 & -25,1093 & -0,98541 & -0,33222 & -0,18046 & -0,10778 & -0,06596 & -0,05076 & -0,04799 \\ -1,01323 & -25,1093 & 167,285 & -0,26995 & -0,71116 & -0,30135 & -0,15701 & -0,08980 & -0,06611 & -0,06121 \\ -0,46677 & -0,98226 & -26,9889 & 159,789 & -6,62612 & -0,78964 & -0,31274 & -0,15647 & -0,10756 & -0,09568 \\ -0,23142 & -0,33497 & -0,71976 & -6,62628 & 159,785 & -27,1995 & -0,77653 & -0,29848 & -0,17931 & -0,14429 \\ -0,14346 & -0,18013 & -0,30073 & -0,77653 & -27,1995 & 159,785 & -6,62630 & -0,71490 & -0,03340 & -0,23318 \\ -0,09524 & -0,10823 & -0,15782 & -0,31274 & -0,78964 & -6,62612 & 159,789 & -26,9735 & -0,98663 & -0,47196 \\ -0,06045 & -0,06598 & -0,08984 & -0,15580 & -0,29929 & -0,70697 & -26,9814 & 168,314 & -26,7844 & -1,01659 \\ -0,04828 & -0,05076 & -0,06612 & -0,10714 & -0,17965 & -0,33119 & -0,98898 & -26,7844 & 168,308 & -27,0448 \\ -0,04846 & -0,04861 & -0,06099 & -0,09497 & -0,14408 & -0,23056 & -0,47179 & -1,01341 & -27,0351 & 159,166 \end{bmatrix} \quad б$$

$$\underline{C}'_{100} = \begin{bmatrix} 158,823 & -27,0230 & -1,02412 & -0,47493 & -0,23345 & -0,14621 & -0,09669 & -0,06176 & -0,04939 & -0,04965 \\ -27,0150 & 166,938 & -25,0715 & -0,99162 & -0,33593 & -0,18242 & -0,10926 & -0,06691 & -0,05157 & -0,04955 \\ -1,01994 & -25,0715 & 166,945 & -0,26950 & -0,71671 & -0,30423 & -0,15903 & -0,09103 & -0,06713 & -0,06212 \\ -0,47410 & -0,99471 & -26,9957 & 159,447 & -6,63421 & -0,80335 & -0,31959 & -0,16052 & -0,11050 & -0,09795 \\ -0,23664 & -0,34382 & -0,73450 & -6,63452 & 159,443 & -27,1634 & -0,78621 & -0,30408 & -0,18323 & -0,14715 \\ -0,14628 & -0,18402 & -0,30626 & -0,78620 & -27,1634 & 159,443 & -6,63455 & -0,72979 & -0,03430 & -0,23846 \\ -0,09748 & -0,11116 & -0,16183 & -0,31958 & -0,80335 & -6,63422 & 159,447 & -26,9416 & -0,99916 & -0,47937 \\ -0,06132 & -0,06697 & -0,09101 & -0,15774 & -0,30203 & -0,71230 & -26,9356 & 167,975 & -26,7424 & -1,02274 \\ -0,04899 & -0,05154 & -0,06701 & -0,10855 & -0,18148 & -0,33469 & -0,99463 & -26,7423 & 167,968 & -27,0000 \\ -0,04964 & -0,04994 & -0,06256 & -0,09714 & -0,14707 & -0,23522 & -0,48022 & -1,02837 & -27,0075 & 158,823 \end{bmatrix} \quad в$$

Рисунок 6.41 – Ёмкостные матрицы (пФ/м), полученные для $N_A/N=3004/5864$ при использовании алгоритмов 3.8 (а) и 3.10-У2-II в сочетании с обратным порядком при $tol = 10^{-4}$ (б), 10^{-1} (в)

Далее на примере 5-проводной МПЛ выполнено исследование произвольного выбора значения ϵ_r из заданного диапазона. Так, сначала в диапазоне частот от 1 МГц до 1 ГГц по модели частотной зависимости ϵ_r получено 100 её значений. Этот массив данных затем произвольно перемешан и использован при многократном решении СЛАУ по алгоритму 3.10-У2. Для более корректного сравнения выполнено по 3 вычисления при $N_A/N = 1050/1370$ и 2100/2740. Результаты сведены в таблицу 6.41 (количество требуемых итераций приведено

курсивом). Видно, что при использовании версии алгоритма 3.10-У2-I (нулевое начальное приближение) количество итераций увеличилось на 2–4 единицы относительно прямого и обратного порядков решения при линейном изменении значения ε_r , что немного увеличило затраты времени. В то же время, произвольное изменение ε_r при использовании версии 3.10-У2-II никак не изменило результат, ни по количеству требуемых итераций, ни по затратам времени. Таким образом, разработанный гибридный метод может быть использован не только при многовариантном анализе, но и при оптимизации, что подтверждает его универсальность.

Таблица 6.41 – Время работы (с) и количество итераций алгоритма 3.10-У2 с разным начальным приближением и $tol = 10^{-4}$ для структуры из рисунка 6.40a при разном N_A/N

N_A/N	Номер вычисления	3.10-У2-I	3.10-У2-II
1050/1370	1	0,73 198	0,51 99
	2	0,73 198	0,51 99
	3	0,73 198	0,51 99
2100/2740	1	2,88 198	2,34 99
	2	2,88 198	2,34 99
	3	2,88 198	2,34 99

6.4 Рекомендации для многовариантного анализа и оптимизации полосковых структур

При моделировании полосковых структур в диапазоне параметров, до начала основных вычислений целесообразно оценить арифметическую сложность использования блочного LU-разложения для решения всей последовательности СЛАУ с помощью полученных выражений. (Полученные формулы легко встраиваются в программный код, без необходимости его существенной модификации.) Это позволит выбрать оптимальный метод решения (по критерию минимального времени решения). Например, при моделировании МПЛ в диапазоне изменений только толщины подложки, предпочтительно использовать полный пересчёт. В случае изменения значений параметров, дающего небольшие изменения матрицы СЛАУ, разработанный метод, основанный на блочном LU-разложении, в сочетании с процедурой перенумерации подынтервалов является эффективным средством ускорения вычислений. Дополнительным средством ускорения является использование гибридизации блочного LU-разложения с итерационным методом, позволяющей за счёт контролируемого уменьшения точности получать дополнительное ускорение. Так, показанное снижение точности первичных параметров полосковой структуры (например, ёмкостной матрицы в 1%) практически не

сказывается на значениях интересующих вторичных параметров структуры (погонная задержка, волновое сопротивление и др.).

При использовании в ходе моделирования только итерационного метода решения СЛАУ для вычисления предобусловливателя целесообразно использовать матрицу из середины решаемой последовательности СЛАУ (последующая последовательность решения остальных СЛАУ не имеет принципиального значения), а для условия его преформирования – оценку средней арифметической сложности решения. (Это справедливо и в случае использования разработанного гибридного метода.) Такое комбинированное использование позволит существенно уменьшить время многовариантного анализа и оптимизации сложных структур с большим порядком матрицы СЛАУ и их большим количестве. При этом увеличение количества решаемых СЛАУ будет приводить к получению большего ускорения, за счёт использования разработанных методов и алгоритмов.

6.5 Основные результаты раздела

Выполнена апробация разработанных в предыдущих разделах математических моделей, метода, алгоритмов и программ для решения СЛАУ, на примере многократного вычисления ёмкостной матрицы полосковых структур и МПЛП. Полученные результаты подтвердили корректность и эффективность разработанных средств.

Показано, что при решении последовательности СЛАУ с одной правой частью итерационным методом с одинаковым для всей последовательности предобусловливателем («замороженным»), по сравнению с фиксированным начальным приближением текущей СЛАУ, предпочтительнее использовать решение предыдущей, с точки зрения минимизации затрат времени. Так, показано, что, при изменении относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика связанной МПЛ, процесс вычисления ёмкостной матрицы может быть ускорен более чем в 49 раз по сравнению с использованием метода Гаусса. При изменении геометрических параметров МПЛ эти приёмы позволили ускорить процесс вычисления относительно метода Гаусса почти до: 12 раз при изменении высоты диэлектрика (h); 11 раз – ширины проводника (w); 5 раз – толщины проводника (t). При этом максимальная погрешность значения ёмкости полоски составила около 0,001%. Таким образом, установлено, что изменение t приводит к большим изменениям в значениях элементов матрицы СЛАУ и, тем самым, оказывает наибольшее влияние на итоговое ускорение.

В ходе исследования показано, что при изменении параметров структуры увеличивается различие в значениях элементов матрицы СЛАУ, что приводит к монотонному росту требуемого количества итераций и делает обоснованным переформирование предобусловливателя в ходе многократного решения СЛАУ, для получения большего ускорения. На примере изменения t МПЛ использование переформирования предобусловливателя по порогу количества итераций позволило дополнительно ускорить процесс решения до 1,72 раза. На этом же примере показано, что зависимость среднего арифметического времени решения последовательности СЛАУ имеет минимум, который может быть использован для определения момента адаптивного переформирования предобусловливателя.

При анализе МПЛ и МФ с торцевой связью использование среднего арифметического времени решения для переформирования предобусловливателя ускорило процесс вычисления относительно вычисления без переформирования до 1,6 раза. При этом значение полученного ускорения немногим меньше значения, полученного при использовании переформирования по порогу количества итераций.

На примере МПЛ, 2 структур МФ (с торцевой связью и зеркально-симметричного) и 2 итерационных методов (BiCGStab и CGS) апробировано использование средней арифметической сложности решения для определения момента переформирования предобусловливателя. Показано, что это использование в сочетании с методом BiCGStab ускоряет многократное решение СЛАУ до 1,6 раза, а CGS до 1,57 раза, относительно аналогичного решения без переформирования предобусловливателя.

Исследован выбор оптимального порядка решения СЛАУ при анализе тех же 3 структур и 2 итерационных методов. Показано, что только за счёт выбора очередности решения многократное решение СЛАУ может быть ускорено до 1,84 и 1,73 раза при использовании методов BiCGStab и CGS соответственно.

С использованием тех же структур и метода BiCGStab показано, что выбор средней матрицы последовательности СЛАУ для вычисления предобусловливателя ускоряет её решение до 2,21 раза и, на рассмотренных примерах, не требует переформирования предобусловливателя. При этом дальнейший порядок решения остальных СЛАУ не оказывает влияния на итоговое ускорение. Также показано, что при выборе матрицы СЛАУ для вычисления предобусловливателя из диапазона от 30-й до 60-й значение итогового ускорения практически не изменяется.

Также выполнена оценка работоспособности разработанных алгоритмов для итерационного решения последовательности СЛАУ с несколькими правыми частями на примере 2 структур МФ. Показано, что использование метода BI-BiCGStab, с использованием предыдущего решения СЛАУ для начального приближения, ускоряет многократное решение СЛАУ более чем в 22 раза относительно решения СЛАУ с каждой правой частью отдельно методом BiCGStab и нулевым начальным приближением, а использование метода Seed-BiCGStab неэффективно для решения поставленных задач. Также показано, что при увеличении количества правых частей ускорение увеличивается.

Выполнено 10-кратное вычисление ёмкостной матрицы соединителя СНП 339 при изменении относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика и учащении сегментации проводников и диэлектриков с использованием 2 модификаций исходного алгоритма. Показано, что его каждая последующая модификация позволяет получить дополнительное ускорение. Установлено, что увеличение количества вычисляемых ёмкостных матриц, а также отношения N_A/N приводят к увеличению временного выигрыша при использовании предложенных модификаций исходного алгоритма. Это подтверждено на примере анализа проводных отводов СШЭП, где также показано, что выигрыш относительно исходного алгоритма составил более 18 раз. Точность алгоритма продемонстрирована на примере вычисления временного отклика в конце связанной МПЛ с учётом частотной зависимости материала подложки. Выполненная оценка влияния программной реализации на эффективность работы алгоритма, с использованием 4 математических пакетов, показала, что вычислительные оценки хорошо согласуются с аналитическими. Также выполнено исследование еще одной модификации исходного алгоритма и показано, что затраты времени могут быть дополнительно сокращены примерно в 2 раза. Эта модификация использована при анализе трехмерных МПЛП, где показано, что ускорение достигает почти 13 раз при той же точности вычислений (значений элементов ёмкостной матрицы).

При использовании алгоритма для случая изменения высоты диэлектрика показано, что ускорение достигает порядка 15 раз, а вычислительные и аналитические оценки хорошо коррелируются между собой. Также показано, что чем ближе отношение N_A/N к единице, тем выигрыш от использования этой модификации исходного алгоритма выше.

При изменении геометрических параметров 2 связанных полосковых линий показано, что использование перенумерации позволяет сократить затраты времени до 3 раз относительно

исходного алгоритма, основанного на полном пересчёте. Установлено, что и эта модификация исходного алгоритма эффективнее, чем ближе отношение N_A/N к единице.

Выполненные вычисления по использованию гибридного метода показали, что за счёт его использования затраты времени могут быть сокращены до 25 раз относительно исходного алгоритма 3.8, а также до 2,5 раз и 3,4 раза относительно другой предложенной его модификации (алгоритм 3.10-У1) при точности в 1 и 4% (максимальная поэлементная погрешность значений элементов ёмкостной матрицы) соответственно. При этом выбор предыдущего решения в качестве начального приближения для решения текущей, в сочетании с обратным порядком решения, наиболее предпочтителен. Также показано, что предложенные алгоритмы применимы не только для многовариантного анализа, но и оптимизации.

Результаты раздела достаточно полно отражены в монографиях [647, 752].

7 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данном разделе приведены сведения, подтверждающие масштабное использование результатов исследования. Результаты использованы на производстве, при выполнении федеральной целевой программы, государственных заданий, работ по грантам РФФИ и РНФ, а также в учебном процессе 2 университетов. По каждой НИОКТР приведены её цели и кратко описаны полученные результаты, с указанием авторского вклада.

7.1 Организации

7.1.1 АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнёва»

7.1.1.1 ОКР по теме «АПК–ТУСУР»

Наименование и шифр ОКР: «Разработка и поставка аппаратно-программного комплекса для проведения анализа взаимовлияний электрических сигналов бортовой аппаратуры», хоздоговор 28/08 от 14.04.2008, шифр «АПК–ТУСУР», генеральный заказчик Министерство обороны РФ, 2008–2009 гг.

Цель работы – создание аппаратно-программного комплекса (АПК) на основе специализированного ПО, позволяющего при помощи компьютерного моделирования проводить анализ взаимовлияний электрических сигналов бортовой аппаратуры (БА).

В ходе работы для достижения цели выполнен обзор нормативных документов и научных публикаций по конструктивным приемам и способам обеспечения ЭМС БА космического аппарата (КА), ПО для моделирования, а также его сравнительный анализ. Рассмотрены подходы к обеспечению ЭМС и уменьшению взаимовлияний электрических сигналов. Выполнено экспериментальное исследование спектра излучений от гибкого печатного кабеля, а также проанализировано влияние структуры, направления и расположения проводников на излучение от кабеля. Представлено исследование излучаемых эмиссий на примере демонстрационного макета. Рассмотрено использование модальных явлений для уменьшения взаимовлияний. Приведены результаты предварительного моделирования блока БА. Разработан технический проект АПК, обоснована и описана комплектация. В качестве программной основы использована система TALGAT. Приведена методика создания электротехнических моделей блоков и приборов в TALGAT. Выполнена проверка достоверности моделирования с помощью разработанного АПК. Выполнен электродинамический анализ и квазистатический анализ МПЛП, в части вычисления матриц погонных параметров отрезков линий передачи

различной сложности, ёмкостных матриц трёхмерных неоднородностей, а также вычисления временного отклика произвольных схем из отрезков МПЛП с произвольными схемами из элементов с сосредоточенными параметрами. Проанализированы структуры, параметры и характеристики которых опубликованы, структуры близкие к структурам БА КА, а также непосредственно разработанные и изготовленные на предприятиях корпорации «РЕШЕТНЕВ».

Авторский вклад. Исполнитель. Выполнен обзор и сравнительная характеристика численных методов и ПО (на тестовых задачах) для моделирования ЭМС (результаты использованы при написании раздела 1 диссертации). Разработка ПО для АПК на базе системы TALGAT (раздел 4). Проведение предварительного электродинамического анализа корпусов БА. Проверка достоверности моделирования с помощью разработанного АПК (раздел 5).

7.1.1.2 ОКР «Развитие наземного сегмента космического комплекса системы ГЛОНАСС»

Наименование и шифр ОКР: Разработка материалов эскизного проекта ОКР «Развитие наземного сегмента космического комплекса системы ГЛОНАСС» в части создания составных частей сети наземных станций контроля и управления БАМИ (договор №24/13 от 9.01.2013), 2013–2015 гг.

Авторский вклад. Исполнитель. С использованием разработанных программ выполнен предварительный анализ ЭМС аппаратуры из состава станции (раздел 4). Разработаны рекомендации по обеспечению ЭМС.

7.1.2 ОАО «НПЦ «Полюс»

Модуль матричных операций MATRIX в составе системы компьютерного моделирования TALGAT использован для оценки паразитных электромагнитных эффектов в печатных платах и кабелях, разрабатываемых в ОАО «НПЦ «Полюс». Он позволил существенно сократить время компьютерного моделирования, что ускорило анализ ряда проектных решений с учетом электромагнитной совместимости (раздел 4).

7.1.3 ФГУП «ЦентрИнформ»

Наименование и шифр НИОКТР: «Модалный фильтр», хоздоговор НИИЦ/НИР/10-01 от 15.01.2010 с ФГУП «ЦентрИнформ», г. Санкт-Петербург, 2010 г.

Цель работы – создание экспериментальных макетов МФ в виде отдельных устройств для защиты от сверхкороткого импульса (СКИ) интерфейсного оборудования сети 100 Мбит Ethernet.

В ходе работы для достижения цели рассмотрены общие подходы к созданию МФ, исследованы их частотные и временные характеристики посредством 3 видов анализа (квазистатического, электродинамического и схемотехнического). Разработаны схемы электрические принципиальные, конструкции и технология изготовления макетов МФ. Выполнены изготовление и предварительные испытания макетов МФ.

Авторский вклад. Исполнитель. Выполнен многовариантный анализ погонных параметров МФ при изменении их геометрических и электрофизических параметров для выявления их оптимальных значений, необходимых для последующего квазистатического и электродинамического моделирования виртуальных макетов МФ (раздел 6).

7.1.4 ООО «Эремекс»

Наименование и шифр НИР: «Разработка математических моделей для трассировки меандровых линий задержки с оптимальными параметрами», шифр НИР «Змейки», договор № Р-20130122 от 18.01.2013, 2013 г.

Цель работы – совершенствование проектирования меандровых линий в трассировщике ТороR.

В ходе работы для достижения цели получены результаты по совершенствованию проектирования меандровых линий задержки в печатных платах. Выполнено обширное моделирование в широких диапазонах изменения геометрических и электрофизических параметров меандровых линий. Рассмотрена специфика процессов распространения импульсного сигнала в меандровой линии. Разработаны математические модели для вычисления задержек в меандровых линиях для различных стеков и параметров печатных плат. Предложены методики проектирования меандровых линий без учета и с учетом связей в витках.

Авторский вклад. Исполнитель. С использованием системы TALGAT выполнено квазистатическое моделирование меандровых линий задержки при изменении их геометрических и электрофизических параметров (раздел 6).

7.1.5 Главное управление МЧС по Томской области

Модуль MATRIX в составе системы компьютерного моделирования TALGAT использован при анализе линейных антенн ведомственной связи МЧС России по Томской области. Это позволило выявить пути совершенствования ведомственной сети связи КВ диапазона (раздел 4). Также запатентованный МФ использован при организации защищенной сети Fast

Ethernet организации, что позволило защитить оборудование этой сети от кондуктивных воздействий.

7.2 ФЦП ИР

7.2.1 ОКР по теме «УЭМ-ТУСУР»

Наименование и шифр ОКР: «Разработка комплекса программных и технических средств для контроля информационных магистралей, обеспечения ЭМС и исследования надёжности унифицированного ряда электронных модулей на основе технологии «система-на-кристалле» для систем управления и электропитания КА связи, навигации и дистанционного зондирования Земли с длительным сроком активного существования», тема «УЭМ-ТУСУР», хоздоговор 95/10 от 24.11.2010 в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2010–2012 гг.

Цель работы – создание комплекса программных и технических средств разработки унифицированного ряда электронных модулей на основе технологии "система-на-кристалле" систем управления и электропитания КА связи, навигации и дистанционного зондирования Земли с длительным сроком активного существования.

В ходе работы для достижения цели разработаны:

1. Программные средства механического и теплового анализа, предназначенные для проектирования, испытаний и производства в АО "ИСС" унифицированного ряда электронных модулей на основе IP-ядер и цифровых интерфейсов для систем и комплексов управления и электропитания перспективных КА.

2. Испытательный комплекс, предназначенный для решения задач повышения качества при производстве электронных плат, выявления недостатков конструкции и технологии изготовления изделий электронной техники, приводящих к срыву выполнения заданных функций в условиях эксплуатации, отклонений от выбранной конструкции или принятой технологии.

3. Технология слоистых наноструктурных неметаллических неорганических покрытий, предназначенная для решения задач повышения эффективного теплоотвода от элементов электронной и космической техники.

4. Автоматизированный проверочный комплекс компонентов мультиплексного канала обмена для КА разработки АО "ИСС", предназначенный для проверки разветвителей мультиплексного канала обмена с трансформаторной связью на соответствие ГОСТ Р 52070-2003.

5. Программно-аппаратные средства, предназначенные для имитационного моделирования ЭМС электронных модулей системы управления перспективных КА на этапе их проектирования и испытаний.

6. Комплекс методик и новых моделей, предназначенный для проектирования и испытаний унифицированных электронных модулей, из которых будут создаваться системы управления и электропитания перспективных КА.

7. Информационная система сквозной автоматизации создания бортовой радиоэлектронной аппаратуры (РЭА).

Авторский вклад. Исполнитель (направление 5). Выполнен обзор методов решения СЛАУ, способов предобусловливания и предфильтрации, а также форматов хранения разреженных матриц (раздел 1).

Получены аналитические выражения, позволяющие сравнить между собой разреженные форматы хранения по коэффициенту сжатия. Показано, что коэффициент сжатия матрицы установленной плотности имеет конечное значение при больших матрицах. Из рассмотренных форматов выбран разреженный строчный формат. Разработан алгоритм с использованием разреженного строчного формата для предобусловливания при решении СЛАУ итерационным методом. Для ускорения работы алгоритма усовершенствован разреженный строчный формат: для быстрого доступа к диагональным элементам добавлен вектор указателей на эти элементы. Данное усовершенствование ускорило работу алгоритма в 1,14–1,23 раза. На различных матрицах до $N = 8000$ показано, что использование разреженного строчного формата позволяет ускорить работу алгоритма решения СЛАУ до 2,6 раза по сравнению с алгоритмом, работающим с полной матрицей, и до 22 раз по сравнению с методом Гаусса. Сравнение ускорения, полученного на матрицах примерно одного порядка, но из разных задач, показало возможность значительно большего ускорения при решении СЛАУ для структур без диэлектрика. Проведен дополнительный анализ алгоритма, на основании которого удалось усовершенствовать алгоритм, исключив из него лишние поиски ненулевых элементов. Выполнена программная реализация алгоритмов и проведен вычислительный эксперимент на различных матрицах с использованием метода BiCGStab, показавший ускорение в 3 раза по сравнению с прежней версией (разделы 2, 4 и 5).

Для вычисления эффективности экранирования частных структур по аналитическим моделям, разработаны программные средства и выполнено их тестирование (раздел 4). Разработан и внедрен в систему TALGAT алгоритм вычисления ёмкостных матриц с помощью

блочного LU-разложения). Получены вычислительные оценки при его использовании для разных N_A/N и количестве правых частей. Показано, что алгоритм неэффективен для однократных вычислений, но для многократных вычислений он работает быстрее исходного. Так, показано, что до значения $N_A/N \approx 0,5$ (что соответствует близким количествам подынтервалов проводник-диэлектрик и диэлектрик-диэлектрик) ускорение практически отсутствует, но с ростом N_A/N значительно возрастает, до 35 раз. Выполнено тестирование алгоритма на примере моделирования соединителя СНП 339 (вычисление 10 ёмкостных матриц) с использованием 2 РС. Показано ускорение в 2,45 раза. Также отмечено, что существуют практические структуры, для которых будет ускорение в десятки раз, например, структуры с большим числом проводников и малым числом диэлектриков и их границ, которые можно реже сегментировать. Кроме того, даже при большом числе диэлектриков, если меняется диэлектрическая проницаемость одного, то его границы можно нумеровать последними: это легко осуществимо и может дать значительное ускорение. Также получены результаты по получению временного отклика сигнала за счет использования разработанного алгоритма и выполнено его сравнение с результатами, полученными исходным алгоритмом. Выполненное моделирование выявило возможность значительного ускорения вычисления при загрузлении сегментации диэлектрических границ структуры (разделы 3, 4 и 6).

7.2.2 ОКР по теме «САН»

Наименование и шифр ОКР: «Разработка принципов построения и элементов системы автономной навигации с применением отечественной специализированной элементной базы на основе наногетероструктурной технологии для космических аппаратов всех типов орбит», тема «САН», хоздоговор 96/12 от 16.11.2012 в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2012–2015 гг.

Цели работы:

1. Создание нового поколения конкурентоспособной системы автономной навигации (САН), разрабатываемой с применением наногетероструктурной технологии, по сигналам глобальных навигационных спутниковых систем для точного и независимого от наземной инфраструктуры координатно-временного обеспечения низкоорбитальных и высокоорбитальных КА, а также обеспечения автономного довыведения КА пятого поколения с переходной на геостационарную орбиту с применением двигателей КА.

2. Проведение комплекса системных, теоретических и экспериментальных работ в обеспечение создания опережающего научно-технического задела в области проектирования, производства и испытаний конкурентоспособной бортовой РЭА КА пятого поколения, разрабатываемой с применением наногетероструктурной технологии.

3. Расширение и углубление использования научно-технического потенциала ТУСУР и ИВМ СО РАН при проектировании бортовой РЭА космических аппаратов, в том числе развитие промышленно-ориентированных центров проектирования и испытаний перспективной электронной компонентной базы в составе многоуровневой системы проектирования функционально насыщенной электронной компонентной базы и аппаратуры.

4. Целевая подготовка молодых специалистов в области проектирования бортовой РЭА для АО "ИСС".

5. Повышение квалификации сотрудников АО "ИСС", занимающихся проектированием бортовой РЭА.

В ходе проекта для достижения целей выполнены: Разработка эскизного проекта опытных образцов элементов САН. Разработка конструкторской и программной документации опытных образцов элементов САН. Изготовление опытных образцов элементов САН для лабораторно-отрабочных испытаний. Проведение лабораторно-отрабочных испытаний опытных образцов элементов САН. Изготовление опытных образцов элементов САН для проведения предварительных испытаний. Проведение предварительных испытаний опытных образцов элементов САН. Изготовление опытных образцов элементов САН для проведения приемочных испытаний. Проведение приемочных испытаний опытных образцов элементов САН.

Авторский вклад. Исполнитель. Аналитический обзор основных методов и программных средств моделирования ЭМС (раздел 1). Предварительные оценки ЭЭ корпуса блока САН с использованием аналитических моделей (раздел 4). Разработка программ и сопровождение процесса корректного моделирования цепей электрических принципиальных схем и элементов печатных плат с использованием разработанных комплексов программ: итерационного решения СЛАУ и TALGAT [667–669, 679–689] (раздел 4).

7.2.3 ОКР по теме «Модули ЭПК-100»

Наименование и шифр ОКР: «Разработка цифрового управляющего и силовых модулей энергопреобразующего комплекса для высоковольтных систем электропитания космических

аппаратов», тема «Модули ЭПК-100», договор № 18/15 от 29.07.2015 г. в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2016–2018 гг.

Цели работы:

1. Проведение комплекса системных, теоретических и экспериментальных работ в обеспечение создания опережающего научно-технического задела в области проектирования отказоустойчивых цифровых управляющих и силовых модулей регулятора энергии солнечных и аккумуляторных батарей высоковольтных систем электропитания (СЭП) космических аппаратов, разрабатываемых с применением российской импортозамещающей электронной компонентной базы (ЭКБ).

2. Разработка и внедрение цифровой системы автоматического регулирования и мониторинга на основе перспективных БИС отечественного производства для нового поколения бортового энергопреобразующего комплекса (ЭПК) с повышенной удельной энергетической эффективностью высоковольтных (100 В) СЭП автоматических КА.

3. Расширение и углубление научно-технического потенциала АО "ИСС", ТУСУР и соисполнителей в области проектирования бортовой энергопреобразующей аппаратуры СЭП автоматических КА.

4. Целевая подготовка молодых специалистов в области проектирования бортовой энергопреобразующей аппаратуры СЭП автоматических КА для АО "ИСС".

5. Повышение квалификации сотрудников АО "ИСС", занимающихся проектированием бортовой энергопреобразующей аппаратуры СЭП автоматических КА.

В ходе проекта для достижения целей выполнены:

Проведение патентных исследований в соответствии с ГОСТ Р 15.011.

Разработка технического предложения на модули энергопреобразующего комплекса для высоковольтных систем электропитания космических аппаратов.

Разработка эскизного проекта на модули, эскизной конструкторской и эксплуатационной документации. Разработка рабочей конструкторской документации на модули.

Изготовление опытного образца модулей, проведение предварительных испытаний, доработка опытного образца по результатам предварительных испытаний и проведение приемочных испытаний.

Авторский вклад. Исполнитель. Патентный поиск и аналитический обзор научных и информационных источников (раздел 1).

7.2.4 ПНИ RFMEFI57417X0172

Наименование и шифр ПНИ: «Теоретические и экспериментальные исследования по синтезу оптимальной сети высоковольтного электропитания для космических аппаратов» по проекту ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение о предоставлении субсидии от 26.09.2017 г. №14.574.21.0172, шифр RFMEFI57417X0172, 2017–2020 гг.

Цель работы – разработка теоретических основ проектирования оптимальной сети высоковольтного (100 В) электропитания (ОСВЭ) для КА, отличающейся повышенной помехоустойчивостью, помехозащищенностью, надежностью и уменьшенной массой, и создание прототипа АПК для синтеза и испытаний ОСВЭ для КА.

В ходе работы и для достижения цели выполнены:

Выбор и обоснование направлений исследования (анализ современной научно-технической, нормативной, методической литературы по исследованиям в области проектирования сети электропитания; проработка вариантов, обоснование и выбор средств разработки прототипов ПО, устройств для мониторинга, испытаний и защиты, АПК; проведение патентных исследований по теме «Исследования технического уровня разработок по синтезу и мониторингу ОСВЭ, помехозащищенности и надежности СШЭП» в соответствии с ГОСТ Р 15.011-96; обзор литературы в области проектирования сети электропитания; проведение патентных исследований по теме: «Исследования технического уровня разработок по технологии проектирования и изготовления элементов сети электропитания» в соответствии с ГОСТ Р 15.011-96; проработка вариантов, обоснование и выбор технологии проектирования и изготовления элементов сети электропитания).

Теоретические исследования (обоснование и разработка целей моделирования элементов ОСВЭ; обоснование выбора моделей, методов и алгоритмов для моделирования элементов ОСВЭ; исследование вариантов возможных решений задачи разработки прототипов ПО, устройств для испытаний на электромагнитную совместимость (устройств для измерений), устройства защиты, АПК и проведение их сравнительной оценки; обоснование и выбор оптимального варианта решения задачи разработки прототипов ПО, устройств для испытаний на электромагнитную совместимость (устройств для измерений), устройства защиты и АПК; разработка выбранных моделей элементов ОСВЭ; разработка тестовых задач для моделирования, демонстрирующих наличие эффектов, позволяющих создать новую продукцию; разработка технических решений по синтезу ОСВЭ для КА, отличающейся повышенной

помехоустойчивостью, помехозащищенностью, надежностью и уменьшенной массой; разработка новых принципов и технических решений по мониторингу параметров ОСВЭ; разработка технических решений, направленных на повышение помехозащищенности и надежности СШЭП; разработка математических моделей и вычислительных алгоритмов для проектирования предложенных технических решений (по синтезу ОСВЭ для КА, отличающейся повышенной помехоустойчивостью, помехозащищенностью, надежностью и уменьшенной массой; по мониторингу параметров ОСВЭ; по повышению помехозащищенности и надежности СШЭП); разработка прототипа устройства для измерения характеристик элементов и узлов ОСВЭ при совместных климатических и электромагнитных воздействиях; разработка прототипа устройства для измерения уровня излучаемой помехоэмиссии и уровня восприимчивости элементов и узлов ОСВЭ к излучаемому воздействию; разработка прототипа устройства для измерения уровня кондуктивной помехоэмиссии и уровня восприимчивости элементов и узлов ОСВЭ к кондуктивному воздействию; разработка прототипа устройства для защиты СШЭП от СКИ; проведение дополнительных патентных исследований; разработка технологии проектирования и изготовления элементов сети электропитания; разработка лабораторного макета СШЭП).

Экспериментальные исследования (разработка прототипа ПО, реализующего математические модели и вычислительные алгоритмы для проектирования предложенных технических решений (по синтезу ОСВЭ для КА, отличающейся повышенной помехоустойчивостью, помехозащищенностью, надежностью и уменьшенной массой; по мониторингу параметров ОСВЭ; по повышению помехозащищенности и надежности СШЭП); разработка прототипа АПК для синтеза и испытаний ОСВЭ для КА; разработка программы и методики синтеза ОСВЭ; разработка методических рекомендаций по проектированию ОСВЭ для КА; разработка проекта технического задания на проведение ОКР по разработке АПК для синтеза и испытаний ОСВЭ для КА; обобщение и оценка полученных в ходе ПНИ результатов, в том числе анализ выполнения требований ТЗ, оценка полноты решения задач и достижения поставленных целей ПНИ, технико-экономическая оценка полученных результатов ПНИ в сравнении с современным научно-техническим уровнем; проведение дополнительных патентных исследований; изготовление прототипа устройства для измерения характеристик элементов и узлов ОСВЭ при совместных климатических и электромагнитных воздействиях; изготовление прототипа устройства для измерения уровня излучаемой помехоэмиссии и уровня восприимчивости элементов и узлов ОСВЭ к излучаемому воздействию; изготовление

прототипа устройства для измерения уровня кондуктивной помехоэмиссии и уровня восприимчивости элементов и узлов ОСВЭ к кондуктивному воздействию; изготовление прототипа устройства для защиты СШЭП от СКИ; изготовление прототипа АПК для синтеза и испытаний ОСВЭ для КА; изготовление лабораторного макета СШЭП; разработка программы и методики экспериментальных исследований прототипа устройства для измерения характеристик элементов и узлов ОСВЭ при совместных климатических и электромагнитных воздействиях; разработка программ и методик экспериментальных исследований прототипов устройств для измерения уровня излучаемой помехоэмиссии и уровня восприимчивости элементов и узлов ОСВЭ к излучаемому воздействию; разработка программы и методики экспериментальных исследований прототипа устройства для измерения уровня кондуктивной помехоэмиссии и уровня восприимчивости элементов и узлов ОСВЭ к кондуктивному воздействию; разработка программы и методики экспериментальных исследований прототипа устройства для защиты СШЭП от СКИ; проведение экспериментальных исследований по проектированию ОСВЭ для КА по разработанным программам и методикам; разработка программы и методики проведения экспериментальных исследований и испытаний лабораторного макета СШЭП; проведение экспериментальных исследований и испытаний лабораторного макета СШЭП).

Авторский вклад. Исполнитель. Обзор литературы в области проектирования сети электропитания, анализ современной научно-технической, нормативной, методической литературы по исследованиям в области проектирования сети электропитания и проработка вариантов, обоснование и выбор средств разработки прототипов ПО, устройств для мониторинга, испытаний и защиты, АПК, а также проведение патентных исследований в части программной части АПК (ПО для синтеза топологии и элементов сети электропитания; численные методы; способы сокращения временных затрат на моделирование; программные ускорители; экспертные системы; методы проверки достоверности электромагнитного моделирования; модели и алгоритмы для проектирования технических решений; экранирование) (раздел 1). Обоснование выбора моделей и методов для моделирования силовой шины электропитания и проводных отводов. Исследование и сравнение вариантов разработки ПО. Сравнение производительности математических библиотек. Обоснование и выбор оптимального варианта разработки ПО (разделы 1 и 6). Разработка прототипа ПО, реализующего математические модели и вычислительные алгоритмы для проектирования предложенных технических решений, на базе системы TALGAT (субмодуль построения сетки,

субмодуль многовариантного анализа, вычисления ЭЭ, модуль принятия решений, база данных помеховых сигналов, реализация вычисления N-норм) (раздел 4).

7.3 Государственные задания

7.3.1 НИР по проектной части

Наименование и шифр НИР: «Разработка новых программных и аппаратных средств для моделирования и обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронной аппаратуры» в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности 8.1802.2014/К, 2014–2016 гг.

Цель работы – разработка новых программных и аппаратных средств для моделирования и обеспечения ЭМС радиоэлектронной аппаратуры.

В ходе работы для достижения цели выполнены: разработка и создание унифицированного ряда устройств для проведения испытаний на одновременное влияние электромагнитных и климатических факторов, а также разработка методики для проведения испытаний с их использованием; разработка и апробация методики получения математических моделей типовых пассивных компонентов радиоэлектронной аппаратуры с учетом паразитных параметров их выводов для диапазона частот до 40 ГГц; разработка математических моделей частотной зависимости параметров типовых материалов печатных плат для диапазона частот до 40 ГГц; разработка алгоритмов для решения СЛАУ с уменьшенными вычислительными затратами; совершенствования системы компьютерного моделирования ЭМС; разработка новых устройств на основе модальных явлений; разработка новых методик и рекомендаций для обеспечения ЭМС.

Авторский вклад. Исполнитель. Разработка алгоритмов для решения СЛАУ с уменьшенными вычислительными затратами. Так, предложены и исследованы алгоритмы многократного решения СЛАУ итерационным методом с выбором очередности решения и матрицы для вычисления предобусловливателя и алгоритм перенумерации для многократного решения СЛАУ с изменяющейся матрицей, основанный на блочном LU-разложении. Также разработаны алгоритмы для заполнения матрицы СЛАУ с использованием графического процессора и параллельной версии ILU(0)-разложения (разделы 3, 6). Разработаны программы для многократного решения СЛАУ итерационным методом с выбором очередности решения и матрицы для вычисления предобусловливателя. Также выполнены работы по совершенствованию системы TALGAT за счёт реализации нового функционала (алгоритм

многократного решения СЛАУ с использованием перенумерации и блочного LU-разложения) и улучшения пользовательского интерфейса, в частности, отображение распределения плотности заряда по поверхности структуры (раздел 4).

7.3.2 НИР по базовой части

Наименование и шифр НИР: «Выявление новых подходов к совершенствованию обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронной аппаратуры и моделирования систем активного зрения роботов» в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности 8.9562.2017/8.9, 2017–2019 гг.

Цель работы – выявление новых подходов к совершенствованию обеспечения электромагнитной совместимости (ЭМС) РЭА и моделирования систем активного зрения роботов.

В ходе работы и для достижения цели выполнены: выявление новых подходов к совершенствованию защиты РЭА от сверхкоротких импульсов за счет использования свойств МПП; разработка и исследование новых аналитических моделей для квазистатического анализа МПП; разработка и исследование вычислительных алгоритмов на основе разработанных моделей для оптимизации и многовариантного анализа с уменьшенными вычислительными затратами; выявление закономерностей взаимовлияния климатических (температура и влажность воздуха) и электромагнитных факторов на ТЕМ-камеру и испытуемый объект внутри неё; разработка и исследование нового класса прецизионных высокопроизводительных алгоритмов обработки и анализа изображений.

Авторский вклад. Исполнитель. Аналитический обзор информационных источников, посвященных способам уменьшения вычислительных затрат на моделирование с использованием МоМ. Рассмотрены различные способы уменьшения вычислительных затрат на моделирование: ускоренное заполнение матрицы, компрессия данных, совершенствование прямых и итерационных методов решения СЛАУ, способов предобусловливания, использование графических процессоров. Выполнены предварительные теоретические исследования. Так, выполнено обоснование выбора моделей, методов и алгоритмов для моделирования по трем направлениям: построение сетки, решение СЛАУ и компрессия данных (раздел 1). Разработаны и исследованы алгоритм построения неравномерной сетки, гибридный метод решения СЛАУ, математические модели с дополнительными параметрами для многократного вычисления ёмкостной матрицы. Получены оценки применения компрессии

данных при анализе МПЛП. Выполнено исследование использования блочных версий метода BiCGStab при многовариантном анализе МПЛП. Показана эффективность гибридного метода решения СЛАУ (разделы 3 и 6).

7.3.3 Инновационная программа ТУСУРа

Разработанные алгоритмы итерационных методов решения СЛАУ, предфилтрации и предобусловливания, а также программное обеспечение, использованы в проекте «Разработка системы компьютерного моделирования электромагнитной совместимости». (Заключительный отчет ВТК-15 по мероприятию 3.1.3а инновационной программы ТУСУР, 2006 г. и свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 8376) (раздел 4).

7.4 Гранты РФФИ и РНФ

7.4.1 НИР по гранту РФФИ а

Наименование и шифр НИР: «Исследование новых модальных явлений в структурах многопроводных линий передачи с неоднородным диэлектрическим заполнением», грант РФФИ 06-08-01242, 2006 г.

Цель работы – исследовать новые модальные явления в структурах многопроводных линий передачи с неоднородным диэлектрическим заполнением.

В ходе работы для достижения цели выполнены: оценка возможностей и условий разложения и восстановления импульсов в различных структурах; разработка программного обеспечения для сквозного анализа и оптимизации геометрических и электрических параметров структуры; компьютерное моделирование распространения импульсных сигналов в конкретных структурах.

Авторский вклад. Исполнитель. Выполнена программная реализации и исследование алгоритмов для итерационного решения СЛАУ при анализе МПЛП (разделы 4 и 6).

7.4.2 НИР по гранту РФФИ мол_а

Наименование и шифр НИР: «Выявление, исследование и реализация новых возможностей уменьшения времени многократного решения СЛАУ с частично изменяющейся матрицей в задачах вычисления ёмкостной матрицы произвольной системы проводников и диэлектриков», грант РФФИ 14-07-31267, 2014–2015 гг.

Цель работы – исследование алгоритмических ресурсов и выявление закономерностей уменьшения времени многократного решения СЛАУ прямыми и итерационными методами.

Авторский вклад. Руководитель. Получены следующие результаты.

Для прямых методов решения СЛАУ получено выражение для грубой (предварительной) оценки ускорения многократных вычислений с помощью блочного LU-разложения. Так, при количестве решений СЛАУ 2048 полученное по этому выражению ускорение составило 714,3 раза. Такое высокое ускорение объясняется спецификой изменения матрицы СЛАУ при изменении ε_r диэлектрика и учетом этой специфики в алгоритме решения СЛАУ на основе блочного LU-разложения. Полученное выражение не является точным, однако позволяет оценить характер зависимости ускорения многократных вычислений от ряда параметров и пределы возможного роста ускорения вычислений. Более точными являются полученные выражения для аналитической оценки сложности и ускорения вычисления ряда ёмкостных матриц на основе блочного LU-разложения. Так, полученное выражение для ускорения позволило выполнить более точную оценку зависимости ускорения вычислений от таких параметров матрицы СЛАУ (в задаче вычисления ёмкостной матрицы), как количество подынтервалов на границах проводник-диэлектрик (N_A), на всех границах структуры (N), а также количество вычислений ёмкостной матрицы (m) и проводников в структуре (количество решений СЛАУ – N_{COND}). Выявлено, что алгоритм блочного LU-разложения неэффективен для вычисления одной ёмкостной матрицы, из-за того, что первый шаг блочного LU-разложения требует обращения двух блоков **A** (блок порядка N_A) и **D** блок порядка ($N_D = N - N_A$) и последующего решения СЛАУ. Также выявлена нелинейная зависимость ускорения от количества проводников в структуре. Максимальное ускорение, полученное по аналитическому выражению, составляет 134 раза (для $N_A/N = 0,9$; $m = 1000$, $N_{\text{COND}} = 1$). При проведении вычислительного эксперимента (на двух РС) подтвержден характер поведения ускорения (рост ускорения при увеличении числа СЛАУ). Однако максимальное ускорение составляет 44,56 раза (для РС 1) и 41,12 раза (для РС 2) при $N_A/N = 0,9$; $m = 1000$; $N_{\text{COND}} = 1$ (разделы 3, 6).

Получены оценки числа арифметических операций алгоритмов вычисления ёмкостной матрицы (при изменении диэлектрической проницаемости), основанных на последовательном LU-разложении и на блочном LU-разложении с учетом программной реализации, а также проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие их корректность. Получена оценка возможного ускорения от использования блочного разложения. Однако, уточнение оказалось несущественным. Так, ускорение в 134 раза (для $N_A/N = 0,9$; $m = 1000$; $N_{\text{COND}} = 1$) без

учета программной реализации сократилось до 133 раз с учетом. Отсюда можно сделать вывод, что учет программной реализации не имеет существенного влияния на аналитическую оценку ускорения. Выявлено, что опции оптимизации программного кода компилятора, используемого для создания приложения, влияют на ускорение. Так, при отключении оптимизации получено, что ускорение, полученное вычислительным путем (для $N_A/N = 0,9$; $m = 1000$; $N_{COND} = 10$) существенно ближе (86,9) к полученному аналитически (101). С включенной оптимизацией ускорение составляет 46,84 (разделы 3, 6).

Дополнительно разработан алгоритм многократного вычисления ёмкостной матрицы системы проводников и диэлектриков в диапазоне изменения высоты диэлектрического слоя и выполнены аналитические и вычислительные оценки ускорения многократного решения СЛАУ. Максимальные ускорения, полученные по аналитическим выражениям и в результате вычислительного эксперимента, составили 23,5 и 15 раз соответственно. Различные пределы ускорения, но схожий характер его зависимости от параметров матрицы СЛАУ и количества вычислений показали возможность априорной оценки эффективности использования разработанных алгоритмов. Расхождения в значениях объясняются возможностями оптимизации использованного компилятора (разделы 3, 6).

Для итерационных методов рассмотрены два способа ускорения многократных вычислений. Первым является использование, в качестве вектора начального приближения, вектора решения предыдущей СЛАУ (для первой СЛАУ – единичного вектора). Вторым способом заключается в использовании для последующих СЛАУ предобусловливателя, полученного из матрицы первой СЛАУ. Для оценки ускорения получены 100 ёмкостных матриц ($N = 1600$) при изменениях одного из размеров исследуемой структуры (МПЛ): высоты диэлектрика (в диапазоне 12–112 мкм или на 933%); ширины проводника (в диапазоне 18–118 мкм или на 656%); высоты проводника (в диапазоне 6–106 мкм или на 1767%). Выявлено значительное (от 10 до 30 раз) ускорение при малом (до 100%) изменении параметров структуры. Однако применение первого способа для вычисления 100 ёмкостных матриц позволило получить ускорение до 1,32 раза, при использовании второго – до 6,49 раза, при совместном использовании первого и второго – до 11,77 раза. Кроме того, выявлено, что эффективность предложенных способов снижается при увеличении разницы между первой и текущей матрицами СЛАУ, что ведет к росту числа итераций и значительному снижению ускорения вычислений (разделы 3, 6).

Одним из путей ускорения вычислений рассмотрено реформирование предобусловливателя, когда текущее количество итераций становится выше заданного порога. Выявлено оптимальное значение порога реформирования предобусловливателя, при котором достигается ускорение 1,72 раза. Однако, исследование предложенного способа затрудняет сложность определения оптимального порога до начала решения СЛАУ. Поэтому целесообразно выявление других способов определения порога реформирования матрицы предобусловливания (разделы 3, 6).

Получена качественная оценка изменения матрицы СЛАУ при изменении других (отличных от диэлектрической проницаемости) параметров структуры на примере МПЛ (ширина и толщина проводника) и диэлектрика (высота слоя подложки). Полученные портреты матрицы позволили оценить необходимость дальнейшего усовершенствования алгоритмов нахождения ряда ёмкостных матриц, учитывающих выявленные изменения. Выявлено, что изменение геометрических параметров МПЛ приводит к значительному изменению (более чем 50%) портрета матрицы СЛАУ и её норм, что делает невозможным эффективное применение предложенных алгоритмов. Однако, качественная оценка известных структур показала, что изменение геометрических параметров некоторых диэлектрических границ может приводить к значительному, но не полному, изменению портрета матрицы СЛАУ (изменяются элементы в нижней и правой частях матрицы СЛАУ), что говорит о возможности усовершенствований предложенных алгоритмов (раздел 3).

Сформулирована и доказана теорема о существовании минимума среднеарифметического времени решения ряда СЛАУ в задачах вычисления ёмкостной матрицы произвольной системы проводников и диэлектриков. Разработан алгоритм многократного решения СЛАУ итерационным методом, отличающийся адаптивным реформированием предобусловливателя на основании оценки среднего арифметического значения времени решения предыдущих СЛАУ. Также разработан алгоритм, основанный на оценке средней арифметической сложности решения предыдущих СЛАУ. Для этого получены аналитические оценки последовательного LU-разложения, методов BiCGStab и CGS (раздел 3).

Исследован процесс многократного решения СЛАУ в задаче нахождения ёмкостной матрицы системы проводников и диэлектриков, итерационным методом с адаптивным реформированием предобусловливателя с использованием трех условий, в сочетании с использованием, в качестве вектора начального приближения, вектора решения предыдущей СЛАУ: по заданию оптимального порога числа итераций и на основании оценок средних

арифметических значений времени и сложности решения предыдущих СЛАУ. Показано, что при анализе МПЛП использование условий дает разное ускорение, как при разных структурах, так и при разных итерационных методах. Однако условия, основанные на указанных выше оценках, предпочтительны на практике, поскольку до начала вычислений не представляется возможным определение оптимального порога количества итераций (раздел 6).

Выполнено исследование применимости разработанных алгоритмов на примере анализа трех МПЛП при изменении их размеров. Получены оценки числа обусловленности и портреты матриц СЛАУ для каждой структуры для двух порядков матриц. Выполнено исследование применимости предложенных способов реформирования предобусловливателя при использовании двух итерационных методов крылоского типа: BiCGStab и CGS (разделы 3, 6).

7.4.3 НИР гранту РФФИ офи_м

Наименование и шифр НИР: «Комплексные исследования по разработке алгоритмов, математического обеспечения и средств проектирования для создания новых элементов защиты и контроля вычислительных систем на основе модальных явлений», грант РФФИ 14-29-09254, 2014–2016 гг.

Цель работы – разработка алгоритмов, математического обеспечения и средств проектирования для создания новых элементов защиты и контроля вычислительных систем на основе модальных явлений. Общая гипотеза работы – системное использование электромагнитных связей в многопроводных структурах проводников и диэлектриков, на основе тщательного моделирования и оптимизации, позволит резко повысить защищенность вычислительных систем от воздействий электромагнитных полей и космических излучений.

В ходе работы для достижения цели и подтверждения гипотезы выполнены: анализ существующих исследований; теоретическое подтверждение гипотезы; разработка алгоритмов, математического обеспечения и средств проектирования; выявление новых ресурсов повышения сбоеустойчивости аппаратуры; экспериментальное подтверждение гипотезы; тестирование разработанных алгоритмов, математических моделей и программ, а также апробация их использования для повышения сбоеустойчивости аппаратуры.

Авторский вклад. Исполнитель. Выполнены обзор и сравнительный анализ численных методов анализа ЭМС и способов сокращения затрат на моделирование (раздел 1). Применительно к моделированию элементов защиты выполнено детальное тестирование шагов алгоритма, основанного на блочном LU-разложении, с помощью пакетов прикладных программ Matlab, Scilab и Octave и Eigen. Полученные результаты подтверждают, что при росте числа

неизменяющихся сегментов структуры к общему их числу выигрыш за счет использования алгоритма растет, независимо от используемой системы. Однако он может быть в 4 раза меньше, чем по аналитической оценке. Кроме того, выигрыш, полученный в этих системах, может различаться в 2 раза. Таким образом, на различие в ускорении, полученное вычислительно и аналитически, оказывает влияние только различие в реализации матрично-матричных операций в разных системах и библиотеках (раздел 6).

Получены оценки затрат на реализацию алгоритма перенумерации подынтервалов, позволяющего при «произвольных» изменениях в матрице использовать алгоритм блочного LU-разложения при многовариантном анализе структуры. Также выполнено тестирование, на примере многовариантного анализа двух- и трехпроводных полосковых структур, показавшее что вычислительные оценки в целом согласуются, однако их поведение различно. Так, вычислительные оценки ниже, чем аналитические и использование перенумерации позволяет ускорить многовариантный анализ (разделы 3 и 6).

Разработаны и протестированы алгоритмы построения равномерной сетки, на примере вычисления ёмкостной матрицы сложной печатной структуры. Выполнено сравнение полученных результатов с результатами, полученными при использовании алгоритма АИВОС и при равномерной сегментации (разделы 2 и 5).

7.4.4 НИР по гранту РФ

Наименование и шифр НИР: «Комплексное обоснование возможностей создания модальной технологии помехозащиты критичной радиоэлектронной аппаратуры и совершенствования существующих и разработки новых помехозащитных устройств на её основе», грант РФ 14-19-01232, 2014–2016 гг.

Цель работы – комплексное обоснование возможностей создания модальной технологии помехозащиты критичной радиоэлектронной аппаратуры и совершенствования существующих и разработки новых помехозащитных устройств на её основе.

В ходе работы для достижения цели выполнены: теоретическое и экспериментальное исследование частотных характеристик средств помехозащиты; комплексная структурно-параметрическая оптимизация средств помехозащиты; определение возможных областей использования средств помехозащиты.

Авторский вклад. Исполнитель. Обзор работ по применению численных методов, ПО для схемотехнического, квазистатического и электродинамического моделирования, методов

решения СЛАУ и построения сетки, для моделирования помехозащитных устройств (раздел 1). Апробация разработанных алгоритмов и комплексов программ для моделирования новых модальных фильтров (раздел 6).

7.5 Результаты интеллектуальной деятельности

Разработанное математическое и программное обеспечение использовано автором при получении результатов интеллектуальной деятельности по разработке новых устройств на основе МПЛП и комплексов программ для моделирования РЭС с уменьшенными вычислительными затратами [753–756].

7.5.1 Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

На основании разработанных в ходе работы математических моделей, численного метода, и алгоритмов созданы различные программы. Особенности разработки и программной реализации подробно приведены в разделе 4 диссертации. Так, по мере разработки результаты работы (способы, методы и алгоритмы, их программная реализация и тестирование) входили в состав текущих версий системы TALGAT [660–669, 671, 673]. Это подтверждается поданными заявками на государственную регистрацию программы для ЭВМ, в каждой из которых указан личный авторский вклад, и полученными свидетельствами о государственной регистрации программы для ЭВМ по результатам рассмотрения этой заявки согласно установленных правил. В частности, выполнены разработка и совершенствование, программная реализация и тестирование модулей системы TALGAT (MATRIX, MOM2D, MOM3D, TLGPU, SE3D) для формирования и решения систем линейных алгебраических уравнений прямыми и итерационными методами с предфильтрацией и предобуславливанием, формируемых при электродинамическом и квазистатическом моделировании полосковых структур (двухмерных и трехмерных), проводных отводов и проволочных антенн, а также для быстрой оценки эффективности экранирования корпусов РЭС с массивом апертур.

Вторая часть программ реализована в виде отдельных приложений по требованиям ТЗ выполняемых хоздоговорных работ и грантов [676–680]. Наконец третья часть программ создана в виде отдельных приложений, объединенных в отдельный комплекс [681–689]. Отдельно стоит отметить, что система TALGAT использована другими авторами при разработке широкополосных дискретных недисперсионных фазовращателей [757].

7.5.2 Патенты на полезную модель

Созданные программы использованы, для подтверждения достижимости указанного в заявках на полезные модели технического результата с помощью моделирования, при разработке новых устройств: защиты РЭС от СКИ [758]; воздействия на аппаратуру [759]; модального зондирования [760]; обнаружения, идентификации и диагностики МПЛП [761].

7.5.3 Патенты на изобретения

С использованием созданных программ разработаны новые устройства и элементы РЭС для защиты РЭС от импульсных сигналов [762], СКИ [763–770], для нарушения работы аппаратуры за счет разложения и восстановления импульсов [771], а также новые способы резервирования печатных плат [772–776] и плоских кабелей [777]. Программы использовались для подтверждения достижимости указанного в заявках на изобретения технического результата при проведении многовариантного анализа. В частности, в разделе 6 приведены результаты анализа зеркально-симметричного МФ, подтверждающие сказанное.

Таким образом, сложность моделируемых структур подтверждает универсальность разработанных программ, а полученные патенты, физическая реализуемость этих устройств [59, 778–780] и использование их на практике (акт внедрения в Главное управление МЧС России по Томской области) – достоверность результатов работы.

7.6 Учебный процесс

7.6.1 ТУСУР

Результаты работы использованы автором в учебном процессе ТУСУРа при подготовке магистров по направлениям «Радиотехника» (11.04.01) и «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (11.04.02) по программам «ЭМС радиоэлектронной аппаратуры» [781, 782], «ЭМС в топливно-энергетическом комплексе» [783, 784] и «Защита от электромагнитного терроризма», а также аспирантов и студентов бакалавриата [785–787]. Так, например, система TALGAT широко используется в нескольких специальных дисциплинах, как основной инструмент ознакомления с процессом моделирования [788, 789]. В частности, по дисциплине «Теория ЭМС радиоэлектронных средств и систем», на одном из лабораторных занятий студенты моделируют отдельные межсоединения трёх предварительно разработанных и изготовленных печатных плат САН КА с целью выявления проблемных цепей [790, 791], а в

ходе занятий по дисциплине «ЭМС электрических сетей» вычисляют погонные параметры воздушной и кабельной линий электропередачи [792, 793]. Помимо этого, часть результатов работы (особенности математического моделирования и применения численных методов, а также решения СЛАУ и построения сетки) применительно к задачам моделирования ЭМС освещается в дисциплине «Вычислительная ЭМС» [794].

Также ранее принципы построения и алгоритмы прямых и итерационных методов решения СЛАУ легли в основу двух авторских лекций по дисциплине «Основы автоматизации проектирования радиоэлектронных устройств». Модуль матричных операций MATRIX в составе системы TALGAT использовался в лабораторной работе (по сравнению времени решения СЛАУ методом исключения Гаусса и итерационными методами BiCGStab и GMRES(m) с оптимизацией допуска обнуления) по дисциплине «Основы автоматизированного проектирования в сервисе». Детальное описание методов решения СЛАУ и особенностей их использования в системе TALGAT приведено в учебном методическом пособии «Использование методов решения СЛАУ» для студентов, проходящих групповое проектное обучение по направлению «Электромагнитная совместимость».

7.6.2 НИ ТГУ

Материалы диссертационной работы использованы в учебном процессе Национального исследовательского Томского государственного университета при преподавании дисциплины «Электромагнитная совместимость» для магистрантов по программе «Проектирование и конструирование промышленных космических систем». Так, при преподавании дисциплины «Электромагнитная совместимость» представлены результаты совершенствования анализа и оптимизации линейных антенн, многопроводных линий передачи и полосковых фильтров методом моментов, в части решения систем линейных алгебраических уравнений, а также их компьютерного моделирования.

7.7 Основные результаты раздела

Описано использование результатов работы при выполнении 7 НИР, 5 ОКР, 1 ПНИ, 1 НИОКТР и 1 инновационной программы, разработке новых устройств на основе МПЛП (на каждое из которых получен патент – 16 на изобретение и 4 на полезную модель) и в учебном процессе ТУСУРа и НИ ТГУ. В частности, результаты работы использованы в АО "ИСС" при создании КА Экспресс-АТ1, Экспресс-АТ2, Экспресс-80, Экспресс-103, Экспресс-АМУЗ,

Экспресс-АМУ7 и Экспресс-АМ8. Помимо этого, они использованы при анализе печатных плат и кабелей, разрабатываемых АО «НПЦ «Полюс», а также линейных антенн сети ведомственной связи МЧС России по Томской области. Таким образом, имеет место масштабное использование результатов работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования

Выполнен обширный обзор (более 600 источников) современного состояния проблемы математического моделирования радиоэлектронных средств. На его основе сформулированы цель и задачи исследования.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

Предложены 2 новых способа и 3 модификации известных способов алгебраической предфильтрации. Разработан параллельный алгоритм вычисления значений элементов матрицы СЛАУ с использованием графического ускорителя. Предложено 4 модификации алгоритма итерационного умягчения сетки при решении задач электростатики. Получены аналитические оценки коэффициента сжатия 3 форматов хранения разреженных матриц и выполнено их сравнение на тестовых задачах. Разработано 3 модификации алгоритма $LU(0)$ -разложения и его параллельная версия.

Разработаны алгоритмы для решения последовательности СЛАУ с изменяемой матрицей при анализе полосковых структур. Предложено учитывать специфику изменений в матрице для уменьшения затрат времени (ускорения) при использовании прямого и итерационных методов, а также их совместной реализации (гибридный метод). Так, для итерационных методов предложено 2 способа ускорения вычисления, а для повышения эффективности предобусловливателя предложены 3 условия его переформирования в ходе решения последовательности СЛАУ. Также разработаны алгоритмы многократного решения СЛАУ с выбором очередности их решения и матрицы для вычисления предобусловливателя. С использованием блочного LU -разложения разработаны алгоритмы многократного вычисления ёмкостной матрицы при изменении параметров структуры, аналогичные по точности с исходным алгоритмом. За счет обобщения результатов предложен гибридный метод вычисления. На основе полученных результатов предложены 3 математические модели для многократного вычисления ёмкостной матрицы (а также матрицы \mathbf{G}) полосковой структуры в диапазоне изменения её геометрических и электрофизических параметров.

Разработано 2 комплекса программ. Первый интегрирован в комплекс программ TALGAT путем совершенствования имеющихся и разработки новых его модулей. Второй комплекс предназначен для итерационного решения СЛАУ: однократного и многократного.

С использованием первого разработанного комплекса программ, на примере линейных антенн, выполнено сравнение 7 итерационных методов в сочетании с 5 способами формирования предобусловливания. Показано, что существует оптимальное значение допуска обнуления по критерию минимизации времени решения СЛАУ. На исследованных примерах выбор этого значения ускоряет решение по сравнению с методом Гаусса до 20 раз, а уменьшение заданной точности решения СЛАУ от 10 до 4 знаков ускоряет решение в 1,5 раза. Также показано, что за счет выбора способа предфильтрации можно добиться ускорения во времени решения СЛАУ на 40%. На примере 7 МППП выполнено исследование 4 модификаций метода для адаптивного построения сетки. Установлено, что одна из предложенных модификаций (АИВОС-У1) ускоряет процесс построения до 2,4 раза при точности контролируемой величины 0,24%, относительно равномерной сегментации. Также исследовано применение графического процессора для заполнения матрицы СЛАУ и показано, что на рассмотренных линиях передачи ускорение достигает 19 раз, относительно использования центрального процессора. Приведены рекомендации по построению сетки, формированию матрицы и использованию итерационных методов при решении СЛАУ с плотной матрицей на примере анализа линейных антенн и полосковых структур.

Показано, что при многократном решении СЛАУ с использованием блочного алгоритма при изменении относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика, увеличение количества вычисляемых ёмкостных матриц, а также отношения количества неизменяемых подынтервалов к их общему количеству, приводят к увеличению выигрыша времени при использовании предложенных модификаций исходного алгоритма. Это подтверждено на примере анализа соединителя СНП 339 и проводных отводов силовой шины электропитания, показавшего, выигрыш относительно исходного алгоритма более 18 раз. Точность алгоритма продемонстрирована на примере вычисления временного отклика в конце связанной микрополосковой линии с учётом частотной зависимости материала подложки. При этом полученные вычислительные оценки ускорения хорошо согласуются с аналитическими. При анализе трехмерных линий передачи показано, что ускорение достигает почти 13 раз, при той же точности вычислений (значений элементов ёмкостной матрицы). При использовании алгоритма для случая изменения геометрии структуры, показано, что ускорение достигает 15 раз. При этом использование перенумерации позволяет сократить затраты времени более чем в 2 раза относительно исходного алгоритма, основанного на полном пересчёте. Выполненные вычисления с использованием гибридного метода показали уменьшение затрат

времени до 25 раз относительно исходного алгоритма. Также показано, что предложенные алгоритмы применимы не только для многовариантного анализа, но и оптимизации.

С использованием второго комплекса программ выполнено исследование 3 предложенных модификаций алгоритма $LU(0)$ -разложения матрицы, хранящейся в разреженном строчном формате, а также параллельная версия этого алгоритма. На рассмотренных примерах общее ускорение вычисления $LU(0)$ -разложения достигает 5 раз, а решения СЛАУ – 4 раз. Также показано, что при больших плотностях матрицы предпочтительна параллельная версия алгоритма, а при малых – последовательная.

Показано, что при многократном решении СЛАУ с одной правой частью итерационным методом с одинаковым для всей последовательности предобусловливателем («замороженным»), для минимизации затрат времени предпочтительнее использовать решение предыдущей СЛАУ, по сравнению с фиксированным начальным приближением. Так, показано, что, при изменении относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика структуры, процесс вычисления может быть ускорен более чем в 49 раз по сравнению с использованием метода Гаусса. При изменении геометрии структуры эти приёмы ускоряют процесс вычисления относительно метода Гаусса до 12 раз. При этом максимальная погрешность значения ёмкости полоски составила около 0,001%. На примере линий передачи показано, что использование переформирования предобусловливателя по порогу количества итераций позволяет дополнительно ускорить её многовариантный анализ до 1,72 раза. На примере модальных фильтров использование среднего арифметического времени решения для переформирования предобусловливателя ускорило процесс вычисления относительно вычисления без переформирования до 1,6 раза. На примере микрополосковой линии передачи и 2 структур модальных фильтров, для 2 итерационных методов апробировано использование средней арифметической сложности решения для определения момента переформирования предобусловливателя. Показано, что многократное решение СЛАУ может быть ускорено до 1,6 раза, относительно аналогичного решения без переформирования предобусловливателя. Также показано, что только за счёт выбора очередности решения многократное решение СЛАУ может быть ускорено до 1,84 раза, а использование средней матрицы последовательности СЛАУ для вычисления предобусловливателя ускоряет её решение до 2,21 раза и, на рассмотренных примерах, не требует переформирования предобусловливателя. Также выполнена оценка работоспособности разработанных алгоритмов для итерационного решения последовательности СЛАУ с несколькими правыми частями на примере 2 структур модальных

фильтров. Показано, что использование метода BI-BiCGStab и предыдущего решения СЛАУ для начального приближения, ускоряет многократное решение СЛАУ более чем в 22 раза относительно решения СЛАУ с каждой правой частью отдельно методом BiCGStab с нулевым начальным приближением.

Результаты работы масштабно использованы: в ходе различных НИОКТР, на производстве, при разработке новых устройств и в учебном процессе 2 университетов.

Совокупность полученных результатов диссертационной работы позволяет считать, что её цель достигнута.

Рекомендации

При анализе линейных антенн, полосковых структур или многопроводных линий передачи при малых порядках СЛАУ (редкая сетка) предпочтение стоит отдать прямым методам решения СЛАУ, а при больших (частая сетка) – итерационным, что является общей рекомендацией. Для заполнения СЛАУ эффективным является использование графического процессора и методов адаптивного построения сетки. Использование итерационных методов решения СЛАУ при анализе линейных антенн, например, для оценки их диаграммы направленности, является эффективным средством повышения быстродействия, позволяющим при контролируемой погрешности вычисления получить приемлемую точность вычислений. Если особо критична точность контролируемого параметра, то процесс вычисления стоит итерационно повторить несколько раз при учащении сетки на каждой итерации, независимо от используемого метода решения СЛАУ. При этом для получения предварительных результатов предпочтение стоит отдать итерационному методу решения СЛАУ, который позволяет за счёт уменьшения точности существенно повысить быстродействие.

В случае моделирования в диапазоне параметров структуры, следует до начала вычислений оценить с помощью полученных выражений применимость алгоритмов блочного LU-разложения. Так, если изменяемых параметров оказывается много, то, скорее всего, предпочтительнее использовать полный пересчёт, и, наоборот, если изменения в матрице СЛАУ малы (изменяется малое количество параметров), то разработанные в работе методы и алгоритмы очень эффективны. При этом за счёт нумерации изменяемых подынтервалов последними, эффективность алгоритмов может быть дополнительно повышена. Ещё одним средством повышения быстродействия является использование разработанного гибридного метода, который при увеличении количества решаемых СЛАУ с изменяемой матрицей позволяет получить большее ускорение.

Для вычисления предобусловливателя при одновариантном анализе линейных антенн и полосковых структур эффективным является использование предфилтрации в сочетании с $ILU(0)$ -разложением, а при многовариантном – полного LU -разложения без предфилтрации. При этом с малой плотностью матрицы СЛАУ лучше использовать последовательную версию алгоритма $ILU(0)$ -разложения, а с большой – параллельную. При необходимости многократного решения СЛАУ, для формирования предобусловливателя целесообразно выбрать матрицу из середины решаемой последовательности СЛАУ (последующая последовательность решения остальных СЛАУ не имеет принципиального значения), а для условия его переформирования оценку – средней арифметической сложности решения. Это позволит существенно уменьшить время многовариантного анализа и оптимизации сложных структур с большим порядком матрицы СЛАУ.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Поскольку в данной работе рассмотрено математическое моделирование элементов радиоэлектронных средств с использованием метода моментов, целесообразно оценить применимость разработанных математических моделей и алгоритмов при анализе другим численным методом или при оптимизации генетическими алгоритмами. Это позволит обобщить полученные в данной работе результаты. Например, близким к методу моментов является метод эквивалентной схемы из частичных элементов, сводящий задачу анализа к решению СЛАУ с плотной матрицей. Помимо этого, следует оценить применимость разработанных алгоритмов многократного решения СЛАУ при оценке влияния температуры на параметры моделируемой структуры.

Другим направлением дальнейшей работы видится разработка новых способов корректировки и переформирования предобусловливателя применительно к многократному решению СЛАУ с плотной и частично изменяющейся матрицей.

Наконец, целесообразны работы по интеграции предложенных решений в различных САПР.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Кириллица

АИВОС – адаптивный итерационный выбор оптимальной сегментации

АПК – аппаратно-программный комплекс

БА – бортовая аппаратура

ВЧ – высокие частоты

ДН – диаграмма направленности

КА – космический аппарат

КРВО – метод конечных разностей во временной области

МВН – метод взвешенных невязок

МКЭ – метод конечных элементов

МПЛ – микрополосковая линия

МПЛП – многопроводная линия передачи

МФ – модальный фильтр

НИОКТР – научно-исследовательская, опытно-конструкторская и технологическая работа

НИР – научно-исследовательская работа

ОЗУ – оперативное запоминающее устройство

ОКР – опытно-конструкторская работа

ОСВЭ – оптимальная сеть высоковольтного (100 В) электропитания

ПЛИС – программируемая логическая интегральная схема

ПНИ – прикладное научное исследование

ПО – программное обеспечение

РВГ – Рао–Вильтон–Глиссон

РС – рабочая станция

РЭА – радиоэлектронная аппаратура

РЭС – радиоэлектронное средство

САН – система автономной навигации

САПР – система автоматизированного проектирования

СВЧ – сверхвысокие частоты

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

СКИ – сверхкороткий импульс

СНП – соединитель низкочастотный прямоугольный

СШЭП – силовая шина электропитания

ТЗ – техническое задание

УЭМ – унифицированный электронный модуль

ЭВМ – электронно-вычислительная машина

ЭДС – электродвижущая сила

ЭМС – электромагнитная совместимость

ЭЭ – эффективность экранирования

Латиница

AINV – approximate inverses, приближенный обратный

BiCG – biconjugate gradient, бисопряженный градиент

BiCGStab – biconjugate gradient stabilized, стабилизированный бисопряженный градиент

BLAS – basic linear algebra subprograms, базовые подпрограммы линейной алгебры

CDS – compressed diagonal storage, сжатый диагональный формат

CG – conjugate gradient, сопряженный градиент

CGS – conjugate gradient squared, сопряженный градиент квадратичный

CPU – central processing unit, центральный процессор

CSC – compressed column storage, разреженный столбцовый формат

CSR – compressed row storage, разреженный строчный формат

CUDA – compute unified device architecture, программно-аппаратная архитектура параллельных вычислений

DHTML – dynamic hypertext markup language, динамический язык гипертекстовой разметки

EFIE – electric field integral equation, интегральное уравнение для электрического поля

FDTD – finite difference time domain, метод конечных разностей во временной области

FEM – finite element method, метод конечных элементов

FIT – finite integration technique, метод конечного интегрирования

FMM – fast multipole method, быстрый метод мультиполей

FSAI – factorized sparse approximate inverses, факторизованный разреженный приближенно обратный

FSV – feature selective validation, валидации выделением особенностей

GMRES – generalized minimal residual, обобщенная минимальная невязка

GO – geometrical optics, геометрическая оптика

GPU – graphics processing unit, графический процессор

GTD – geometrical theory of diffraction, геометрическая теория дифракции

ILU – incomplete LU factorization, неполное LU-разложение

ILUT – incomplete LU factorization with treshold, неполное LU-разложение с порогом

JDS – jagged diagonal storage, неравномерный диагональный формат

LE-PO – large element– physical optics, метод физической оптики для укрупненной сетки

MFIE – magnetic field integral equation, интегральное уравнение для магнитного поля

MLFMM – multilevel fast multipole method, многоуровневый быстрый метод мультиполей

MoM – method of moments, метод моментов

MPI – message passing interface, интерфейс передачи сообщений

MSR – modified sparse row, модифицированный разреженный строчный формат

MSS – multilevel subgridding scheme, многоуровневая схема подсеток

MSVS – Microsoft Visual Studio, интегрированная среда разработки

PBA – perfect boundary approximation, идеальная аппроксимация границ

PEEC – partial element equivalent circuit method, метод эквивалентной схемы из частичных элементов

PO – physical optics, физическая оптика

QML – Qt meta-object language, декларативный язык программирования

QMR – quasi-minimal residual, квазиминимальные невязки

RL-GO – ray launching–geometrical optics, геометрическая оптика с лучевым приближением

RWG – Rao–Wilton–Glisson, Рао–Вильтон–Глиссон

SAINV – sparse approximate inverse, разреженный приближенно обратный

SBCRS – sparse block compressed row storage, разреженный блочный строчный формат

SPAI – sparse approximate inverse, разреженный приближенный обратный

SPMR – self-preconditioned minimal residual, минимальных невязок с самопредобуславливанием

SSE – Streaming SIMD extensions, потоковые SIMD-расширения

SSK – symmetric skyline format, симметричный скайлайн формат

TEM – transverse electromagnetic, поперечная электромагнитная

TLM – transmission line matrix, метод матрицы линии передачи

TST – thin sheet technique, метод тонких стенок

UTD – uniform theory of diffraction, однородная теория дифракции

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагирная, А.В. Принципы развития глобального информационного пространства // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 6-6. – С. 1462–1467.
2. Волин, М.Л. Паразитные процессы в радиоэлектронной аппаратуре. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1981. – 296 с.
3. Уайт, Д. Электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств и непреднамеренные помехи: Внутрисистемные помехи и методы их уменьшения: пер. с англ. – М.: Сов. радио, 1978. – Вып. 2. – 272 с.
4. Юхно, П.М. Преднамеренные оптические помехи высокоточному оружию. – М.: Радиотехника, 2017. – 640 с.
5. Газизов, Т.Р. Электромагнитная совместимость: преднамеренные силовые электромагнитные воздействия: учеб. пособие / Т.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2018. – 114 с.
6. Курейчик, В.М. Математическое обеспечение конструкторского и технологического проектирования с применением САПР: учебник. – М.: Радио и связь, 1990. – 352 с.
7. Постановление Правительства РФ от 12.10.2004 N 539 (ред. от 22.12.2018) «О порядке регистрации радиоэлектронных средств и высокочастотных устройств».
8. Федеральный закон от 07.07.2003 N 126-ФЗ (ред. от 27.12.2018) «О связи».
9. Ефанов, В.И. Электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств и систем: учебное пособие / В.И. Ефанов, А.А. Тихомиров. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 228 с.
10. ГОСТ Р 52003-2003. Уровни разукрупнения радиоэлектронных средств. Термины и определения.
11. Ненашев, А.П. Конструирование радиоэлектронных средств: учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1990. – 432 с.
12. Перунов, Ю.М. Зарубежные радиоэлектронные средства / Ю.М. Перунов, В.В. Мацукевич, А.А. Васильев; под ред. Ю.М. Перунова. В 4 кн. Кн. 1: Радиолокационные системы. – 336 с. Кн. 2: Системы радиоэлектронной борьбы. – 352 с. Кн. 3: Антенны. – 304 с. – М.: Радиотехника, 2010.
13. Гупта, К. Машинное проектирование СВЧ устройств / К. Гупта, Р. Гардж, Р. Чадха. – М.: Радио и связь, 1987. – 428 с.
14. Автоматизированное проектирование узлов и блоков РЭС средствами современных САПР: учеб. пособие для студ. вузов / И.Г. Мироненко, В.Ю. Суходольский, К.К. Холуянов и др.; под ред. И.Г. Мироненко. – М.: Высшая шк., 2002. – 391с.
15. Борисов, Ю.П. Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств / Ю.П. Борисов, В.В. Цветнов. – М.: Радио и связь, 1985. – 176 с.
16. Норенков, И.П. Основы автоматизированного проектирования: учебник для вузов / И.П. Норенков. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 434 с.
17. Smith, J.M. Mathematical modeling and digital simulation for engineers and scientists. – 2nd ed. – New York/Chichester: Wiley, 1987. – 430 p.
18. Фуско, В. СВЧ-цепи. Анализ и автоматизированное проектирование: пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
19. Ли, К. Основы САПР CAD/CAM/CAE. – СПб. и др.: Питер, 2004. – 559 с.

20. Копылов, Ю.Р. Актуальные направления разработки и совершенствования САПР технологических процессов систем / Ю.Р. Копылов, Е.П. Гордиенко // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – № 112. – С. 26–28.
21. Муромцев, Д.Ю. Математическое обеспечение САПР: учебное пособие / Д.Ю. Муромцев, И.В. Тюрин. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – СПб.: Лань, 2014. – 464 с.
22. Автоматизированная система Асоника для проектирования высоконадежных радиоэлектронных средств на принципах CALS-технологий. Т. 1 / Под ред. Ю.Н. Кофанова, Н.В. Малютина, А.С. Шалумова. – М: Энергоатомиздат, 2007. – 368 с.
23. Клыков, А.В. Возможности компьютерного моделирования при решении задач электромагнитной совместимости бортовых кабельных сетей самолетов / А.В. Клыков, В.Ю. Кириллов // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2012. – №57. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=30760>.
24. Кечиев, Л.Н. Проектирование печатных плат для цифровой быстродействующей аппаратуры / Л.Н. Кечиев. – М.: Издательский дом «Технологии», 2007. – 616 с.
25. Головков, А.А. Компьютерное моделирование и проектирование радиоэлектронных средств / Головков А.А., Пивоваров И.Ю., Кузнецов И.Р. – СПб.: Питер, 2015. – 208 с.
26. Буравцев, И.Е. Разработка комплексной электронной модели радиоэлектронных средств с учетом дестабилизирующих факторов: Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.12. Киров, 2005. – 137 с.
27. Томилин, М.М. Разработка методики проектирования экранов бортовых кабелей космических аппаратов для обеспечения помехозащищенности при воздействии электростатических разрядов. Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.05. Москва, 2011. – 180 с.
28. Кириллов, В.Ю. Моделирование воздействия мощных электромагнитных помех на электротехнический комплекс самолета / В.Ю. Кириллов, А.В. Клыков, В.Х. Нгуен // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2013. – №71. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=46550>.
29. Кириллов, В.Ю. Воздействие преднамеренных электромагнитных помех на бортовые кабели космических аппаратов / Кириллов В.Ю., Томилин М.М. // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2013. – №66. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=40836>.
30. Иванов В.А. Модельные и стендовые исследования электризации космических аппаратов / В.А. Иванов, В.Ю. Кириллов, Е.П. Морозов; под ред. В.Ю. Кириллова – М.: МАИ, 2012. – 168 с.
31. Кравченко, В.И. Радиоэлектронные средства и мощные электромагнитные помехи / В.И. Кравченко, Е.А. Болотов, Н.И. Летунова; под. ред. В.И. Кравченко. – М.: Радио и связь, 1987. – 256 с.
32. Князев, А.Д. Конструирование радиоэлектронной и электронно-вычислительной аппаратуры с учетом электромагнитной совместимости / А.Д. Князев, Л.Н. Кечиев, Б.В. Петров. – М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.
33. Управление радиочастотным спектром и электромагнитная совместимость радиосистем / Бузов А.Л., Быховский М.А., Васехо Н.В. и др.; под ред. М.А. Быховского. – М.: Эко-Трендз, 2006. – 376 с.
34. Отт, Г. Методы подавления шумов и помех в электронных системах. – М.: Мир, 1979. – 318 с.
35. Уилльямс, Т. ЭМС для разработчиков. – М.: Издательский дом «Технологии», 2003. – 540 с.
36. Неганов, В.А. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн: учеб. пособие для вузов / В.А. Неганов, Е.И. Нефедов, Г.П. Яровой; под ред. Неганова В.А. – М.: Радио и связь, 2002. – 415 с.

37. Конструирование экранов и СВЧ-устройств: учебник для вузов/ А.М. Чернушенко, Б.В. Петров, Л.Г. Малорацкий и др.; под ред. А.М. Чернушенко. – М.: Радио и связь, 1990. – 352 с.
38. Устройства СВЧ и антенны: учебник для вузов / Д.И. Воскресенский, В.Л. Гостюхин, В.М. Максимов, Л.И. Пономарев; под ред. Д.И. Воскресенского. – Изд. 2-е. – М.: Радиотехника, 2006. – 375 с.
39. Garg, R. Microstrip lines and slotlines / R. Garg, I. Bahl, M. Bozzi. – 3rd ed. – Boston/London: Artech House, 2013. – 560 p.
40. Saxena, A. Computer aided engineering design / A. Saxena, B. Sahay. – New Delhi: Springer, 2005. – 393 p.
41. Банков, С.Е. Электродинамика для пользователей САПР СВЧ / С.Е. Банков, А.А. Курушин. – М.: Солон-Пресс, 2017. – 316 с.
42. Банков, С.Е. История САПР СВЧ (1950-2010) / С.Е. Банков, А.А. Курушин. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 100 с.
43. Автоматизированное проектирование антенн и устройств СВЧ: учеб. пособие для радиотехн. спец. вузов / Д.И. Воскресенский, С.Д. Кременецкий, А.Ю. Гринев, Ю.В. Котов. – М.: Радио и связь, 1988. – 239 с.
44. Самарский, А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.
45. Баскаков, С.И. Электродинамика и распространение радиоволн / С.И. Баскаков. – М.: Высшая школа, 1992. – 416 с.
46. Bermúdez, A. Mathematical models and numerical simulation in electromagnetism / A. Bermúdez, D. Gómez, P. Salgado. – Cham/Heidelberg/New York/Dordrecht/London: Springer, 2014. – 432 p.
47. Григорьев, А.Д. Методы вычислительной электродинамики. – М.: Физматлит, 2013. – 430 с.
48. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: «Научный мир», 2003. – 316 с.
49. Altair FEKO [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.altair.com, свободный (дата обращения: 31.01.2019).
50. Maiti, S.K. Computer aided design of micro- and nanoelectronic devices.– Singapore: World Scientific Publishing Company, 2016. – 455 p.
51. Нестеров, И.А. Моделирование задачи низкоорбитальной спутниковой УФ-томографии ионосферы / И.А. Нестеров, А.М. Падохин, Е.С. Андреева, С.А. Калашникова // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. – 2016. – №3. – С. 90–99.
52. Хашимов, А.Б. Применение вычислительных схем повышенной точности в проектировании антенных систем / А.Б. Хашимов, Р.Р. Салихов, Р.С. Альметов // Вестник ЮУрГУ. Серия вычислительная математика и информатика. – 2014. – Т. 3, № 2. – С. 77–91.
53. Heath, M.T. Scientific computing: an introductory survey. – Boston: McGraw-Hill, 2002. – 2nd ed. – 563 p.
54. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
55. Тихонов, А.Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1980. – Т. 20, № 6. – С. 1373–1383.
56. Жданов, А.И. Введение в методы решения некорректных задач: учеб. пособие. – Изд-во Самарского гос. аэрокосмического ун-та, 2006. – 87 с.
57. Chen, W.-K. Computer aided design and design automatio. – 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2009. – 435 p.

58. Rashid, M.H. SPICE for power electronics and electric power / M.H. Rashid, H.M. Rashid. – 2nd. – Boca Raton: CRC Press, 2006. – 530 p.
59. Заболоцкий, А.М. Модели, алгоритмы, методики, технологии и устройства для обеспечения электромагнитной совместимости бортовой радиоэлектронной аппаратуры космического аппарата. Дисс. на соиск. уч. ст. доктора. техн. наук: 05.12.04. – Томск, 2016. – 481 с.
60. Никольский, В.В. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ / В.В. Никольский, В.П. Орлов, В.Г. Феоктистов; под ред. В.В. Никольского. – М.: Радио и связь, 1982. – 272 с.
61. Нефедов, Е.И. Полосковые линии передачи / Е.И. Нефедов, А.Т. Фиалковский. – М.: Наука, 1980. – 312 с.
62. Фальчаков, П.Ф. Приближенные методы конформных отображений: спр. руководство. – Киев: Наукова думка, 1964. – 523 с.
63. Гринев, А.Ю. Численные методы решения прикладных задач электродинамики. – М.:Физматлит, 2012. – 336 с.
64. Сабоннадьер, Ж.-К. Метод конечных элементов и САПР / Ж.-К. Сабоннадьер, Ж.-Л. Кулон: пер. с франц. В.А. Соколова, М.Б. Блеер; под ред. Э.К. Стрельбицкого. – М.: Мир, 1989. – 190 с.
65. Сычев, А.Н. Комбинированный метод частичных емкостей и конформных отображений для анализа многомодовых полосковых структур. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 138 с.
66. Maiti, S.K. Introducing technology computer-aided design (TCAD): fundamentals, simulations, and applications. – Temasek Boulevard: Pan Stanford publ. – 2017. – 421 p.
67. Громадка, Т. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах: пер. с англ. / Т. Громадка, Ч.Лей. – М.: Мир, 1990. – 303 с.
68. Garg, R. Analytical and computational methods in electromagnetics. – Norwood: Artech House, 2008. – 528 p.
69. Paul, C.R. Transmission lines in digital systems for EMC practitioners. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons. – 2012. – 270 p.
70. Алексеев, О.В. Автоматизация проектирования радиоэлектронных средств: учеб. пособие / О.В. Алексеев, А.А. Головкин, И.Ю. Пивоваров и др.; под ред. О.В. Алексеева. – М.: Высш.шк., 2000. – 479 с.
71. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
72. Йоссель, Ю.Я. Расчет электрической емкости / Ю.Я. Йоссель, Э.С. Кочанов, М.Г. Струнский. – Изд. 2-е. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 288 с.
73. Калантаров, П.Л. Расчет индуктивностей / П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 488 с.
74. Аполлонский, С.М. Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике. – СПб.: Питер, 2012. – 352 с.
75. Гизатулин, З.М. Помехоустойчивость средств вычислительной техники внутри здания при широкополосных электромагнитных воздействиях. Дисс. на соиск. уч. ст. доктора. техн. наук: 05.13.05. – Казань, 2016. – 382 с.
76. Связанные полосковые линии и устройства на их основе / Н.Д. Малютин, А.Н. Сычев, Э.В. Семенов, А.Г. Лощилов. – Томск: ТУСУР, 2012. – В 2-х частях: Ч.1 – 176 с. Ч.2 – 244 с.

77. Стручков, С.М. Методика конформных отображений для моделирования полосковых линий передачи и проектирование устройств на их основе. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук: 05.12.07. – Томск, 2016. – 148 с.
78. Nie, B.-L. An improved circuit method for the prediction of shielding effectiveness of an enclosure with apertures excited by a plane wave / B.-L. Nie, Du P.-A., P. Xiao // *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility*. – 2018. – Vol. 60, no. 5. – P. 1376–1383.
79. Swanson, D.G. Microwave circuit modeling using electromagnetic field simulation / D.G. Swanson, W.J. Hofer. – Norwood: Artech House Publishers, 2003. – 474 p.
80. Ruehli, A.E. Electromagnetic compatibility modeling techniques: past, present and future / A.E. Ruehli, E. Miersch // *19th International Zurich symposium on electromagnetic compatibility*. – Zurich, 2008. – P. 1–4.
81. IEEE Std 1597.1–2008. Standard for validation of computational electromagnetics computer modeling and simulation. Part 1, 2. – IEEE Standard, 2008. – 41 p.
82. IEEE Std 1597.2–2010. Recommended practice for validation of computational electromagnetics computer modeling and simulations. – IEEE Standard, 2010. – 124 p.
83. Jakobus, U. Aspects of and insights into the rigorous validation, verification, and testing processes for a commercial electromagnetic field solver package / U. Jakobus, R.G. Marchand, D.J. Ludick // *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility*. – 2014. – Vol. 56, no. 4. – P. 759–770.
84. Lessons from applying IEEE standard 1597 for validation of computational electromagnetics computer modeling and simulations / S. Park, M. Kotzev, H.D.D. Bruns, et al. // *IEEE Electromagnetic compatibility magazine*. – 2017. – Vol. 6, no. 2. – P. 55–67.
85. Development of next generation FSV tools and standards / A.L. Drozd, B. Archambeault, A. Duffy, et al. // *IEEE International symposium on electromagnetic compatibility*. – Pittsburgh, USA, 2012. – P. 647–648.
86. Geng, Y. Research on FSV in membership function credibility verification – for system performance evaluation / Y. Geng, T. Jiang, X. Zhang // *Proc. of progress in electromagnetic research symposium (PIERS)*. – Shanghai, China, 2016. – P. 4723–4727.
87. Харрингтон, Р.Ф. Применение матричных методов к задачам теории поля // *Труды института инженеров по электронике и радиотехнике*. – 1967. – № 2. – С. 5–19.
88. Митра, Р. Вычислительные методы в электродинамике. – М.: Мир, 1977. – 487 с.
89. Harrington, R.F. Field computation by moment methods. – USA, NY: Macmillan, 1968. – 240 p.
90. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел; под ред. Э.И. Григолюк. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
91. Gibson, WC. The method of moments in electromagnetics. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC; 2008. – 272 p.
92. Crandall, S.H. Engineering analysis. – New York: McGraw-Hill, 1956. – 151 p.
93. Ames, W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. – New York: Academic Press, 1965. – 305 p.
94. Finlayson, B.A. The method of weighted residuals and variational principles. – New York: Academic Press, 1972. – 412 p.
95. Finlayson, A. The method of weighted residuals: a review / A. Finlayson, L.E. Scriven // *Applied mechanics reviews*. – 1966. – Vol. 19. – P. 735–748.
96. Афендикова, Н.Г. История метода Галеркина и его роль в творчестве М.В. Келдыша // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. – 2014. – № 77. – 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-77>.
97. Young, L. Orthogonal collocation revisited // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 2019. – Vol. 345, no. 1. – P. 1033–1076.
98. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

99. Lucka T.F. Development of direct methods in mathematical physics in the works of M. P. Kravchuk / T.F. Lucka, A.Y. Lucka // *Ukrainian mathematical journal*. – 1992. – Vol. 44, no. 7. – P. 931–939.
100. Самокиш, Б.А. Л.В.Канторович и вычислительная математика // *Журнал новой экономической ассоциации*. – 2012. – Т.13, №1. – С.181–185.
101. Кутателадзе, С.С. Научное наследие Л. В. Канторовича (1912–1986) / С.С. Кутателадзе, В.Л. Макаров, И.В. Романовский // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2001. – Т.4, №2. – С. 3–17.
102. Галеркин, Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок // *Вестник инженеров*. – 1915. – Т.1. – С. 897–908.
103. Karman, T. Uber laminare und turbulente Reibung // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 1921. – Vol. 1, no. 4. – P. 233–252.
104. Pohlhausen, E. Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 1921. – Vol. 1, no. 2. – P. 115–121.
105. Biezeno, C.B. Over een Nieuwe Methode ter Berekening van Vlokke Platen / C.B. Biezeno, J.J. Koch // *De ingenieur*. – 1923. – Vol. 38. – P. 25–36.
106. Kryloff [Krylov], N. On a method of approximate integration for which the Ritz method as well as the method of least squares are special cases // *Comptes rendus mathématique academie des sciences*. – 1926. – Vol. 182. – P. 676–678.
107. Picone, M. Sul metodo delle minime potenze ponderate e sulmetodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi dellafisica-matematica // *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*. – 1928. – Vol. 52. – P. 225–253.
108. Kryloff, N.M. Les méthodes de résolution approchee des problèmes de la physique methématique. – Paris: Gauthier-Villars, 1931. – 71 p.
109. Кравчук, М.Ф. О методе Крылова в теории приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // *Труды Физ.-мат.отдел. ВУАН*, – 1926. – Vol. 5, no. 2. – P. 12–33. (на украинском)
110. Кравчук, М.Ф. Метод наименьших квадратов и метод моментов в теории приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // *Вестник Киевского политехнического института*. – 1928. – Т. 1. – С. 11–17. (на украинском)
111. Кравчук, М.Ф. Применение метода моментов для решения линейных дифференциальных уравнений // *Сообщения АН УССР*. – 1932. – Т. 1. – 168 с. (на украинском)
112. Канторович, Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // *Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук*. – 1933. – № 5. – С. 647–652.
113. Канторович, Л.В. Применение теории интегралов Стильеса к расчету балки, лежащей на упругом основании // *Труды Ленинградского Института промышленного строительства*. – 1934. – Вып. 1. – С. 17–34.
114. Frazer, R.A. (1937). Approximations to Functions and to the Solutions of Differential Equations / R.A. Frazer, W.P. Jones, S.V. Skan // *Great Britain Air Ministry Aero, technical report*. – Vol. 1. – P. 517-549.
115. Репман, Ю.В. К вопросу математического основания метода Галеркина решения задач об устойчивости упругих систем // *Прикладная математика и механика*. – 1940. – Т. 4, вып. 2. – С. 3–6.
116. Петров, Г.И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // *Прикладная математика и механика*. – 1940. – Т. 4, вып. 3. – С. 3–11.
117. Келдыш, М.В. О методе Б.Г. Галеркина для решения краевых задач // *Известия АН СССР, серия. Математика*. – 1942. – Т.6. – С. 309–330.

118. Yamada, H. A method of approximate integration of the laminar boundary-layer equation. Reprint of research Institute of fluids engineering, Kyushu university. – 1947. – Vol. 2, no. 29.
119. Михлин, С.Г. О сходимости метода Галеркина // Доклады АН СССР. – 1948. – Т. 61, №2. – С. 197–200.
120. Faedo, S. Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitative dei problemi di propagazione // Ann. Scuola Norm. sup. Pisa. – 1949. – P. 1–40.
121. Green, J.W. An expansion method for parabolic partial differential equations // Journal of research of the national bureau of standards. – 1953. – Vol. 51. – P. 127–132.
122. Davidson, D.B. Computational electromagnetics for RF and microwave engineering. – Cambridge: University Press, 2011. – 505 p.
123. Rylander, T. Computational electromagnetics / T. Rylander, P. Ingelström, A. Bondeson. – New York: Springer, 2013. – 286 p.
124. Канторович, А.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / А.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматлит, 1959. – 684 с.
125. Rao, S. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape / S. Rao, D. Wilton, A. Glisson // IEEE Transactions on antennas and propagation – 1982. – Vol. 30, no. 3. – P. 409–418.
126. Makarov, S.N. Antenna and EM modeling with MATLAB. – New York: John Wiley & Sons, 2002. – 288 p.
127. Жобава, Р.Г. Адаптивная схема метода моментов в применении к задачам электромагнитной совместимости. // EDA Express. – 2005. – №12. – С. 14–19.
128. Добуш, И.М. Компьютерный электромагнитный анализ металлического корпуса с щелями / И.М. Добуш, К.С. Дмитриенко, С.П. Куксенко // Материалы докладов Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2008». – Томск, 2008. – Т. 1. – С. 54–57.
129. Harrington, R.F. Matrix methods for field problems // IEEE Proceedings. – 1967. – No. 2. – P. 136–149.
130. Mei, K.K. On the integral equations of thin wire antennas // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1965. – Vol. AP-13. – P. 374–378.
131. Tang, C.H. Input impedance of arc antennas and short helical radiators // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1963. – Vol. AP-12. – P. 2–9.
132. Неганов, В.А.. Новое интегральное уравнение для расчета тонкого электрического вибратора / В.А. Неганов, М.Г. Корнев, И.В. Матвеев // Письма в Журнал технической физики. – 2001. – Т. 27, вып. 4. – С. 62–71.
133. Газизов, Т.Т. Методология, алгоритмы и программное обеспечение для комплексной оптимизации элементов радиоэлектронных устройств. Дисс. на соиск. уч. ст. доктора техн. наук: 05.13.18. – Томск, 2017. – 277 с.
134. Nie, Z. Analysis of wire antennas mounted on large perfectly conducting platforms using MLFMA / Z. Nie, X. Que // Journal of systems engineering and electronics. – 2007. – Vol. 18, no. 4. – P. 679–684.
135. Лоцилов, А.Г. Алгоритм решения внутренней задачи расчёта параметров комбинированных антенн ДКМВ–диапазона / А.Г. Лоцилов, Н.Д. Малютин // Материалы Международной научно–практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск: Изд. Института оптики атмосферы СО РАН. – 2004. – С. 99–101.
136. Cui, T.J. Accurate model of arbitrary wire antennas in free space, above or inside ground / T.J. Cui, W.C. Chew // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 2000. – Vol. 48, no. 4. – P. 482–493.

137. Пименов, А.С. Вейвлет-анализ в численном моделировании тонкопроволочных антенн // Вестник СамГУ. – 2006. – №2. – С. 44–61.
138. Altman, Z. New designs of ultra wide-band communication antennas using a genetic algorithm / Z. Altman, R. Mittra, A. Boag // IEEE Transactions antennas and propagation. – 1997. – Vol. 45, no. 10. – P. 1494–1501.
139. Altshuler, E.E. Wire-antenna designs using genetic algorithms / E.E. Altshuler, D.S. Linden // IEEE Transactions antennas and propagation. – 1997. – Vol. 39, no. 2. – P. 33–43.
140. Медведев, С.В. Электродинамическая теория тонкого электрического вибратора: Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук: 01.04.03. – Самара, 2001. – 129 с.
141. Каймонов, О.С. Новый подход к обеспечению бесперебойной кв-радиосвязи в системе МЧС России / О.С. Каймонов, Т.Т. Газизов // Материалы XI международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск: В-Спектр. – 2015. – Ч. 2. – С. 30–33.
142. Balanis, C.A. Antenna theory: analysis and design. – 3rd ed. – New York: John Wiley & Sons. – 2005. – 1097 p.
143. РД 153-34.0-20.525-00. Методические указания по контролю состояния заземляющих устройств электроустановок.
144. Электромагнитная совместимость и молниезащита в электроэнергетике: учебник для вузов / А.Ф. Дьяков, Б.К. Максимов, Р.К. Борисов, И.П. Кужекин, А.Г. Темников, А.В. Жуков; под ред. чл.-корр. РАН, докт. техн. наук, проф. А.Ф. Дьякова. – М.: Издательский дом МЭИ, 2016. – 543 с.
145. Schantz, H.G. The art and science of ultrawideband antennas. – 2nd ed. – Boston, London: Artech House, 2015. – 591 p.
146. Stutzman, W.L. Antenna theory and design / W.L. Stutzman, G.A. Thiele. – John Wiley & Sons, 2001. – 598 p.
147. 4nec2 antenna modeler and optimizer [электронный ресурс]. Режим доступа: www.qsl.net/4nec2/, свободный (дата обращения 04.02.19).
148. Pocklington, H.C. Electrical oscillations in wires // Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society. – 1897. – No. 9. – P. 324–332.
149. Hallen, E. Theoretical investigation into the transmitting and receiving qualities of antennas // Nova Acta (Uppsala). – 1938. – No. 11. – P. 1-44.
150. Levin, B.M. The theory of thin antennas and its use in antenna engineering. – Bentham Science Publ., 2013. – 318 p.
151. Кинг, Р. Антенны в материальных средах / Р. Кинг, Г. Смит. В 2-х кн.: пер. с англ./ под ред. Б.В. Штейншлейгера. – М.: Мир, 1984. – 824с.
152. Richmond, J.H. Digital computer solution of the rigorous equations for scattering problems // Proceeding of the IEEE. – 1965. – Vol. 53, no. 3. – P. 796–804.
153. Назаров, В.Е. Численное решение задач об основных характеристиках и параметрах сложных проволочных антенн / В.Е. Назаров, А.В. Рунов, В.Е. Подиниогин // Радиотехника и электроника. – 1976. – Вып.6. – С. 153–157.
154. Стрижков, В.А. Математическое моделирование электрических процессов в проволочных антенных системах // Математическое моделирование. – 1989. – Т.1, № 38. – С. 127–138.
155. Эминов, С.И. Теория интегрального уравнения тонкого вибратора // Радиотехника и электроника. – 1993. – Т.38, вып.12. – С. 2160–2168.
156. Werner, D.H. Some computational aspects of Pocklington electric field integral equation for thin wires / D.H. Werner, P.L. Werner, J.K. Breakall // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1994. – Vol. 42, no. 4. – P. 561–563.

157. Kraus, J.D. Antennas for all applications / J.D. Kraus, R.J. Marhefka. – 3rd ed. – New Delhi: McGraw-Hill, 2006. – 892 p.
158. Семенов, Н.А. Техническая электродинамика: учебное пособие для вузов. – М.: Связь, 1973. – 480 с.
159. Balanis, C.A. Advanced engineering electromagnetics. – 2nd ed. – New York: John Wiley & Sons, 2012. – 1040 p.
160. Сазонов, Д.М. Антенны и устройства СВЧ: учебник для радиотехнических специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1988. – 432с.
161. Самарский, А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982. – 271 с.
162. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1966. – 228 с.
163. Jackson, J.D. Classical electrodynamics. – New York: John Wiley & Sons, 1962. – 641 p.
164. Ramo, S. Fields and waves in communication electronics / S. Ramo, J.R. Whinnery, T. van Duzer. – 3rd ed. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 1994. – 844 p.
165. Suvire, G.O. Wind farm – impact in power system and alternatives to improve the integration. – Rijeka: InTech, 2011. – 330 p.
166. Patsiuk, V. Calculation of the magnetic fields of the electric power line / V. Patsiuk, V. Berzan, G. Rybacova // Problems of the regional energetics. – 2016. – Vol. 32, no. 3. – P. 15–26.
167. Menshov, A. Modeling of arbitrary shaped cables using novel single source integral equation formulation / A. Menshov, V. Okhmatovski, J. de Silva, A. Kariyawasam, J.E. Nordstrom // Proceedings of International conference on power systems transients. – 2015. – P. 1–6.
168. Рыжов, Ю.П. Дальние электропередачи сверхвысокого напряжения. – М.: МЭИ, 2007. – 488 с.
169. Tesche, F.M. EMC Analysis methods and computational models / F.M. Tesche, M. Ianoz, T. Karlsson. – New York: Wiley-Interscience, 1996. – 656 p.
170. Медведев, А.М. Технология производства печатных плат. – М.: Техносфера, 2005. – 360 с.
171. Медведев, А.М. Печатные платы. Конструкции и материалы. – М.: Техносфера, 2005. – 304 с.
172. Kikkert, J. A design technique for microstrip filters // 2nd International conference on signal processing and communication systems, (ICSPCS 2008). – Gold Coast, Australia, 2008. – P. 1–5.
173. Новая конструкция миниатюрного фильтра на микрополосковых резонаторах со встречно-штыревой структурой проводников / Б.А. Беляев, А.М.Сержантов, Я.Ф. Бальва, Ан. А. Лексиков, Р.Г. Галеев // Письма в Журнал технической физики. – 2015. – №10. – С. 89–96.
174. Guang-Hwa, S. Analysis and design of crosstalk noise reduction for coupled striplines inserted guard trace with an open-stub on time-domain in high-speed digital circuits / S. Guang-Hwa, S. Jia-Hung, C. Po-Wei // IEEE Transactions on components, packaging and manufacturing. – 2011. – Vol. 1, no. 10. – P. 1537–1582.
175. Accurate design methodology to prevent crosstalk / C.H. Chen, W.T. Huang, Chou C.T., et al. // Electronics letters. – 2007. – Vol. 43, no. 3. – P. 149–150.
176. Gong, K. Phase velocity lines for low crosstalk microstrip interconnection of high-speed digital circuits: design and experimental validation / K. Gong, Z. Du, G. Yan // IEEE Transactions on electromagnetic compatibility. – 2006. – Vol. 48, no. 1. – P. 95–103.
177. Serpentine guard trace to reduce the far-end crosstalk voltage and the crosstalk induced timing jitter of parallel microstrip lines / H.K. Jung, H.J. Park, H.B. Lee, et al. // IEEE Transactions on advanced packaging. – 2008. – Vol. 3, no. 4. – P. 809–817.
178. Газизов, Т.Р. Модальный фильтр как устройство защиты бортовых вычислителей и блоков управления космических аппаратов от электростатического разряда / Т.Р. Газизов,

- Е.С. Долганов, А.М. Заболоцкий // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2012. – Т. 55, № 3. – С. 39–43.
179. Широкополосные дискретные недисперсионные фазовращатели на основе эффекта кратного изменения фазовой скорости в многосвязных полосковых структурах с существенно неуравновешенной электромагнитной связью при сохранении согласования в широкой полосе частот / Н.Д. Малютин, А.Г. Лоцилов, В.Н. Федоров, и др. // Доклады ТУСУР. – 2014. – № 4(34). – С. 22–30.
180. Herscovici, N. A new consideration in the design of microstrip antennas // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1998. – Vol. 46, no. 12. – P. 807–812.
181. Dispersive delay line with effective transmission-type operation in coupled-line technology / A. Lujambio, I. Arnedo, M. Chudzik, et al. // Microwave and wireless components letters. – 2011. – Vol. 21. – P. 459–461.
182. Young, B. Digital signal integrity: Modeling and simulation with interconnects and packages // New Jersey: Prentice–Hall, 2000. – 560 p.
183. Yu, W. Advanced field-solver techniques for RC extraction of integrated circuits / W. Yu, X. Wang. – Berlin, Heidelberg: Beijing and Springer-Verlag, 2014. – 246 p.
184. Заболоцкий, А.М. Временной отклик многопроводных линий передачи / А.М. Заболоцкий, Т.Р. Газизов. – Томск: Томский государственный университет, 2007. – 152 с.
185. Bhatti, A.A. A computer based method for computing the N-dimensional generalized ABCD parameter matrices of N-dimensional systems with distributed parameters. // The twenty-second southeastern symposium on system theory. – Cookeville, USA, 1990. – P. 590–593.
186. Tuncer, E. Extraction of parameters for high speed digital interconnects // Ph.D. dissertation, department of electrical and computer engineering, Austin, USA, 1995. – 188 p.
187. Shafieipour, M. Fast computation of the electrical parameters of sector-shaped cables using single-source integral equation and 2D moment-method discretization / M. Shafieipour, J. de Silva, A. Kariyawasam, A. Menshov, V. Okhmatovski // Proceeding of International conference on power systems transients (IPST). – 2017. – P. 1–6.
188. Djordjevic, A.R. Analysis of finite conductivity cylindrical conductors excited by axially-independent TM electromagnetic field / A.R. Djordjevic, T.K. Sarkar, S.M. Rao // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 1985. – Vol. MTT–33. – P. 960–966.
189. Pant, S. Power grid physics and implications for CAD / S. Pant, E. Chiprout // Proceedings of the 43rd design automation conference (DAC). – 2006. – P. 199–204.
190. Вольман, В.И. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств – М.: Радио и связь, 1982. – 328 с.
191. Makarov, S.N. Low-frequency electromagnetic modeling for electrical and biological systems using MATLAB / S.N. Makarov, G.M. Noetscher, A. Nazarian. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2016. – 589 p.
192. Patel, U.R. Skin effect modeling in conductors of arbitrary shape through a surface admittance operator and the contour integral method / U.R. Patel, P. Triverio // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 2016. – Vol. 64, no. 9. – P. 2708–2717.
193. Lucas, R. Advances in finite element techniques for calculating cable resistances and inductances / R. Lucas and S. Talukdar // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. – 1978. – Vol. PAS–97, no. 3. – P. 875–883.
194. Menshov, A. New single-source surface integral equations for scattering on penetrable cylinders and current flow modeling in 2–D conductors / A. Menshov, V. Okhmatovski // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 2013. – Vol. 61, no. 1. – P. 341–350.

195. Kariyawasam, A. Accurate electromagnetic transient modelling of sector-shaped cables / A. Kariyawasam, A. M. Gole, B. Kordi, J. de Silva // *Proceeding of International conference on power systems transients (IPST)*. – 2011. – P. 1–6.
196. Wedepohl, L.M. Transient analysis of underground power-transmission systems. System-model and wave-propagation characteristics / L. M. Wedepohl, D.J. Wilcox // *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers* – 1973. – Vol. 120, no. 2. – P. 253–260.
197. Ховратович, В.С. Параметры многопроводных передающих линий // *Радиотехника и электроника*. – 1975. – №3. – С. 469-473.
198. Paul, C. *Transmission lines in digital and analog electronic systems: signal integrity and crosstalk*. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2010. – 299 p.
199. Теоретические основы электротехники: В 3-х т. Учебник для вузов. Том 3. – 4-е изд. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2003. – 377 с.
200. Djordjevic, A.R. Time-domain response of multiconductor transmission lines / A.R. Djordjevic, T.K. Sarkar, R.F. Harrington // *Proceedings of the IEEE* – 1987. – Vol. 75, no. 6. – P. 743–764.
201. Harrington, R.F. Losses on multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media / R.F. Harrington, C. Wei // *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*. – 1984. – Vol. MTT-32. – P. 705–710.
202. *Microwave electronics. Measurement and materials characterization* / L.F. Chen, C.K. Ong, C.P. Neo, et al. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. – 549 p.
203. Djordjevic, A.R. *Matrix parameters for multiconductor transmission lines: software and user's manual* / A.R. Djordjevic, R.F. Harrington, T. Sarkar, M. Bazdar. – Norwood: Artech House, 1995. – 234 p.
204. Wu, R.B. Boundary integral equation formulation of skin effect problems in multiconductor transmission lines / R.B. Wu, J.C. Yang // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 1989. – Vol. MAG-25. – P. 3013–3015.
205. Olyslager, F. New fast and accurate line parameter calculation of general multiconductor transmission lines in multilayered media / F. Olyslager, N. Fache, D. de Zutter // *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*. – 1991. – Vol. MTT-39. – P. 901–909.
206. Broyde, F. A simple computation of the high-frequency per-unit-length resistance matrix / F. Broyde, E. Clavelier // *2011 IEEE 15th Workshop on signal propagation on interconnects (SPI)*. – 2011. – P. 121–124.
207. Matthaei, G.L. Approximate calculation of the high-frequency resistance matrix for multiple coupled lines / G. L. Matthaei, G.C. Chinn // *IEEE Microwave Symposium Digest*. – 1992. – P. 1353–1354.
208. Wheeler, H.A. Formulas for the skin effect // *Proceedings of the IRE*. – 1942. – Vol. 30. – P. 412–424.
209. Pucel, R.A. Losses in microstrip / R.A. Pucel, D.J. Masse, C.P. Hartwig // *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*. – 1968. – Vol. 16, no. 6. – P. 342–350.
210. Paul, C.R. *Analysis of multiconductor transmission lines*. – 2nd ed. – Hoboken/New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. – 800 p.
211. Газизов, Т.Р. Уменьшение искажений электрических сигналов в межсоединениях / Т.Р. Газизов; под ред. Н.Д. Малютина – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 212 с.
212. Scheinfein, M.R. Methods of calculation of electrical parameters for electronic packaging applications / M.R.Scheinfein, O.A.Palusinski // *IEEE Transactions of the society for computer simulation*. – 1987. – Vol. 4, no. 3. – P. 187–254.
213. Bazdar, M.B. Evaluation of quasi-static matrix parameters for multiconductor transmission lines using Galerkin's method // M.B. Bazdar, A.R. Djordjevic, R.F. Harrington, et al. // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. – 1994. – Vol. 42, no. 7. – P. 1223–1228.

214. Rao, S.M. The electrostatic field of conducting bodies in multiple dielectric media / S.M. Rao, T.K. Sarkar, R.G. Harrington // *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*. – 1984. – Vol. 32, no. 11. – P. 1441–1448.
215. Electrical performance of high-speed interconnect systems / M.R. Scheinfein, J.C. Liao, O.A. Palusinski, et al. // *IEEE Transactions components, hybrids, manufacturing technology*. – 1987. – Vol. CHMT-10, no 3. – P. 303–309.
216. Шашкин, К.Г. Использование эффективных алгоритмов больших систем линейных алгебраических уравнений в задачах геотехники // *Реконструкция городов и геотехническое строительство*. – 2000. – №3. URL: <http://georeconstruction.net/journals/03/23/23.htm>
217. Ворожцов, Е.В. О комбинировании способов ускорения сходимости итерационных процессов при численном решении уравнений Навье-Стокса / Е.В. Ворожцов, В.П. Шапеев // *Вычислительные методы и программирование*. – 2017. – Т. 18. – С. 80–102.
218. Shaeffer, J. Million plus unknown MoM LU factorization on a PC // *IEEE International conference on electromagnetics in advanced applications (ICEAA)*. – 2015. – P. 62–65.
219. Писсанецки, С. Технология разреженных матриц: пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 410 с.
220. Тьюарсон, Р. Разреженные матрицы: пер. с англ. Э.М. Пейсаховича; под ред. Х.Д. Икрамова. – М.: Мир, 1977. – 172 с.
221. Saad, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. – 2nd ed. – Philadelphia: SIAM, 2003. – 547 p.
222. Das, A. Efficient adaptive mesh refinement for MoM-based package-board 3D full-wave extraction / A. Das, R.R. Nair, D. Gope // *IEEE 22nd. Conference on electrical performance of electronic packaging and systems (EPEPS)*. – 2013. – P. 239–242.
223. Objective selection of minimum acceptable mesh refinement for EMC simulations / A.P. Duffy, Z. Gang, S. Koziel, W. Lixin // *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility*. – 2015. – Vol. 57, no. 5. – P. 1266–1269.
224. Das, A. Adaptive mesh refinement for fast convergence of EFIE-based 3-D extraction / A. Das, D. Gope // *IEEE Transactions on components, packaging and manufacturing technology*. – 2015. – Vol. 5, no. 3. – P. 404–414.
225. Газизов, Т.Р. Уменьшение искажений электрических сигналов в межсоединениях и преднамеренных электромагнитных помех. Дисс. на соиск. уч. ст. доктора техн. наук: 05.12.07. – Томск, 2010. – 351 с.
226. Antonini, G. Analytical integration of quasi-static potential integrals on nonorthogonal coplanar quadrilaterals for the PEEC method / G. Antonini, A. Orlandi, A.E. Ruehli // *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility*. – 2002. – Vol. 44, no. 2. – P. 399–403.
227. Klein, C.A. The effect of different testing functions in the moment method solution of thin-wire antenna problem / C.A. Klein, R. Mittra // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. – 1975. – Vol. 23, no.2. – P. 259–261.
228. Sarkar, T.K. Nonconvergence results for the application of the moment method (Galerkin's method) for some simple problems // *IEEE Antennas and propagation society international symposium*. – 1980. – Vol. 18. – P. 676–679.
229. Xunwang, Z. Performance of parallel out-of-core MoM accelerated by SSD / Z. Xunwang, L. Zhongchao, Z. Yu // *Proceedings of IEEE International symposium on antennas and propagation & USNC/URSI national radio science meeting*. – 2015. – P. 562–563.
230. Manguoglu, M. A parallel hybrid sparse linear system solver // *Computational electromagnetics international workshop*. – 2009. – P. 38–43.
231. Zoric, D.P. Efficient evaluation of MoM matrix elements using CPU and/or GPU / D.P. Zoric, B.M. Kolundzija // *6th European conference on antennas and propagation (EUCAP)*. – 2012. – P. 702–706.

232. Hai, L. OpenMP-CUDA accelerated moment method for homogeneous dielectric objects / L. Hai, X. Mei, Y. Zhang // *IEEE Antennas and propagation society international symposium (APSURSI)*. – 2014. – P. 1634–1635.
233. Sarkar, T.K. An iterative method for solving electrostatic problems // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. – 1982. – Vol. AP-30, no. 4. – P. 611–616.
234. Костарев, И.С. Алгоритмическое и программно-методическое обеспечение для математического моделирования рассеяния и излучения электромагнитного поля в бортовой аппаратуре космических аппаратов. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук: 05.13.18. – Томск, 2011. – 163 с.
235. Горейнов, С.А. Псевдоскелетные аппроксимации при помощи подматриц наибольшего объема / С.А. Горейнов, Н.Л. Замарашкин, Е.Е. Тыртышников // *Математические заметки*. – 1997. – № 62:4. – С. 619–623.
236. Hackbusch, W. Hierarchical matrices: algorithms and analysis. – New York: Springer, 2015. – 511 p.
237. Замарашкин, Н.Л. Новые оценки точности псевдоскелетных аппроксимаций матриц / Н.Л. Замарашкин, А.И. Осинский // *Доклады Академии наук*. – 2016. – Т. 471, № 3. – С. 263–266.
238. Bebendorf, M. Approximation of boundary element matrices // *Numerische Mathematik*. – 2000. – Vol. 86, no. 4. – P. 586–589.
239. Stavtsev, S.L. Block LU preconditioner for the electric field integral equation // *Proceedings of progress in electromagnetics research symposium*. – 2015. – P. 1523–1527.
240. Yamazaki, I. Computing low-rank approximation of a dense matrix on multicore CPUs with a GPU and its application to solving a hierarchically semiseparable linear system of equations / I. Yamazaki, S. Tomov, J. Dongarra // *Scientific Programming*. – 2015. – Vol. 2015. – P. 1–17.
241. Accelerated direct solution of the method-of-moments linear system / J.M. Rius, J.M. Tamayo, E. Ubeda, A. Heldring // *Proceedings of the IEEE*. – 2014. – Vol. 101, no. 2. – P. 364–371.
242. Sparsified adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations / J.M. Rius, C. Simon, J.M. Tamayo, E. Ubeda, A. Heldring // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. – 2013. – Vol. 61, no. 1. – P. 240–246.
243. Bruns, H.D. Fast evaluation of electromagnetic fields using a parallelized adaptive cross approximation / H.D. Bruns, C. Schuster, A. Schroder // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. – 2014. – Vol. 62, No. 5. – P. 2818–2822.
244. Fast adaptive cross-sampling scheme for the sparsified adaptive cross approximation / C. Gu, Z. Niu, Z. Li, X. Chen // *IEEE Antennas and wireless propagation letters*. – 2014. – Vol. 13. – P. 1061–1064.
245. Rjasanow, S. The fast solution of boundary integral equations / S. Rjasanow, O. Steinbach. – New York: Springer, 2007. – 279 p.
246. Рыжова, М.В. Использование адаптивной перекрестной аппроксимации при решении электромагнитных задач методом моментов / М.В. Рыжова, С.П. Куксенко // *Материалы 23-й международной научно-практической конференции «Природные и интеллектуальные ресурсы Сибири» (СИБРЕСУРС-23-2017)*. – Томск: Изд-во Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, 2017. – С. 172–177.
247. Sarkar, T.K. On the choice of expansion and weighting functions in the numerical solution of operator equations / T.K. Sarkar, A.R. Djordjevic, E. Arvas // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. – 1985. – Vol. AP-33, no. 9. – P. 988–996.
248. Тарасик, В.П. Математическое моделирование технических систем: Учебник для вузов – М.: Изд-во Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.

249. Liu, Y. A novel fast iteration technique for scattering by 2-D perfect conducting cylinders / Y. Liu, J. Hu, K.K. Mei // *IEEE Transactions electromagnetic compatibility*. – 2002. – Vol. 44, № 1. – P. 263–265.
250. Yee, K.S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. – 1966. – Vol. 14, no. 3. – P. 302–307.
251. Taflove, A. Application of the finite-difference time-domain method to sinusoidal steady state electromagnetic penetration problems // *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility*. – 1980. – V. 22, no. 3. – P. 191–202.
252. Сосунов, Б.В. Применение метода конечных разностей во временной области в задачах дифракции радиоволн / Б.В. Сосунов, А.А. Тимчук // *Вопросы ЭМС и расчета антенн и радиолиний: ВАС*. – 1994. – С. 220–226.
253. Taflove, A. Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time dependent Maxwell's equations / A. Taflove, M. Brodwin // *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*. – 1975. – Vol. MMT-23. – P. 623–630.
254. Detailed FD-TD analysis of electromagnetic fields penetrating narrow slots and lapped joints in thick conducting screens / A. Taflove, K. Umashankar, B. Beker, et al. // *IEEE Transactions on antennas and propagation* – 1988. – Vol. 36, no. 2. – P. 247–257.
255. Беляцкий, А.И. Определение соответствия численных аналогов физическим прототипам при моделировании электродинамических процессов методом конечных разностей во временной области / А.И. Беляцкий, М.В. Рыжов, С.М. Токарев // *Сб. научно-методических статей вузов связи МО РФ* – 2003. – С. 21–27.
256. Беляцкий, А.И. Оценка адекватности моделей электродинамических процессов при использовании метода конечных разностей во временной области / А.И. Беляцкий, М.В. Рыжов, С.М. Токарев // *Сб. научно-методических статей вузов связи МО РФ*. – 2003. – С. 28–33.
257. Courant, R. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik / R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy // *Mathematische annalen*. – 1928. – Vol. 100, no. 1. – С. 32–74.
258. Курант, Р. О разностных уравнениях математической физики / Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви // *Успехи математических наук*. – 1941. – № 8. – С. 125–160.
259. Taflove, A. *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method* / A. Taflove, S. Hagness. – 3rd ed. – Norwood: Artech House, 2005. – 1037 p.
260. Kunz, K.S. *The finite difference time domain method for electromagnetics* / Kunz K.S., Luebbers R.J. – Boca Raton: CRC Press, 1993. – 233 p.
261. Sadiku, M.N.O. *Numerical techniques in electromagnetics*. – 3rd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 710 p.
262. Weiland, T. A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component fields // *Electronics and communications AEUE* – 1977. – Vol. 31, no. 3. – P. 116–120.
263. Clemson vehicular electronics laboratory [электронный ресурс]. Режим доступа: https://cecas.clemson.edu/cvel/modeling/tutorials/techniques/fit/finite_integration.html, свободный (дата обращения 11.02.19).
264. Van Rienen, U. *Numerical methods in computational electrodynamics. Linear systems in practical applications*. – Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 2001. – 375 p.
265. Clemens, M. Discrete electromagnetism with the finite integration technique / M. Clemens, T. Weiland // *Progress in electromagnetics research*. – 2001. – Vol. 32. – P. 65–87.
266. Courant, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // *Bulletin of american mathematical society*. – 1943. – Vol. 49, no. 1. – P. 1–23.

267. Desai, C.S. Introduction to the finite element method: a numerical approach for engineering analysis / C.S. Desai, J.F. Abel. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1972. – 477 p.
268. Silvester, P. Finite element solution of saturate magnetic field problems / P. Silvester, M. Chari // IEEE Transactions on power apparatus and systems. – 1970. – Vol. 89, no. 7. – P. 1642–1651.
269. Исабеков, Э.К. Особенности метода конечных элементов / Э.К. Исабеков, С.П. Куксенко // Материалы докладов Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2008». – Томск, 2008. – Т. 1. – С. 68–71.
270. Довбыщ, В.Н. Встроенные трансформаторные подстанции – проблемы электромагнитного мониторинга / В.Н. Довбыщ, М.Ю. Маслов, Ю.М. Сподобаев // Материалы IV межд. симпозиума по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. – Санкт-Петербург, 2005. – С. 25–30.
271. Jin, J.M. The finite element method in electromagnetics.-3rd ed. – Hoboken, New Jersey: Wiley. – 2014. – 1231 p.
272. Volakis, J.L. Finite element methods for electromagnetics: antennas, microwave circuits, and scattering applications / J.L. Volakis, A. Chatterjee, L.C. Kempel. – New York: IEEE Press, 1998. – 344 p.
273. Ozgun, O. MATLAB-based finite element programming in electromagnetic modeling / O. Ozgun, M. Kuzuoglu. – Boca Raton: CRC Press, 2019. – 427 p.
274. Jin, J.M. Finite element analysis of antennas and arrays / M. Jin, D.J. Riley. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009. – 472 p.
275. Сильвестер, П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П. Сильвестер и Р. Феррари. – М.: Мир, 1986. – 336 С.
276. Monk, P. Finite element methods for Maxwell's equations. – Oxford: Clarendon Press, 2003. – 450 p.
277. Dworsky, N. Introduction to numerical electrostatics using MATLAB. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2014. – 456 p.
278. Poljak, D. Advanced modeling in computational electromagnetic compatibility. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2007. – 520 p.
279. Sevgi, L. Electromagnetic modeling and simulation. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2014. – 663 p.
280. Johns, P.B. Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix / P.B. Johns, R.L. Beurle // Proceedings of the institution of electrical engineers. – 1971. – Vol. 118, no. 9. – P. 1203–1208.
281. Сестрорецкий, Б.В. Полупроводниковые коммутаторы для высокочастотных трактов // Сборник «Современные проблемы антенно-волноводной техники». – М.: Наука, 1967. – С. 126–144.
282. Weiner, M. Electromagnetic analysis using transmission line variables. – 3 rd. ed. – Toh Tuck Link: World Scientific, 2018. – 652 p.
283. Christopoulos, C. The transmission-line modeling (TLM) method in electromagnetics. – Morgan&Claypool, 2006. – 132 p.
284. Ruehli, A.E. Inductance calculations in a complex integrated circuit environment // IBM Journal of research and development. – 1972. – Vol. 16, no. 5. – P. 470–481.
285. Ruehli, A.E. Efficient capacitance calculations or three-dimensional multiconductor systems / A.E. Ruehli, P.A. Brennan // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 1973. – Vol. 21, no. 2. – P. 76–82.
286. Ruehli, A.E. Equivalent circuit models for three dimensional multiconductor systems // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 1974. – Vol. 22, no. 3. – P. 216–221.

287. Kron, G. Equivalent circuit for the field equations of Maxwell // *Proceedings of the IRE.* – 1944. – Vol. 32, № 5. – P. 289–299.
288. Broadband full-wave frequency domain PEEC solver using effective scaling and preconditioning for SIPI models / A. Giulio, R. Daniele, M. Bandinelli, A. Mori, G. Sammarone // *IEEE International symposium on electromagnetic compatibility.* – North Carolina, USA, 2014. – P. 213–217.
289. Агапов, С.В. Электронные САПР для моделирования электромагнитных излучений от межсоединений печатных плат // *Проблемы электромагнитной совместимости технических средств: Сб. докл. Всерос. симпозиума.* – 2002. – С. 11–13.
290. On the simulation of a GPR using an ADI-FDTD MoMTD hybrid method / S.G. Garcia, R.G. Martin, M.F. Pantoja, R.G. Rubio, A.R. Bretones // *Proceedings of the tenth International conference on ground penetrating radar.* – 2004. – Vol. 1. – P. 13–15.
291. An FDTD/MoMTD hybrid technique for modeling HF antennas located on lossy ground / L. Jiangdong, T. Zhen, X. Feng, Z. Bo. // *International conference on microwave and millimeter wave technology.* – 2008. – Vol. 2. – P. 726–729.
292. Karwowski, A. Fast MM-PO-based numerical modelling technique for wideband analysis of antennas near conducting objects / A. Karwowski, A. Noga // *Electronics letters.* – 2007. – Vol. 43, no. 9. – P. 486–487.
293. Method of moments accelerations and extensions in FEKO / M. Bingle, W. Burger, D. Ludick, M. Schoeman, J. van Tonder, U. Jakobus // *International conference on electromagnetics in advanced applications (ICEAA).* – Torino, 2011. – P. 62–65.
294. A hybrid MoM/FDTD method for dosimetry of small animal in reverberation chamber / O. Fujiwara, W. Jianqing, K. Wake, S. Watanabe, J. Chakarothai // *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility.* – 2014. – Vol. 56, no. 3. – P. 549–558.
295. Analysis of millimeter-wave exposure on rabbit eye using a hybrid PMCHWT-MoM-FDTD method / M. Kojima, K. Sasaki, Y.M. Suzuki, K. Taki, S. Wake, J. Watanabe, Chakarothai // *The International symposium on antennas & propagation.* – 2013. – Vol. 1. – P. 59–62.
296. Karwowski, A. Wide-band hybrid MM-PO computational electromagnetics technique using [Z] matrix interpolation and adaptive frequency sampling / A. Karwowski, A. Noga // *IEEE International symposium on electromagnetic compatibility.* – 2007. – P. 1–4.
297. Commens, M. Efficient large scale simulations with a hybrid finite element boundary integral technique / M. Commens, K. Zhao // *IEEE 13th annual wireless and microwave technology conference (WAMICON).* – 2012. – P. 1–4.
298. Дмитриенко, К.С. Метод анализа электромагнитных помех и электромагнитной совместимости кабелей и печатных плат, расположенных в сложных металлических структурах / К.С. Дмитриенко, И.М. Добуш, С.П. Куксенко // *Тезисы докладов научно-технической конференции молодых специалистов «Электронные и электромеханические системы и устройства».* – Томск, 2008. – С. 114–115.
299. Дегтярев, Д.С. Оценка электромагнитных воздействий на космические аппараты / Д.С. Дегтярев, Д.И. Олейник, С.П. Куксенко // *Материалы докладов Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2008».* – Томск, 2008. – Т. 2. – С. 129–131.
300. Система компьютерного моделирования электромагнитной совместимости TALGAT [электронный ресурс]. Режим доступа: <http://talgat.org/talgat-software/>, свободный (дата обращения 04.02.19).
301. Ильин, В.П. Математическое моделирование и философия науки // *Вестник Российской академии наук.* – 2018. – Т. 88, № 1. – С. 58–66.
302. Parfenov, Y.V. Conducted IEMI threats for commercial buildings / Y.V. Parfenov, L.N. Zdoukhov, W.A. Radasky // *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility.* – 2004. – No3. – P. 404–411.

303. Гизатуллин, З.М. Физическое моделирование электромагнитных помех при электромагнитном воздействии на макрообъекты / З.М. Гизатуллин, М.Г. Нуриев, Р.М. Гизатуллин // Электронный журнал «Журнал радиоэлектроники». – 2015. – №6. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/14/text.pdf>.
304. Fortov, V. Estimation of pulse electromagnetic disturbances penetrating into computers through building power and earthing circuits // Digest of EUROEM 2000. – 2000. – P. 1–14.
305. Гизатуллин, З.М. Математические модели для физического моделирования задач электромагнитной совместимости / З.М. Гизатуллин, М.Г. Нуриев, Р.М. Гизатуллин // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – 2015. – №1-2. – С. 115–122.
306. Hubing, T.H. An EMC engineer's guide to electromagnetic modeling software // IEEE EMC Society Distinguished Lecturer Presentation. – 1997. – P. 1–21.
307. Su, C. Overview of electromagnetic modeling software / C. Su, H. Ke, T. Hubing // Proceeding of the 25th International review of progress in applied computational electromagnetics. – Monterey, CA, 2009. – P. 1–6.
308. Hubing, T.H. How EMC engineers use computer modeling tools productively // First International conference on automation, control, energy and systems (ACES). – USA, Jacksonville, 2014. – P. 1–56.
309. Institut für theoretische elektrotechnik – Hamburg University of Technology (TUHH) [электронный ресурс]. Режим доступа: www.tet.tu-harburg.de, свободный (дата обращения 04.02.19).
310. Altair: Transforming the way companies design products and make decisions [электронный ресурс]. Режим доступа: www.altair.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
311. EMCoS [электронный ресурс]. Режим доступа: www.emcos.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
312. Electromagnetic simulation and EM modeling software: WIPL-D [электронный ресурс]. Режим доступа: www.wipl-d.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
313. INTEGRATED Engineering software [электронный ресурс]. Режим доступа: www.integratedsoft.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
314. Mentor, a siemens business, leads in electronic design automation software – Mentor Graphics [электронный ресурс]. Режим доступа: www.mentor.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
315. GEMACS – Electromagnetic analysis program [электронный ресурс]. Режим доступа: www.gemacs.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
316. newFASANT – Software solutions for electromagnetic simulation [электронный ресурс]. Режим доступа: www.fasant.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
317. Keysight technologies [электронный ресурс]. Режим доступа: www.keysight.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
318. Lucernhammer: electromagnetic signature / radar cross section prediction [электронный ресурс]. Режим доступа: <http://lucernhammer.tripointindustries.com>, свободный (дата обращения 04.02.19).
319. EDEM3D программа для расчета электромагнитных полей и исследования электродинамических свойств структур из проводящих элементов [электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.edem3d.ru>, свободный (дата обращения 04.02.19).
320. GEMS [электронный ресурс]. Режим доступа: www.2comi.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
321. QWED – Software for electromagnetic design [электронный ресурс]. Режим доступа: www.qwed.com.pl, свободный (дата обращения 04.02.19).

322. EuCAP animation SPEAG, Schmid & Partner Engineering AG [электронный ресурс]. Режим доступа: www.semcad.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
323. EMPIRE XPU – FDTD simulator for 3D EM modeling of antennas, filters, multilayer components, packages, waveguide elements, RCS, EMC and SAR calculations [электронный ресурс]. Режим доступа: www.empire.de, свободный (дата обращения 04.02.19).
324. Electromagnetic simulation software & EM modeling – Remcom [электронный ресурс]. Режим доступа: www.remcom.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
325. ESI Group – Virtual prototyping software and services [электронный ресурс]. Режим доступа: www.esi-group.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
326. Electro magnetic applications, Inc. [электронный ресурс]. Режим доступа: www.ema3d.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
327. EMAG Technologies Inc. Innovative RF solutions [электронный ресурс]. Режим доступа: www.emagtech.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
328. CST – Computer simulation technology [электронный ресурс]. Режим доступа: www.cst.de, свободный (дата обращения 04.02.19).
329. FSC former website [электронный ресурс]. Режим доступа: www.faustcorp.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
330. Engineering simulation. 3D design software. ANSYS [электронный ресурс]. Режим доступа: www.ansys.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
331. Opera electromagnetic FEA simulation software [электронный ресурс]. Режим доступа: www.operafea.com (дата обращения 04.02.19).
332. АСОНИКА: компьютерное моделирование РЭС и контроль изделий электроники [электронный ресурс]. Режим доступа: www.asonika-online.ru (дата обращения 04.02.19).
333. Добуш, И.М. Электродинамический анализ металлического корпуса со щелями / И.М. Добуш, К.С. Дмитриенко, С.П. Куксенко // Сборник научных трудов XV международной молодежной научной конференции «Туполевские чтения». – Казань, 2008. – С. 56–59.
334. Банков, С.Е. Электродинамическое моделирование антенных и СВЧ-структур с использованием FEKO / С.Е. Банков, А.Н. Грибанов, А.А. Курушин – М.: OneBook, 2013. – 426 с.
335. Лагутин, В. Новые возможности электродинамического анализа геометрически сложных структур в Altair FEKO // Современная электроника. – 2016. – № 8. – С. 2–5.
336. Купрадзе, В.Д. О приближенном решении задач математической физики // Успехи математических наук. – 1967. – Т. 22, №2(134). – С.59–107.
337. Еремин Ю.А. Развитие методов вспомогательных источников в электромагнитных задачах дифракции / Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2, № 12. – С. 52–79.
338. Anastassiou, H.T. Accuracy analysis and optimization of the method of auxiliary sources (MAS) for scattering by a circular cylinder / H.T. Anastassiou, D.G. Lymperopoulos, D.I. Kaklamani // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 2004. – Vol. 52, no. 6. – P. 1541–1547.
339. Дмитренко, А.Г. Исследование особенностей применения метода вспомогательных источников к решению задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре / А.Г. Дмитренко, Е.П. Полин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 15–21.
340. Максимович, Е.С. Использование программы электромагнитного моделирования IE3D для разработки планарных антенн // EDA Express. – 2005. – № 12. – С. 2–6.
341. Карабан, В.М. Возможности программного обеспечения компании Mentor Graphics в области трехмерного моделирования электромагнитных полей электронных устройств и

- систем /В.М. Карабан, А.С. Краюхин, Р.С. Севастьянов // Технические науки: теория и практика: материалы II Международной научной конференции – 2014. – С. 3–5.
342. Давыдов, А.Г. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы / А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов // Доклады АН СССР. – 1984. – Т.276, вып.1. – С. 96–100.
343. Davydov, A.G.. Numerical analysis of fields in the case of electromagnetic excitation of unclosed surfaces / A.G. Davydov, E.V. Zakharov, Yu.V. Pimenov // Journal of communication technology and electronics. – 2000. – Vol. 45, no. 2, 2000. – P. 247–259.
344. Давыдов, А.Г. Возможности программы ЭДЭМ для разработки устройств антенной техники / А.Г. Давыдов, Ю. В. Пименов // Антенны. – 2006. – №12. – С. 54–66.
345. Ежов, В. 3D-моделирование СВЧ-полей с помощью Empire Хру по материалам семинара компании "ПСБ СОФТ" // Электроника: наука, технология, бизнес. – 2016. – № 6. – С. 1–6.
346. Лебедев, А.С. Разработка методов построения адаптивных сеток / А.С. Лебедев, В.Д. Лисейкин, Г.С. Хакимзянов // Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7, №3. – С. 29–43.
347. Kim, S.K. Correlation analysis of error estimators for the EFIE / S.K. Kim, A.F. Peterson // IEEE International symposium on antennas and propagation (APSURSI). – 2016. – P. 315–316.
348. Аширбакиев, Р.И. Адаптивный итерационный выбор оптимальной сегментации границ проводников и диэлектриков в задачах электростатики / Р.И. Аширбакиев, В.К. Салов // Доклады ТУСУР. – 2013. – № 3(29). – С. 159–161.
349. Content-adaptive finite element mesh generation of 3-D complex MR volumes for bioelectromagnetic problems / W.H. Lee, T.-S. Kim, M.H. Cho, S.Y. Lee // Proceedings of IEEE Engineering in medicine and biology 27th annual conference. – Shanghai, China, 2005. – P. 4373–4376.
350. An adaptive mesh method in transient finite element analysis of magnetic field using a novel error estimator / Y. Zhao, X.Z. Xiu, S.L. Ho, W.N. Fu // IEEE Transactions on magnetics. – 2012. – Vol. 48, no. 11. – P. 4160–4163.
351. Matsutomo, S. Adaptive mesh generation method utilizing magnetic flux lines in two-dimensional finite element analysis / S. Matsutomo, S. Noguchi, H. Yamashita // IEEE Transactions on magnetics. – 2012. – Vol. 48, no. 2. – P. 527–530.
352. A new adaptive meshing method using non-conforming finite element method / S. Noguchi, T. Naoe, H. Igarashi, S. Matsutomo, V. Cingoski // IEEE Conference on electromagnetic field computation (CEFC). – 2016. – P. 1.
353. A new adaptive mesh refinement method in FEA based on magnetic field conservation at elements interfaces and nonconforming mesh refinement technique / S. Noguchi, T. Naoe, H. Igarashi, S. Matsutomo, V. Cingoski, A. Ahagon, A. Kameari // IEEE Transactions on magnetics. – 2017. – Vol. 53, No. 6. – P. 1–4.
354. Liu, Y. AMR-FDTD: A dynamically adaptive mesh refinement scheme for the finite-difference time-domain technique / Y. Liu, C.D. Sarris // IEEE AP-S International symposium. – 2005. – P. 134–137.
355. Van Londersele, A. Huygens subgridding combined with the 2D fully collocated implicit FDTD method / A. van Londersele, D. de Zutter, D. vande Ginste // IEEE International symposium on antennas and propagation (APSURSI). – 2016. – P. 2025–2026.
356. Meyer, F.J. Adaptive-mesh refinement of finite-element solutions for two-dimensional electromagnetic problems / F.J. Meyer, D.B. Davidson // IEEE Antennas and propagation. – 1996. – Vol. 37, no 5. – P. 77–83.
357. Labridis, D.P. Comparative presentation of criteria for adaptive finite-element mesh generation in multiconductor eddy-current problems // IEEE Transactions on magnetics. – 2000. – Vol. 36, no. 1. – P. 267–280.

358. Cendes, Z. Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic fields / Z. Cendes, D. Shenton // *IEEE Transactions on magnetics*. – 1985. – Vol. 21, no. 5. – P. 1811–1816.
359. Grätsch, T. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis / T. Grätsch, K.-J. Bathe // *Computers and structures*. – 2005. – Vol. 83. – P. 235–265.
360. Lysko, A.A. Something different-caching applied to calculation of impedance matrix elements // *International conference on electromagnetics in advanced applications (ICEAA)*. – 2012. – P. 630–633.
361. Фаддеева, В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Гостехиздат, 1950. – 240 с.
362. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – М.: Физматгиз, 1960. – 656 с.
363. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – М.: Физматгиз, 1963. – 734 с.
364. Кублановская, В.Н. К столетию со дня рождения Веры Николаевны Фаддеевой / В.Н. Кублановская, Л.Ю. Колотилина // *Численные методы и вопросы организации вычислений // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН*. – 2006. – Т. 334. – С. 7–12.
365. Последовательно-параллельные вычисления: монография / Е. Валях; пер. с англ. И.А. Николаева, А.М. Степанова. – М.: Мир, 1985. – 456 с.
366. TOP500 Supercomputer sites [электронный ресурс]. Режим доступа: www.top500.org, свободный (дата обращения 04.02.19).
367. Ильин, В.П. Методы неполной факторизации для решения линейных систем. – М.: Физмат, 1995. – 284 с.
368. Сентябов, А.В. Исследование сходимости методов решения СЛАУ в задачах вычислительной гидродинамики // *Тезисы докладов 7-й Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (с участием иностранных ученых)*, 2006. – С. 1.
369. Pozrikidis, C. *Fluid dynamics: theory, computation, and numerical simulation*. – 3rd ed. – New York: Springer, 2017. – 912 p.
370. Решение плохообусловленных симметричных СЛАУ для задач строительной механики параллельными итерационными методами / В.Л. Якушев, В.Н. Симбиркин, А.В. Филимонов, П.А. Новиков, и др. // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. – 2012. – № 4 (1). – С. 238–246.
371. Grant, L.L. Application of nearly linear solvers to electric power system computation. A dissertation for the degree doctor of philosophy in electrical engineering. Missouri university of science and technology, 2017. – 66 p.
372. Parallel power grid analysis using distributed direct linear solver / Q. He, W. Au, A. Korobkov, S. Venkateswaran // *IEEE International symposium on electromagnetic compatibility*. – 2014. – P. 866–871.
373. Светлаков, А.А. Обобщенные обратные матрицы: некоторые вопросы теории и применения в задачах автоматизации управления процессами. – Томск: Издательство научно-технической литературы, 2003. – 388 с.
374. Terekhov, A. Parallel dichotomy algorithm for solving tridiagonal system of linear equations with multiple right-hand sides // *Parallel computing*. – 2010. – Vol. 36, no. 8. – P. 423–438.
375. Савицкий, О.А. Численное моделирование распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде / О.А. Савицкий, Т.А. Чистякова // *Математическое моделирование*. – 2014. – Т. 26, № 3. – С. 49–64.

376. Jain, A.K. Fundamentals of digital image processing. – Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989. – 569 p.
377. Камаев, А.Н. Исследование алгоритмов упорядочивания коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений, возникающих в задачах компьютерного зрения // Информатика и системы управления. – 2013. – №3(37). – С. 32–44.
378. Karris, S.T. Circuit Analysis I: with MATLAB Applications. – Fremont: Orchard Publications, 2003. – 592 p.
379. Gentle, J.E. Numerical linear algebra for applications in statistics. – New York: Springer Verlag, 1998. – 221 p.
380. Griva, I. Linear and nonlinear optimization / I. Griva, S.G. Nash, A. Sofer. – 2 nd ed. – Philadelphia: SIAM, 2008. – 764 p.
381. Семенов, И.С. Разработка методов решения СЛАУ для задач динамики популяций применительно к акватории Азовского моря // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №4(141). – С. 140–146.
382. Numerical linear algebra for high-performance computers / J. Dongarra, I. Duff, D. Sorensen, H. Van der Vorst. – Philadelphia: SIAM, 1998. – 342 p.
383. Пирумов, У.Г. Численные методы. – М.: Дрофа, 2003. – 224 с.
384. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
385. Ильин, В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. – 344 с.
386. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
387. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука; 1980. – 536 с.
388. Джордж, А. Численное решение больших разреженных систем уравнений / А. Джордж, Дж. Лю. – М.: Мир, 1984. – 336 с.
389. Хейгеман, Л. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
390. Соловьев, С.А. Решение разреженных систем линейных уравнений методом Гаусса с использованием техники аппроксимации матрицами малого ранга // Вычислительные методы и программирование. – 2014. – Т. 15. – С. 441–460.
391. Templates for the solution of linear systems: building block for iterative methods / R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. Van der Vorst. – Philadelphia: SIAM, 1994. – P. 124.
392. Axellson, O. Iterative solution methods. – New York: Cambridge University Press, 1994. –P. 166.
393. Van der Vorst, H. Iterative Krylov methods for large linear system. – New York: Cambridge University Press, 2003. – P. 221.
394. Davis, T.A. Direct methods for sparse linear systems. – Philadelphia: SIAM, 2006. – 217 p.
395. Баландин, М.Ю. Методы решения СЛАУ большой размерности / М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.
396. Duff, I.S. Direct methods for sparse matrices / I.S. Duff, A.M. Erisman, J.K. Reid. – 2nd ed. – Oxford: Oxford University Press, 2017. – 429 p.
397. Ортега, Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – М.: Мир, 1991. – 365 с.
398. Hackbusch, W. Iterative solution of large sparse systems. – 2nd ed. – New York: Springer-Verlag, 20016. – 509 p.
399. Bertaccini, D. Iterative methods and preconditioning for large and sparse linear systems with applications / D. Bertaccini, F. Durastante. – New York: Chapman and Hall/CRC. – 2018. – 354 p.

400. Leman, S. Advanced spacecraft EM modelling based on geometric simplification process and multi-methods simulation / S. Leman, F. Hoespe // ESA workshop on Aerospace EMC. – 2016. – P. 1–6.
401. Развитие программной платформы INMOST: динамические сетки, линейные решатели и автоматическое дифференцирование / Д.В. Багаев, А.И. Бурачковский, А.А. Данилов, И.Н. Коньшин, К.М. Терехов // Труды конференции «Суперкомпьютерные дни в России 2016». – 2016. – С. 543–555.
402. The netlib [электронный ресурс]. Режим доступа: www.netlib.org, свободный (дата обращения 04.02.19).
403. PETSc: Home Page [электронный ресурс]. Режим доступа: www.mcs.anl.gov/petsc, свободный (дата обращения 04.02.19).
404. Home Page Scilab [электронный ресурс]. Режим доступа: www.scilab.org, свободный (дата обращения 04.02.19).
405. GNU Octave [электронный ресурс]. Режим доступа: www.gnu.org/software/octave, свободный (дата обращения 04.02.19).
406. MathWorks [электронный ресурс]. Режим доступа: www.mathworks.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
407. Yousef Saad – Software [электронный ресурс]. Режим доступа: www-users.cs.umn.edu/~saad/software/, свободный (дата обращения 04.02.19).
408. NAG [электронный ресурс]. Режим доступа: www.nag.com, свободный (дата обращения 04.02.19).
409. Boost C++ Libraries [электронный ресурс]. Режим доступа: www.boost.org, свободный (дата обращения 04.02.19).
410. Eigen [электронный ресурс]. Режим доступа: www.eigen.tuxfamily.org, свободный (дата обращения 04.02.19).
411. Intel MKL [электронный ресурс]. Режим доступа: <https://software.intel.com/en-us/mkl>, свободный (дата обращения 04.02.19).
412. SparSol: sparse linear systems solver / O.V. Diyanov, S.V. Koshelev, et al. // Russian journal of numerical analysis and mathematical modeling. – 2007. – Vol. 22, no. 4. – С. 325–339.
413. Krylov: библиотека алгоритмов и программ для решения СЛАУ / Д.С. Бутюгин, В.П. Ильин, Е.А. Ицкович и др. // Современные проблемы математического моделирования. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Сборник трудов Всероссийских научных молодежных школ. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2009. – С. 110–128.
414. NumPy [электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.numpy.org>, свободный (дата обращения 04.02.19).
415. Luszczek, P. Looking back at dense linear algebra software / P. Luszczek, J. Kurzak, J. Dongarra // Journal of parallel and distributed computing. – 2014. – P. 2548–2560.
416. Саад, Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем Т. 1: в 2 т. / Ю. Саад // пер. с англ. Х.Д. Икрамова. – Москва: Изд-во Московского университета, 2013. – 321 с.
417. Pooch, U.W. A survey of indexing techniques for sparse matrices // Computing surveys. – 1973. – P. 109–133.
418. Knuth, D. The Art of computer programming: fundamental algorithms. – Addison-Wesley, 1968. – 634 p.
419. Rheinboldt, W.C. Programs for the solution of large sparse matrix problems based on the arc-graph structure / W.C. Rheinboldt, C.K. Mesztenyi // Computer science center, University of Maryland, College Park MD. Technical Report TR-262. – 1973.

420. Larcombe, M. A list processing approach to the solution of large sparse sets of matrix equations and the factorization of the overall matrix // in Large sparse sets of linear equations. – London: Academm Press, 1971. – P. 25–40.
421. Sherman, A.H. On the efficient solution of sparse systems of linear and nonlinear equations. Ph.D. dissertation, department of Computer science, Yale University, 1975. – 194 p. URL: <https://cpsc.yale.edu/sites/default/files/files/tr46.pdf>.
422. Chang, A. Application of sparse matrix methods in electric power system analysis // Sparse matrix proceedings. – 1969. – P. 113–121.
423. Gustavson, F.G. Some basic techniques for solving sparse systems of linear equations // in Sparse matrices and their applications; D.J. Rose, R.A. WiHougy. eds. – New York: Plenum Press, 1972. – P. 41–52.
424. Saad, Y. Numerical solution of large nonsymmetric eigenvalue problems // Computer physics communications. – 1989. – Vol. 53 – P. 71–90.
425. Tinetti, F. Performance of scientific processing in NOW: matrix multiplication example // Journal of computer science and technology. – 2001. – Vol. 4, no. 1. – P. 78–87.
426. Jiang, J. The spatial relationship of DCT coefficients between a block and its sub-blocks / J. Jiang, G. Feng // IEEE Transactions on signal processing,. – 2002. – Vol. 50, no. 5. – P. 1160–1169.
427. Improving the performance of the sparse matrix vector product with GPUs / F. Vazquez, G. Ortega, J.J. Fernandez, E.M. Garzon // IEEE 10th International conference on computer and information technology. – 2010. – P. 1146–1151.
428. Kestur, S. Towards a universal FPGA matrix-vector multiplication architecture / S. Kestur, J.D. Davis, E.S. Chung // IEEE 20th Annual international symposium on field-programmable custom computing machines (FCCM). – 2012. – P. 9–16.
429. LINPACK Users Guide / J.J. Dongarra, J.R. Bunch, C.B. Moler, G.W. Stewart. – Philadelphia: SIAM, 1979. – 371 p.
430. Felippa, C.A. Solution of linear equations with skyline-stored symmetric matrix // Computers and structures. – 1975. – No. 5. – P. 13–29.
431. Gilbert, J.R. Sparse matrices in MATLAB: design and implementation / J.R. Gilbert, C. Moler, R. Schreiber // SIAM Journal matrix analitical and applications. – 1992. –Vol. 13. – P. 333–356.
432. Ильин, В.П. Линейная алгебра: от Гаусса до суперкомпьютеров будущего // Природа. – 1999. – №6. – С. 11–18.
433. Grear, J.F. How ordinary elimination became Gaussian elimination // Historica mathematica. – 2011. – No. 98. – P. 163–218.
434. Grear, J.F. Mathematicians of Gaussian elimination // Notices of the AMS. – 2011. – No. 58. – P. 782–792.
435. Flexible development of dense linear algebra algorithms on massively parallel architectures with DPLASMA / G. Bosilca, A. Bouteiller, A. Danalis, et al. // IEEE International symposium on parallel and distributed processingworkshops and PhD forum. – 2011. – P. 1432–1444.
436. Reducing energy consumption of dense linear algebra operations on hybrid CPU-GPU platforms / M.F. Dolz, F.D. Igual, R. Mayo, et al. // IEEE 10th International symposium on parallel and distributed processing with applications (ISPA). – Madrid, Spain, 2012. – P. 56–62.
437. Margaritis, K.G. Implementing parallel LU factorization with pipelining on a multicore using OpenMP / K.G. Margaritis, P.D. Michailidis // IEEE 13th International conference on computational science and engineering (CSE). – Hong Kong, China, 2010. – P. 253–260.
438. Mixing LU-QR factorization algorithms to design high-performance dense linear algebra solvers / M. Faverge, J. Herrmann, J. Langou, et al. // Journal on parallel and distributed computing. – 2015. – Vol. 85. – P. 32–46.

439. Implementation of block algorithm for LU factorization / K. Ji, W. Liu, Z. Shi, et al. // World congress on computer science and information engineering. – Los Angeles, USA, 2009. – Vol. 2. – P. 569–573.
440. Demmel, J.W. Benchmarking GPUs to tune dense linear algebra / J.W. Demmel, V. Volkov // International conference for high performance computing, networking, storage and analysis. – Ostin, USA, 2008. – P. 1–11.
441. Design of scalable dense linear algebra libraries for multithreaded architectures: the LU factorization / E. Chan, E.S. Quintana-Orti, R.A. van de Geijn, et al. // IEEE International symposium on parallel and distributed processing. – Sydney, Australia, 2008. – P. 1–8.
442. Rius, J.M. Accelerated direct solution of the MoM linear system using block compression and nested factorization / J.M. Rius, A. Heldring // International conference on electromagnetics in advanced applications (ICEAA). – Torino, Italy, 2011. – P. 636–639.
443. Topa, T. Efficient out-of-GPU memory strategies for solving matrix equation generated by method of moments / Electronics letters. – 2015. – Vol. 51, no. 1. – P. 1542–1544.
444. Multi-GPU accelerated fast ACA direct solve for moment method solution of composite bodies / L. Faircloth Daniel, N. Killian Tyler, A. Horn Mark // IEEE International symposium of antennas and propagation society (APSURSI). – 2014. – P. 1630–1631.
445. GPU-Accelerated parallel sparse LU factorization method for fast circuit analysis / K.H. Sheldon, X.D. Tan, W. Hai, S. Guoyong // IEEE Transactions on very large scale integration (VLSI) systems. – 2016. – Vol. 24, no. 3. – P. 1140–1150.
446. Turing, A.M. Rounding-off errors in matrix processes // Quarterly journal of mechanics and applied mathematics. – 1948. – Vol. 1. – P. 287–308.
447. Higham, N.J. Accuracy and stability of numerical algorithms. – 2 nd ed. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 680 p.
448. Sarkar, T.K. Survey of numerical methods for solution of large systems of linear equations for electromagnetic field problems / T.K. Sarkar, K. Siarkiewicz, R. Stratton // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1981. – Vol. 29. – P. 847–856.
449. Жданов А.И. О рекуррентно-матричной форме метода оптимального исключения / А.И. Жданов, Л.В. Яблокова // Вестник самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2009. – №1. – С. 154–160.
450. Воеводин, В.В. Численные методы алгебры (теория и алгоритмы). – М.: Наука, 1966. – 248с.
451. Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч.В. Лоун. – М: Мир, 1999. – 548 с.
452. Nedozogin, N.S. Sherman-Morrison high-performance algorithm for inverse matrix on GPU / N.S. Nedozogin, A.S. Sarmakeeva, S.P. Kopysov // Bulletin of the South Ural State university. Series «Computational mathematics and software engineering». – 2014. – Vol. 3, no. 2. – P. 101–108.
453. Каханер, Д. Численные методы и математическое обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 575 с.
454. Савелов, Н.С. Алгоритм ускоренного повторного решения систем линейных алгебраических уравнений и его использование при математическом моделировании электронных устройств / Н.С. Савелов, М.С. Ревин // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – 2010. – № 2(66). – С. 37–42.
455. Разработка алгоритма решения систем линейных уравнений с варьируемыми параметрами, использующего разреженность матрицы / А.Е. Кочура, Л.В. Подколызина, Я.А. Ивакин, И.И. Нидзиев // Труды СПИИРАН. – 2014. – Вып. 33. – С. 79–98.

456. Du, P. High performance dense linear system solver with resilience to multiple soft errors / P. Du, P. Luszczyk, J. Dongarra // International conference on computational science, ICCS. – 2012. – P. 1–10.
457. Коновалов, А.В. Эффективность алгоритма LU-разложения с двумерным циклическим распределением матрицы для параллельного решения упругопластической задачи / А.В. Коновалов, А.С. Партин, А.В. Толмачев // Программные продукты и системы. – 2013. – №3. – С. 94–99.
458. Olyslager, F. Numerical and experimental study of the shielding effectiveness of a metallic enclosure / F. Olyslager, E. Lermans, D. de Zutter // IEEE Transactions on electromagnetic compatibility. – 1999. – Vol. 41, no. 3. – P.202–213.
459. Correia, L.M. A comparison of integral equation with unique solution in the resonance region for scattering by conducting bodies // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1993. – Vol. 41, no. 1. – P. 52–58.
460. Ji, Y. On the interior resonance problem when applying a hybrid FEM/MoM approach to model printed circuit boards / Y. Ji, T.H. Hubing // IEEE Transactions on electromagnetic compatibility. – 2002. – Vol. 44, no. 2. – P.318–323.
461. On the formulation of hybrid finite–element and boundary–integral methods for 3-D scattering / X.-Q. Sheng, J.-M. Jin, J. Song, et al. // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1998. – Vol. 46, no. 3. – P.303–311.
462. Carpes, W.P. Analysis of the coupling of an incident wave with a wire inside a cavity using an FEM in frequency and time domains / W.P. Carpes, L. Pichon, A. Razek // IEEE Transactions on electromagnetic compatibility. – 2002. – Vol. 44, no.3. – P. 470–475.
463. Nayanthara, K. Analysis of two–dimensional conducting and dielectric bodies utilizing the conjugate gradient method / K. Nayanthara, S. Rao, T. Sarkar // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1987. – Vol. 35, no.4. – P. 451–453.
464. Singer, H. The method of moments (MOM) and related codes // Proceedinds of the 13th International Zurich symposium on EMC. – Zurich, Switzerland, 1999. – P. 11–19.
465. Fast solution methods in electromagnetic / W.C. Chew, J.-M. Jin, C.-C. Lu, et al. // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1997. – Vol. 45, no. 3. – P. 533–543.
466. Костарев, И.С. Повышение эффективности решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами / И.С. Костарев, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Вестник Томского государственного педагогического университета. Серия: Естественные и точные науки. Спецвыпуск. – 2005. – №7. – С. 150–155.
467. Костарев, И.С. Увеличение скорости решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью быстрого преобразования Фурье / И.С. Костарев, С.П. Куксенко // Сборник научных трудов всероссийской научно-технической конференции «Научная сессия ТУСУР-2005». – Томск, 2005. – Ч. 1. – С. 112–114.
468. Костарев, И.С. Увеличение скорости решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами / И.С. Костарев, С.П. Куксенко // Сборник научных трудов третьей международной научно–практической конференции «Электронные средства и системы управления» посвященной 60-летию Победы в Великой Отечественной Войне и 110-летию изобретения радио. – Томск, 2005. – Ч.1. – С. 110–113.
469. Young, D.M. A historical overview of iterative methods // Computer physics communications. – 1989. – Vol. 53. – P. 1–17.
470. Saad, Y. Iterative solution of linear systems in the 20-th century / Y. Saad, H. Van der Vorst // Journal of computational and applied mathematics. – 2000. – Vol. 123, no 1. – P. 1–33.
471. Golub, G.H. Some history of the conjugate gradient and Lanczos algorithms: 1948-1976 / G.H. Golub, D.P. O'Leary // SIAM review. – 1989. – Vol. 31, no. 1. – P. 50-102.

472. Жданов, А.И. Об одной вычислительной реализации блочного метода Гаусса–Зейделя для нормальных систем уравнений / А.И. Жданов, Е.Ю. Богданова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия. Физико-математические науки. – 2016. – № 20:4. – Р. 730–738.
473. Бутюгин, Д.С. Параллельный предобусловливатель SSOR для решения задач электромагнетизма в частотной области // Вычислительные методы и программирование. – 2011. – № 12:1. – С. 120–127.
474. Natarajan, R. An iterative scheme for dense, complex-symmetric, linear systems in acoustics boundary-element computations // SIAM Journal on scientific computing. – 1998. – Vol. 19, no. 5. – P. 1450 – 1470.
475. Форсайт, Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Моулер. – М.: Мир, 1969. – 167 с.
476. Крылов, А.Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем // Известия АН СССР. Отделение математических и естественных наук. – 1931. – № 4. – С. 491–539.
477. Крылов, А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. – Изд. 2-е, перераб. и знач. доп. – Ленинград: АН СССР, 1933. – 543 с.
478. Деммель, Д. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 429 с.
479. Харченко, С.А. Новые алгоритмы типа GMRES(K) с явными рестартами и анализ их свойств сходимости на основе QR формы матричных соотношений / С.А. Харченко, А.Ю. Еремин // Численные методы и вопросы организации вычислений. XIV, Записки научных семинаров ПОМИ. – 2000. – Т. 268. – С. 180–241.
480. Wang, W. Parallelization and acceleration scheme of multilevel fast multipole method / W. Wang, Y. Feng, X. Chi // Proc of Conf on parallel and distributed computing, applications and technologies. – 2008. – P. 70–73.
481. ACA method and SPAI preconditioner for acceleration BICGSTAB solver in MoM based solver TriD / F. Bogdanov, R. Jobava, P. Tsereteli, E. Yavolovskaya, G. Gabriadze // XVth International seminar/workshop on direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED). – Lviv, 2011. – P. 151–155.
482. Zhang, Z.Q. Application of the BCGS-FFT method to 3-D induction well logging problems / Z.Q. Zhang, Q.H. Liu // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2003. – V. 42, no. 5. – P. 998–1004.
483. MPIE/MoM Acceleration with a general purpose graphics processing unit / D. de Donno, A. Esposito, G. Monti, L. Tarricone // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 2012. – Vol. 60, no. 9. – P. 2693–2701.
484. Basermann, A. Parallel solvers for electromagnetic field computations on printed circuit boards / A. Basermann, H. Tohya, F. Cortial-Goutaudier // IEEE Transactions on magnetics. – 2000. – Vol. 36, no. 4. – P. 1764–1768.
485. Fast computation of RCS from electrically large 3-D homogeneous objects / C.D. Huang, X.Q. Sheng, Y.Q. Wu, M.J. Gou // 10th International symposium on antennas, propagation & EM theory (ISAPE). – Xian, 2012. – P. 878–881.
486. Lanczos, C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators // Journal of research of the National Bureau of standards. – 1950. – Vol. 45. – P. 255–282.
487. Arnoldi, W. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem // Quarterly of applied mathematics. – 1951. – Vol. 9. – P. 17–29.

488. Hestenes, M. Methods of conjugate gradients for solving linear systems / M. Hestenes, E. Stiefel // Journal of research of the National Bureau of standards. – 1952. – Vol. 49. – P. 409–436.
489. Lanczos, C. Solution of systems of linear equations by minimized iterations // Journal of research of the National Bureau of standards. – 1952. – Vol. 49. – P. 33–53.
490. Craig, E.J. The N-step iteration procedures // Journal of mathematical physics. – 1955. – Vol. 34. – P. 64–73.
491. Paige, C. Solution of sparse indefinite systems of linear equations / C. Paige, M. Saunders // SIAM Journal on numerical analysis. – 1975. – Vol. 12. – P. 617–629.
492. Fletcher, R. Conjugate gradient methods for indefinite systems // Proceedings of the Dundee Biennial conference on numerical analysis. – New York: Springer-Verlag, 1975. – P. 73–89.
493. Concus, P. A. Generalized conjugate gradient method for nonsymmetric systems of linear equations / P. Concus, G. Golub // Second International symposium of computer methods in applied sciences and engineering. – New York: Springer-Verlag, 1976. – P. 56–65.
494. Vinsome, P. ORTHOMIN: an iterative method for solving sparse sets of simultaneous linear equations // Proceedings of the fourth symposium of reservoir simulation, society of petroleum engineers of AIME. – 1976. – P. 149–159.
495. Meijerink, J.A. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix / J.A. Meijerink, H. Van der Vorst // Mathematics of computation. – 1977. – Vol. 31, no. 137. – P. 148–162.
496. Widlund, O. A Lanczos method for a class of non-symmetric systems of linear equations // SIAM Journal on numerical analysis. – 1978. – Vol. 15. – P. 801–802.
497. Jea, K. Generalized conjugate-gradient acceleration of nonsymmetrizable iterative methods / K. Jea, D. Young // Linear algebra and its applications. – 1980. – Vol. 34. – P. 159–194.
498. Wesseling, P. Numerical experiments with a multiple grid and a preconditioned Lanczos type method / P. Wesseling, P. Sonneveld // Lecture notes in mathematics. – 1980. – Vol. 771. – P. 543–562.
499. Saad, Y. Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems // Mathematics of computation. – 1981. – Vol. 37. – P. 105–126.
500. Paige, C.C. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares / C.C. Paige, M.A. Saunders // ACM Transactions on mathematical. – 1982. – Vol. 8, no. 1. – P. 43–71.
501. Eisenstat, S.C. Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations / S.C. Eisenstat, H.C. Elman, M.H. Schultz // SIAM Journal on numerical analysis. – Vol. 20, no. 2. – P. 345–357.
502. Saad, Y. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems / Y. Saad, M. H. Schultz // SIAM Journal on scientific and statistical computing. – 1986. – Vol. 7. – P. 856–869.
503. Sonneveld, P. CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on scientific and statistical computing. – 1989. – V. 10, no 1. – P. 36–52.
504. Van der Vorst, H.A. A Petrov-Galerkin type method for solving $Ax = b$, where A is symmetric complex / H. Van der Vorst, J.B.M. Melissen // IEEE Transactions on Magnetics. – 1990. – Vol. 26. – P. 706–708.
505. Freund, R.W. QMR: a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems / R.W. Freund, N.M. Nachtigal // Numerische Mathematik. – 1991. – Vol. 60, no.3. – P. 315–339.
506. Van der Vorst, H.A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on scientific and statistical computing. – 1992. – Vol. 13, no. 2. – P. 631–644.
507. Gutknecht, M.H. Variants of BICGSTAB for matrices with complex spectrum // SIAM Journal on scientific computing. – 1993. – Vol. 14. – P. 1020–1033.

508. Sleijpen, G.L. BiCGStab(l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum / G.L.G Sleijpen, D.R. Fokkema // *Electronic transactions on numerical analysis*. – 1993 – Vol. 1, – P. 11–32.
509. Freund, R.W. An implementation of the QMR method based on coupled two-term recurrences / R.W. Freund, N.M. Nachtigal // *SIAM Journal on scientific computing*. – 1994. – Vol. 15. – P. 313–337
510. Weiss, R. Error-minimizing Krylov subspace methods // *SIAM Journal on scientific computing*. – 1994. – Vol. 15. – P. 511–527.
511. A quasi-minimal residual variant of the Bi-CGSTAB algorithm for nonsymmetric systems / T.F. Chan, E. Gallopoulos, V. Simoncini, T. Szeto, C.H. Tong // *SIAM Journal on scientific computing*. – 1994. – Vol. 15. – P. 338–347.
512. Freund, R.W. A new Krylov-subspace method for symmetric indefinite linear systems / R.W. Freund, N.M. Nachtigal // *Proceedings of the Fourteenth IMACS world congress on computational and applied mathematics (IMACS)*. – 1994. – P. 1253–1256.
513. Kasenally, E.M. GMBACK: a generalized minimum backward error algorithm for nonsymmetric linear systems // *SIAM Journal on scientific computing*. – 1995. – Vol. 16. – P. 698–719.
514. Fokkema, D.R. Generalized conjugate gradient squared / D.R. Fokkema, G.L.G Sleijpen, H. Van der Vorst, // *Journal of computational and applied mathematics*. – 1996. – Vol. 71. – P. 125–146.
515. Pocock, M.D. The complex Bi-conjugate Gradient solver applied to large electromagnetic scattering problems, computational costs, and cost scaling / M.D. Pocock, S.P. Walker // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. – 1997. – Vol. 45. – P. 140–146.
516. Zhang, S.-L. GPBi-CG: generalized product-type methods based on Bi-CG for solving nonsymmetric linear systems // *SIAM Journal on scientific computing*. – 1997. – Vol. 18. – P. 537–551.
517. De Sturler, E. Truncation strategies for optimal Krylov subspace methods // *SIAM Journal on numerical analysis*. – 1999. – Vol. 36, no. 3. – P. 864–889.
518. Sadok, H. CMRH: A new method for solving nonsymmetric linear systems based on the Hessenberg reduction algorithm // *Numerical algorithms*. – 1999. – No. 20. – P. 303–321.
519. Szyld, D.B. FQMR: a flexible quasi-minimal residual method with inexact preconditioning / D.B. Szyld, J.A. Vogel // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2001. – Vol. 23, no. 2. – P. 363–380.
520. Sogabe T., Zhang S.-L. A COCR method for solving complex symmetric linear systems / T. Sogabe, S.-L. Zhang // *Journal of computational and applied mathematics*. – 2007. – Vol. 199. – P. 297–303.
521. Sonneveld, P. IDR(s): A family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric systems of linear equations / P. Sonneveld, M.B. van Gijzen // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2008. – Vol. 31, no. 2. – P. 1035–1062.
522. Ильин, В.П. Методы бисопряженных направлений в подпространствах Крылова // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2008. – Т. 11, № 4(36). – С. 47–60.
523. Il'in, V.P. Methods of semiconjugate directions // *Russian journal numerical analysis mathematical modelling*. – 2008. – Vol. 23, no. 4. – P. 369–387.
524. Lanczos-type variants of the COCR method for complex nonsymmetric linear systems / Y.-F. Jing, T.-Z. Huang, Y. Zhang, et al. // *Journal of computational physics*. – 2009. – Vol. 228, no. 17. – P. 6376–6394.
525. Abe, K. BiCR variants of the hybrid BiCG methods for solving linear systems with nonsymmetric matrices / K. Abe, G.L.G Sleijpen // *Journal of computational and applied mathematics*. – 2010. – Vol. 234. – P. 985–994.
526. Tanio, M. GBi-CGSTAB(s,l): IDR(s) with higher-order stabilization polynomials / M. Tanio, M. Sugihara // *Journal of computational and applied mathematics*. – 2010. – Vol. 235, no. 3. – P. 765–784.

527. Hicken, J.E. A simplified and flexible variant of GCROT for solving nonsymmetric linear systems / J.E. Hicken, D.W. Zingg // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2010. – Vol. 32. – P. 1672–1694.
528. Carpentieri, B. The BiCOR and CORS iterative algorithm for solving nonsymmetric linear systems / B. Carpentieri, Y.-F. Jing, T.-Z. Huang // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2011. – Vol. 33. – P. 3020–3036.
529. A generalized product-type biCOR method and its application in signal deconvolution / L. Zhao, T.-Z. Huang, Y.-F. Jing, L.-J. Deng // *Computers & mathematics with applications*. – 2013. – Vol. 66. – P. 1372–1388.
530. Zhao, L. A hybrid variant of the biCOR method for a nonsymmetric linear system with a complex spectrum / L. Zhao, T.-Z. Huang // *Applied mathematics letters*. – 2013. – Vol. 26, no. 10. – P. 457–462.
531. Hajarian, M. The generalized QMRCGSTAB algorithm for solving Sylvester-transpose matrix equations // *Applied mathematics letters*. – 2013. – Vol. 26, no. 10. – P. 1013–1017.
532. A quasi-minimal residual variant of the biCORSTAB method for nonsymmetric linear systems / D.-L. Sun, Y.-F. Jing, T.-Z. Huang, B. Carpentieri // *Computers & mathematics with applications*. – 2014. – Vol. 67. – P. 1743–1755.
533. Zhang, J. Generalized conjugate A-orthogonal residual squared method for complex non-hermitian linear systems // *Journal of computational mathematics*. – 2014. – Vol. 32. – P. 248–265.
534. Simoncini, V. Flexible inner-outer Krylov subspace methods / V. Simoncini, D.B. Szyld // *SIAM Journal on numerical analysis*. – 2003. – Vol. 40. – P. 2219–2239.
535. Иткина, Н.Б. Применение разрывного метода Галёркина для решения сингулярно-возмущенных задач / Н. Б. Иткина, С. И. Марков // *Вычислительные технологии: научный журнал*. – 2016. – Т. 21, № 4. – С. 49–63.
536. Bangtsson, E. Approaches to reduce the computational cost when solving linear systems of equations arising in boundary element method discretizations / E. Bangtsson, M. Neytcheva // Uppsala University, Department of Information Technology, TR/2003–053. URL: <http://www.it.uu.se/research/publications/reports/2003-053/2003-053-nc.pdf>.
537. Brezinski, C. Historical developments in the 20th century / C. Brezinski, L. Wuytack (eds). – Amsterdam, et al.: Elsevier, 2001. – 512 p.
538. Evans, D.J. The use of pre-conditioning in iterative methods for solving linear equations with symmetric positive definite matrices // *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*. – 1968. – Vol. 4. – P. 295–314.
539. Колотилина Л.Ю. Явно предобусловленные системы линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей // *Советская математика*. – 1988. – №43. – С. 2566–2573.
540. Benzi, M. Preconditioning techniques for large linear systems: a survey // *Journal of computational physics*. – 2002. – Vol. 182. – P. 418–447.
541. Chan, K. Matrix preconditioning techniques and applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 601 p.
542. Vassilevski, P.S. Multilevel block factorization preconditioners, matrix-based analysis and algorithms for solving finite element equations. – New York: Springer-Verlag, 2008. – 514 p.
543. Lee, J. Incomplete LU preconditioning for large scale dense complex linear systems from electromagnetic wave scattering problems / J. Lee, J. Zhang, C. Lu // *Journal of computational physics*. – 2003. – Vol. 185. – P. 158–175.
544. Antonini, G. Fast iterative solution for the wavelet-PEEC method / G. Antonini, A. Orlandi, A. Ruehli // *Proceedings of 14th International Zurich symposium on EMC*. – Zurich, Switzerland, 2001. – P. 1–4.
545. Rahola, J. Iterative solution of dense linear systems arising from the electrostatic integral equation in MEG / J. Rahola, S. Tissari // *Physics in medicine and biology*. – 2002. – No. 47. – P.961–975.

546. Zunoubi, M.R. A combined BI-CGSTAB(l) and wavelet transform method for EM problems using method of moments // *Progress in electromagnetics research*. – 2005. – Vol. 52. – P. 205–224.
547. Saad, Y. ILUT: a dual threshold incomplete LU factorization // *Numerical linear algebra with applications*. – 1994. – Vol. 4, no. 1. – P. 387–402.
548. Saad, Y. BILUTM: a domain-based multilevel block ILUT preconditioner for general sparse matrices / Y. Saad, J. Zhang // *SIAM Journal on matrix analysis and applications*. – 1999. – Vol. 21, no. 1. – P. 279–299.
549. Li, N. Crout versions of ILU for general sparse matrices / N. Li, Y. Saad, E. Chow // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2003. – Vol. 25, no. 2. – P. 716–728.
550. Carpentieri, B. Sparse pattern selection strategies for robust Frobenius-norm minimization preconditioners in electromagnetism / B. Carpentieri, I.S. Duff, L. Giraud // *Numerical Linear algebra with applications*. – 2000. – Vol. 7. – P. 667–685.
551. Benzi, M. Numerical experiments with two approximate inverse preconditioners / M. Benzi, M. Tuma // *BIT Numerical mathematics*. – 1998. – Vol. 38, no. 2 234–231
552. Benzi, M. A comparative study of sparse approximate inverse preconditioners / M. Benzi, M. Tuma // *Applied numerical mathematics*. – 1999. – Vol. 30. – P. 305–340.
553. Chow, E. Approximate inverse preconditioners via sparse-sparse iterations / E. Chow, Y. Saad // *SIAM Journal on scientific computing*. –1998. –Vol. 19, no. 3. – P. 995–1023.
554. Grote, M. Parallel preconditioning with sparse approximate inverses / M. Grote, T. Huckle // *SIAM Journal on scientific computing*. – 1997. – Vol. 18. – P. 838–853.
555. Kolotilina, L.Yu. Factorized sparse approximate inverse preconditioning. I: Theory / L.Yu. Kolotilina, A.Yu. Yeremin // *SIAM Journal on matrix analysis and applications*. – 1993. – Vol. 14. – P. 45–58.
556. A robust AINV-type method for constructing sparse approximate inverse preconditioners in factored form / S.A. Kharchenko, L.Yu. Kolotilina, A.A. Nikishin, A.Yu. Yeremin // *Numerical linear algebra with application*. – 2001. – Vol. 8, no. 3. – P. 165–179.
557. Benzi, M. Robust approximate inverse preconditioning for the conjugate gradient method / M. Benzi, J.K. Cullum, M. Tuma // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2000. – Vol. 22. – P. 318–1332.
558. Preconditioners for adaptive integral method implementation / W.-B. Ewe, L.-W. Li, Q. Wu, M.-S. Leong // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. – 2005. – Vol. 53, no. 7. – P. 2346–2350.
559. Numerically efficient solution of dense linear system of equations arising in a class electromagnetic scattering problems / J.R. Poirier, P. Boderies, R. Mittra, V. Varadarajan // *IEEE Transactions on antennas and propagation*. – 1998. – Vol. 46, no. 8. – P. 1169–1175.
560. Alleon, G. Sparse approximate inverse preconditioning for dense linear systems arising in computation of electromagnetic / G. Alleon, M. Benzi, L. Giraud // *Numerical algorithms*. – 1997. – Vol. 16. – P. 1–15
561. Sparse symmetric preconditioners for dense linear systems in electromagnetism / B. Carpentieri, I.S. Duff, L. Giraud, M. Magolu monga Made // *Numerical linear algebra with applications*. – 2004. – Vol. 11. – P. 753–771.
562. Carpentieri, B. Sparse preconditioners for dense linear systems from electromagnetics applications. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, CERFACS, 2002.
563. Wavelet-like bases for the fast solution of second-kind integral equation / B. Alpet, G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin // *SIAM Journal on scientific computing*. – 1993. – Vol. 14, no. 1. – P. 159–184.
564. Сивцев, С.Т. Применение вейвлет-преобразования при решении СЛАУ итерационными методами / С.Т. Сивцев, С.П. Куксенко // *Материалы докладов Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2008»*. – 2008. – Т. 1. – С. 74–77.

565. Franza, O. Wavelet-like bases for solving scattering integral equation / O. Franza, R. Wagner, W.C. Chew // Proceedings of the IEEE Antennas and propagation international symposium. – 1994. – P. 3–6.
566. Wagner, R.L. A study of wavelets for the solution of electromagnetic integral equations / R.L. Wagner, W.C. Chew // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1995. – Vol. 43, no. 8. – P. 802–810.
567. Chen, K. Discrete wavelet transforms accelerated sparse preconditioners for dense boundary element systems // Electronic transactions on numerical analysis. – 1999. – Vol. 8. – P. 138–153.
568. Ford, J.M. An improved DWT-based preconditioner for dense matrix problem // Manchester centre for computational mathematics numerical analysis reports. Numerical analysis report No. 412, 2002. – 21 p.
569. Prakash, V.V.S. An efficient preconditioner for iterative solvers / V.V.S. Prakash, R. Mitra // Turkish journal of electrical engineering & computer sciences. – 2002. – Vol. 10, no. 2. – P. 371–375.
570. Solution of dense systems of linear equations arising from integral equation formulations / K. Forsman, W. Gropp, L. Kettunen, D. Levine, J. Salonen // IEEE Transactions antennas and propagation. – 1995. – Vol. 37, no. 6. – P. 96–100.
571. Sertel, K. Incomplete LU preconditioner for FMM implementations / K. Sertel, J.L. Volakis // Microwave and optical technology letters. – 2000. – Vol. 26. – P. 265–267.
572. Puzyrev, V. A review of block Krylov subspace methods for multisource electromagnetic modeling / V. Puzyrev, J.M. Cela // Geophysical journal international. – 2015. – Vol. 202. – P. 1241–1252.
573. O’Leary, D.P. The block conjugate gradient algorithm and related methods // Linear algebra with applications. – 1980. – Vol. 29. – P. 293–322.
574. Vital, B. Etude de quelques methodes de resolution de problemes lineaires de grande taille sur multi-processeur. PhD thesis, Universite de Rennes I, Rennes, 1990.
575. Freund, R.W. A block-QMR algorithm for non hermitian linear systems with multiple right-hand sides / R.W. Freund, M. Malhotra // Linear algebra with applications. – 1997. – Vol. 254. – P. 119–157.
576. Guennouni, A. A block version of BiCGSTAB for linear systems with multiple right-hand sides / A.E. Guennouni, K. Jbilou, H. Sadok // Electronic Transactions on Numerical Analysis. – 2003. – Vol. 16. – P. 129–142.
577. Karimi, S. The block least squares method for solving nonsymmetric linear systems with multiple right-hand sides / S. Karimi, F. Toutounian // Applied mathematics and computation. – 2006. – Vol. 177. – P. 852–862.
578. A block IDR (s) method for nonsymmetric linear systems with multiple right-hand sides / L. Du, T. Sogabe, B. Yu, Y. Yamamoto, S.-L. Zhang // Journal of computational and applied mathematics. – 2011. – Vol. 235, no. 14. – P. 4095–4106.
579. Meng, J. A block GCROT(m,k) method for linear systems with multiple right-hand sides / J. Meng, P.-Y. Zhu, H.-B. Li // Mathematics. – 2014. – Vol. 255. – P. 544–554.
580. Aminia, S. The block CMRH method for solving nonsymmetric linear systems with multiple right-hand sides / S. Aminia, F. Toutounianab, M. Gachpazana // Journal of computational and applied mathematics. – 2018. – Vol. 337. – P. 166–174.
581. Smith, C.F. A conjugate gradient algorithm for the treatment of multiple incident electromagnetic fields / C.F. Smith, A.F. Peterson, R. Mitra // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1989. – Vol. 37, no. 11. – P. 1490–1493.
582. Simoncini, V. An iterative method for nonsymmetric systems with multiple right-hand sides / V. Simoncini, E. Gallopoulos // SIAM Journal on scientific computing. – 1995. – Vol. 16. – P. 917–933.

583. Lingen, F.J. A generalized conjugate residual method for the solution of non-symmetric systems of equations with multiple right-hand sides // *International journal for numerical methods in engineering*. – 1999. – Vol. 44. – P. 641–656.
584. Kilmer, M. QMR-based projection techniques for the solution of non-Hermitian systems with multiple right-hand sides / M. Kilmer, E. Miller, C. Rappaport // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2001. – Vol. 23. – P. 761–780.
585. Li, X. MINRES seed projection methods for solving symmetric linear systems with multiple right-hand sides / X. Li, H. Liu, J. Zhu // *Mathematical problems in engineering*. – 2014. – Vol. 2014. URL: <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2014/357874>.
586. Yang, L. An efficient method MEGCR for solving systems with multiple right-hand sides in 3-D parasitic inductance extraction / L. Yang, X. Guo, Z. Wang // *Proceedings of the design automation conference*. – 2004. – P. 702–706.
587. El Guennouni A. A Note on the Block and Seed BiCGSTAB algorithms for nonsymmetric multiple linear systems / A. el Guennouni, K. Jbilou // *American journal of algorithms and computing*. – 2016. – Vol. 3, no. 1. – P. 1–13.
588. Chan, T.F. Analysis of projection methods for solving linear systems with multiple right-hand sides / T.F. Chan, W. Wang // *SIAM Journal on scientific computing*. – 1997. – Vol. 18. – P. 1698–1721.
589. Beik, F.P.A. On the global Krylov subspace methods for solving general coupled matrix equations / F.P.A. Beik, D.K. Salkuyeh // *Computers & mathematics with applications*. – 2011. – Vol. 62. – P. 4605–4613.
590. Jbilou, K. Global FOM and GMRES algorithms for matrix equations / K. Jbilou, A. Messaoudi, H. Sadok // *Applied numerical mathematics*. – 1999. – Vol. 31. – P. 49–63.
591. Jbilou, K. Oblique projection methods for linear systems with multiple right-hand sides / K. Jbilou, H. Sadok, A. Tinzeft // *Electronic transactions on numerical analysis*. – 2005. – Vol. 20. – P. 119–138.
592. Heyouni, M. The global Hessenberg and global CMRH methods for linear systems with multiple right-hand sides // *Numerical algorithms*. – 2001. – Vol. 26. – P. 317–332.
593. Gu, C. Global SCD algorithm for real positive definite linear systems with multiple right-hand sides / C. Gu, Z. Yang // *Applied mathematics and computation*. – 2007. – Vol. 189. – P. 59–67.
594. Zhang, J. Generalized global conjugate gradient squared algorithm / J. Zhang, H. Dai, J. Zhao // *Applied mathematics and computation*. – 2010. – Vol. 216. – P. 3694–3706.
595. Zhang, J. A new family of global methods for linear systems with multiple right-hand sides / J. Zhang, H. Dai, J. Zhao // *Journal of computational and applied mathematics*. – 2011. – Vol. 236. – P. 1562–1575.
596. On short recurrence Krylov type methods for linear systems with many right-hand sides / S. Rashedi, G. Ebadi, S. Birk, A. Frommer, // *Journal of computational and applied mathematics*. – 2016. – Vol. 300. – P. 18–29.
597. Yu, F. Recursive least-squares algorithms with good numerical stability for multichannel active noise control / F. Yu, M. Bouchard // *IEEE International conference on acoustics, speech, and signal processing*. – 2001. – Vol. 5. – P. 3221–3224.
598. Griva, I. Linear and nonlinear optimization / I. Griva, S.G. Nash, A. Sofer. – 2nd ed. – Philadelphia: SIAM, 2008. – 764 p.
599. Kelley, C.T. Iterative methods for linear and nonlinear equations. – Philadelphia: SIAM, 1995. – 166 p.
600. Recycling Krylov subspaces for sequences of linear systems / M.L. Parks, E. de Sturler, G. Mackey, et al. // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2006. – Vol. 28, no. 5. – P. 1651–1674.

601. Simoncini, V. A hybrid block GMRES method for nonsymmetric systems with multiple right-hand sides / V. Simoncini, E. Gallopoulos // *Journal of computational and applied mathematics*. – 1996. – Vol. 66. – P. 457–469.
602. Birk, S. Deflated shifted block Krylov subspace methods for hermitian positive definite matrices. Ph.D. Thesis, Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften der Bergischen Universität Wuppertal. – 2015. – P. 250.
603. Tebbens J.D. Preconditioner updates for solving sequences of linear systems in matrix-free environment / J.D. Tebbens, M. Tuma // *Numerical linear algebra with application*. – 2010. – Vol. 17, no. 6. – P. 997–1019.
604. Brown, P.N. Hybrid Krylov methods for solving systems of nonlinear equations / P.N. Brown, Y. Saad // *SIAM Journal on scientific computing*. – 1990. – Vol. 11. – P. 450–481.
605. Knoll, D.A. Newton-Krylov methods applied to a system of convection-reaction-diffusion equations / D.A. Knoll, P.R. McHugh // *Computer physics communications*. – 1995. – Vol. 88, no. 2–3. – P. 141–160.
606. Knoll, D.A. Newton-Krylov methods for low-Mach-number compressible combustion / D.A. Knoll, P.R. McHugh, D.E. Keyes // *AIAA Journal*. – 1996. – Vol. 34, no. 5. – P. 961–967.
607. Meister, A. Efficient preconditioning of linear systems arising from the discretization of hyperbolic conservation laws / Meister A., Vömel C. // *Advances in computational mathematics*. – 2001. – Vol. 14, no. 1. – P. 49–73.
608. Meurant, G. On the incomplete Cholesky decomposition of a class of perturbed matrices // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2001. – Vol. 23. – P. 419–429.
609. Tebbens, J.D. Efficient preconditioning of sequences of nonsymmetric linear systems / J.D. Tebbens, M. Tuma // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2007. – Vol. 29, no. 5. – P. 1918–1941.
610. Benzi, M. Approximate inverse preconditioning for shifted linear systems / M. Benzi, D. Bertaccini // *BIT Numerical Mathematics*. – 2003. – Vol. 43, no. 2. – P. 231–244.
611. Calgaro, C. Incremental incomplete LU factorizations with applications / C. Calgaro, J.P. Chehab, Y. Saad // *Numerical linear algebra with applications*. – 2010. – Vol. 17, no. 5. – P. 811–837.
612. Bellavia, S. Nonsymmetric preconditioner updates in Newton-Krylov methods for nonlinear systems / S. Bellavia, D. Bertaccini, B. Morini // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2011. – Vol. 33, no. 5. – P. 2595–2619.
613. Efficient preconditioner updates for shifted linear systems / S. Bellavia, V. de Simone, D. di Serafino, B. Morini // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2011. – Vol. 33, no. 4. – P. 1785–1809.
614. A Preconditioning framework for sequences of diagonally modified linear systems arising in optimization / S. Bellavia, V. de Simone, D. di Serafino, B. Morini // *SIAM Journal numerical analysis*. – 2012. – Vol. 50, no. 6. – P. 3280–3302.
615. Bellavia, S. New updates of incomplete LU factorizations and applications to large nonlinear systems / S. Bellavia, B. Morini, M. Porcelli // *Optimization methods and software*. – 2014. – Vol. 29, no. 2. – P. 321–340.
616. Bai, Y.Q. Accelerated preconditioner updates for solving shifted linear systems / Y.Q. Bai, T.Z. Huang, W.H. Luo // *International journal of computer mathematics*. – 2016. – Vol. 94, no. 4. – P. 747–756.
617. Preconditioner updates applied to CFD model problems / P. Birken, J.D. Tebbens, A. Meister, M. Tuma // *Applied numerical mathematics*. – 2008. – Vol. 58, no. 11. – P. 1628–1641.
618. Jolivet, P. Block iterative methods and recycling for improved scalability of linear solvers / P. Jolivet, P.H. Tournier // *Proceedings of the International conference for high performance computing, networking, storage and analysis*. – 2016. – P. 1–15.
619. Kilmer, M.E. Recycling subspace information for diffuse optical tomography / M.E. Kilmer, E. de Sturler // *SIAM Journal on scientific computing*. – 2006. – Vol. 27, no. 6. – P. 2140–2166.

620. Jing, Y.F. A simpler GMRES and its adaptive variant for shifted linear systems / Y.F. Jing, P. Yuan, T.Z. Huang // Numerical linear algebra with applications. – 2017. – Vol. 24, no. 1. – P. 1–7.
621. Multipreconditioned GMRES for shifted systems / T. Bakhos, P.K. Kitaniadis, S. Ladenheim, A.K. Saibaba, D.B. Szyld // SIAM Journal on scientific computing. – 2017. – Vol. 39, no. 5. – P. 222–247.
622. Soodhalter, K.M. Two recursive GMRES-type methods for shifted linear systems with general preconditioning // Electronic transactions on numerical analysis. – 2016. – Vol. 45. – P. 499–523.
623. Газизов, Т.Р. Оптимизация допуска обнуления при решении СЛАУ итерационными методами с предобуславливанием в задачах вычислительной электродинамики / Т.Р. Газизов, С.П. Куксенко // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2004. – №8. – С. 26–28.
624. Куксенко, С.П. Совершенствование способов предфильтрации для решения СЛАУ с плотной матрицей итерационными методами с предобуславливанием в задачах вычислительной электродинамики / С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – №9. – С. 12–17.
625. Куксенко, С.П. Новый способ предфильтрации при решении СЛАУ с плотными матрицами итерационными методами с предобуславливанием // Материалы Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2007», посвященная 45-летию ТУСУРа. – Томск, 2007. – Ч. 1. – С. 341–344.
626. Гвоздев, В.И. Объемные интегральные схемы СВЧ / Гвоздев В.И., Нефёдов Е.И. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 256 с.
627. Лесков, А.Н. Сравнительное вычисление волнового сопротивления симметричной полосковой линии / А.Н. Лесков, С.П. Куксенко // Материалы XI международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск: В-Спектр, 2015. – Ч. 2. – С. 66–68.
628. Gazizov, T.R. Solving the complexity problem in the electronics production process by reducing the sensitivity of transmission line characteristics to their parameter variations / T.R. Gazizov, I.Ye. Sagiyeva, and S.P. Kuksenko // Complexity. – Vol. 2019. – 11 p. URL:<https://doi.org/10.1155/2019/6301326>.
629. Гутник, К.А. Совершенствование адаптивного итерационного выбора оптимальной сегментации границ структуры проводников и диэлектриков / К.А. Гутник, С.П. Куксенко // Материалы XI международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск: В-Спектр, 2015. – Ч. 2. – С. 63–66.
630. Lezhnin, E.V. Algorithm of nonequidistant segmentation of boundaries of conductors and dielectrics for computer-aided design of strip structures / E.V. Lezhnin, S.P. Kuksenko // Proceedings of IEEE 2017 International multi-conference on engineering, computer and information sciences (SIBIRCON). – Novosibirsk, 2017. – P. 468–471.
631. CUDA [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://developer.nvidia.com/cuda-zone>, свободный (дата обращения: 08.02.2019).
632. Салов, В.К. Использование графического ускорителя для вычисления элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений в системе TALGAT / В.К. Салов, К.Э. Джанбаев, С.П. Куксенко // Доклады ТУСУР. – 2015. – № 4(38). – С. 140–143.
633. Ахунов, Р.Р. Форматы хранения разреженных матриц и ускорение решения СЛАУ с плотной матрицей итерационными методами / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, В.К. Салов, Т.Р. Газизов // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXV. Записки научных семинаров ПОМИ. – 2012. – Т. 405(25). – С. 24–39.

634. Ахунов, Р.Р. Усовершенствование алгоритма $ILU(0)$ -разложения, использующего разреженный строчный формат / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, В.К. Салов, Т.Р. Газизов // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXV. Записки научных семинаров ПОМИ. – 2012. – Т. 405(25). – С. 40–53.
635. Ускорение вычислений в задачах моделирования ЭМС / В.К. Салов, С.П. Куксенко, М.Е. Комнатнов, Р.Р. Ахунов и др. // Труды 9-го Международного симпозиума по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. – Санкт-Петербург, 2011. – С. 269–272.
636. Пути решения актуальных проблем проектирования радиоэлектронных средств с учетом электромагнитной совместимости / Т.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий, А.О. Мелкозеров, С.П. Куксенко и др. // Техника радиосвязи. – 2014. – № 2 (22). – С. 11–22.
637. New results on EMC simulation for space projects of TUSUR University / T. Gazizov, A. Melkozherov, P. Orlov, V. Salov, et al. // IEEE International conference on numerical electromagnetic modeling and optimization for RF, microwave, and terahertz applications. – Pavia, Italy, 2014. – P. 1–4.
638. Ахунов, Р.Р. Вычисление матрицы емкостей произвольной системы проводников и диэлектриков методом моментов: оценка использования разреженного строчного формата при решении СЛАУ методом BiCGStab / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2012. – Т. 55, №7/2. – С. 27–30.
639. Лежнин, Е.В. Алгоритм $ILU(0)$ -разложения с использованием OpenMP / Е.В. Лежнин, Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко // Доклады ТУСУР. – 2015. – № 3(37). – С. 181–183.
640. Kuksenko, S.P. Approximation of an initial matrix by a Toeplitz one for acceleration of iterative solution of dense linear algebraic systems in scattering problems / S.P. Kuksenko, T.R. Gazizov, I.S. Kostarev. // International Siberian conference on control and communications (SIBCON 2016). – 2016. – P. 1–5.
641. OpenMP [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.openmp.org, свободный (дата обращения: 31.01.2019).
642. Антонов, А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 77 с.
643. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
644. Коняев, Д.А. Математическое моделирование дифракции акустических и электромагнитных полей на сложных рассеивателях методом конечных элементов / Д.А. Коняев, А.Л. Делицын // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – №4. – 36 с. URL: <http://jre.cplire.ru/win/apr14/3/text.pdf>.
645. Коняев, Д.А. Применение метода конечных элементов в задаче дифракции акустических и электромагнитных полей в сложных средах. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. – Москва, 2014. – 142 с.
646. Лемешко, К.А. Оценка эффективности использования $ILU(0)$ -разложения при анализе полосковых структур / К.А. Лемешко, С.П. Куксенко // Материалы двенадцатой международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск: В-Спектр, 2016. – Т. 1. – С. 213–215.
647. Ахунов, Р.Р. Многократное решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами с предобуславливанием в задачах электромагнитной совместимости / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов, П.Е. Орлов. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2015. – 152 с.

648. Суровцев, Р.С. Ускорение многократного решения СЛАУ с частично изменяющейся матрицей / Р.С. Суровцев, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Доклады ТУСУР. – 2011. – №2-1. – С. 141–144.
649. Суровцев, Р.С. Аналитическая оценка вычислительных затрат на решение СЛАУ при многократном вычислении емкостной матрицы в диапазоне изменения диэлектрической проницаемости диэлектриков / Р.С. Суровцев, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXVII // Записки научных семинаров ПОМИ Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 2014. – Т. 428. – С. 196–207.
650. Богачев, К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений: монография. – Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1998. – 137 с.
651. Суровцев Р.С. Многократное решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью блочного LU-разложения для вычисления емкостной матрицы системы проводников и диэлектриков при изменении ее параметров / Р.С. Суровцев, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Доклады ТУСУР. – 2015. – № 3(37). – С. 132–138.
652. Суровцев, Р.С. Многократное вычисление емкостной матрицы системы проводников и диэлектриков с изменяющимися параметрами с помощью блочного LU-разложения при решении СЛАУ / Р.С. Суровцев, С.П. Куксенко, Газизов Т.Р. // Инфокоммуникационные технологии. – 2015. – Т. 13, №4. – С. 375–384.
653. Gazizov, T.R. Acceleration of multiple solution of a boundary value problem involving a linear algebraic system / T.R. Gazizov, S.P. Kuksenko, R.S. Surovtsev // Proceedings of the 13th International conference of numerical analysis and applied mathematics. – 2015. – P. 1–4.
654. Газизов, Р.Р. Численные оценки эффективности использования перенумерации подынтервалов границ проводников и диэлектриков при многовариантном анализе полосковых структур / Р.Р. Газизов, Е.В. Лежнин, С.П. Куксенко // Материалы двенадцатой международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск: В-Спектр, 2016. – Т. 1. – С. 203–205.
655. Газизов, Р.Р. Оценки использования перенумерации подынтервалов границ проводников и диэлектриков при многовариантном анализе полосковых структур / Р.Р. Газизов, Е.В. Лежнин, С.П. Куксенко // Микроэлектроника и информатика-2017: материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов. – Москва, 2017. – С. 14–20.
656. Газизов, Р.Р. Комплексные оценки использования алгоритма перенумерации при многовариантном анализе полосковых структур / Р.Р. Газизов, Е.В. Лежнин, С.П. Куксенко // Материалы XIII международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления», посвященной 55-летию ТУСУРа. – Томск, 2017. – Ч. 2. – С.8–10.
657. Куксенко, С.П. Использование метода BiCGStab для решения нескольких СЛАУ с одинаковой плотной несимметричной матрицей в задачах вычислительной электродинамики // Сборник научных трудов третьей международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления» посвященной 60-летию Победы в Великой Отечественной Войне и 110-летию изобретения радио. – Томск, 2005. – Ч. 2. – С. 128–132.
658. Куксенко, С.П. Гибридный метод решения СЛАУ для вычисления матрицы коэффициентов электростатической индукции многопроводных линий передачи в диапазоне значений диэлектрической проницаемости // Инфокоммуникационные технологии. – 2019. – Т. 17, № 2. – С. 7–16.

659. Компьютерное моделирование сложных структур проводников при проектировании телевизионно-вычислительных систем / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко, А.М. Заболоцкий // Известия вузов. Приборостроение. – 2005. – Т. 48, № 11. – С. 64–67.
660. Система компьютерного моделирования сложных структур проводников и диэлектриков TALGAT / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. // Компьютерные учебные программы и инновации. – 2007. – № 10. – С. 89–90.
661. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки №8376 от 24.05.2007. Система компьютерного моделирования сложных структур проводников и диэлектриков TALGAT / Т.Р. Газизов, Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П. – Зарегистрировано в Отраслевом фонде алгоритмов и программ Госкоорцентра Минобрнауки РФ с присвоением номера государственной регистрации ВНИИЦ №50200701103.
662. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2009614871. TALGAT 2008 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка №2009613644. Дата поступления 9.07.2009. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 8.09.2009.
663. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010613497. TALGAT 2009 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка №2010612008. Дата поступления 13.04.2010. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 28.05.2010.
664. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012610712. TALGAT 2010 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка №2011617178. Дата поступления 26.09.2011. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 13.01.2012.
665. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012660373. TALGAT 2011 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка №2012618426. Дата поступления 5.10.2012. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16.11.2012.
666. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013619615. TALGAT 2012 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка №2013617773. Дата поступления 29.08.2013. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11.10.2013.
667. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №20156143. TALGAT 2013 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка № 2015611288. Дата поступления 03.03.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16.04.2015.
668. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617550. TALGAT 2014 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка №2015614488. Дата поступления 27.05.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 17.07.2015.
669. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015660487. TALGAT 2015 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка №2015617580. Дата поступления 17.08.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 01.10.2015.
670. Новые возможности системы моделирования электромагнитной совместимости TALGAT / С.П. Куксенко, А.М. Заболоцкий, А.О. Мелкозеров и Т.Р. Газизов // Доклады ТУСУР. – 2015. – № 2(36). – С. 45–50.

671. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016662520. TALGAT 2016 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка №20166619296. Дата поступления 01.09.2016. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 14.11.2016.
672. Квасников, А.А. Расширение функциональных возможностей и совершенствование графического интерфейса системы TALGAT / А.А. Квасников, Е.В. Лежнин, С.П. Куксенко // Материалы XI международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск, 2015. – Ч. 2. – С. 39–42.
673. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018611481. TALGAT 2017 / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. – Заявка №2017663209. Дата поступления 13.12.2017. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02.02.2018.
674. Комплексная оптимизация генетическими алгоритмами для обеспечения ЭМС / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко и др. // Сборник научных докладов VI Международного симпозиума по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. – Санкт-Петербург, 2005. – С. 160–164.
675. Квасников, А.А. Разработка подсистем графического интерфейса системы TALGAT / А.А. Квасников, С.П. Куксенко, Е.В. Лежнин // Материалы XIII международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления», посвященной 55-летию ТУСУРа. – Томск, 2017. – Ч. 2. – С.15–18.
676. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661022. SEplate / М.Е. Комнатнов, Т.Р. Газизов, С.П. Куксенко. – Заявка 2014615110. Дата поступления 29.05.2014. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22.10.2014.
677. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014617440. SEbox / М.Е. Комнатнов, Т.Р. Газизов, С.П. Куксенко. – Заявка №2014615102. Дата поступления 29.05.2014. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22.07.2014.
678. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018661874. Вычисление и трехмерное отображение эффективности экранирования металлическим корпусом с апертурой / А.А. Квасников, М.Е. Комнатнов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2018616275. Дата поступления 18.06.2018. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20.09.2018.
679. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615793. Многократное решение систем линейных алгебраических уравнений с частично изменяющейся матрицей / Р.С. Суровцев, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка № 2015612566. Дата поступления 02.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 25.05.2015.
680. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015618664 РФ. Вычисление комплексной емкостной матрицы многопроводной микрополосковой линии на подложке из FR-4 в диапазоне частот с помощью блочного LU-разложения / Р.С. Суровцев, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка № 2015612938. Дата поступления 02.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 13.08.2015.
681. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615730. Организация хранения плотной матрицы в модифицированном строчном разреженном формате после предфильтрации, основанной на максимальном элементе матрицы / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2015612891. Дата поступления 09.04.2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22.05.2015.

682. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615835. LU(0)-разложение матрицы, хранимой в разреженном строчном формате, с последовательным перебором элементов / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2015612781. Дата поступления 09.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26.05.2015.
683. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616205. LU(0)-разложение матрицы, хранимой в модифицированном разреженном строчном формате / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2015612783. Дата поступления 09.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 03.06.2015.
684. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616124. LU(0)-разложение матрицы, хранимой в модифицированном разреженном строчном формате, с использованием вспомогательного вектора / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2015612895. Дата поступления 09.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 01.06.2015.
685. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616321. Решение СЛАУ с матрицей, полученной с помощью LU(0)-разложения и хранимой в модифицированном разреженном строчном формате / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2015612893. Дата поступления 09.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05.06.2015.
686. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616322. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGstab с использованием при решении текущей системы вектора решения предыдущей / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2015612894. Дата поступления 09.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05.06.2015.
687. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616320. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGstab с использованием матрицы предобусловливания, полученной при решении первой системы / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2015612892. Дата поступления 09.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05.06.2015.
688. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615837. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGstab с использованием переформирования матрицы предобусловливания по заданному порогу числа итераций / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2015612782. Дата поступления 09.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26.05.2015.
689. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615729. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGstab с переформированием матрицы предобусловливания при превышении среднего времени решения одной системы / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка №2015612890. Дата поступления 09.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22.05.2015.
690. Automatically Tuned Linear Algebra Software (ATLAS) [электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.netlib.org/atlas>, свободный (дата обращения 12.02.19).
691. LAPACK – Linear Algebra PACKage [электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.netlib.org/lapack>, свободный (дата обращения 12.02.19).
692. AMD Optimizing CPU Libraries (AOCL) – AMD [электронный ресурс]. Режим доступа: <https://developer.amd.com/amd-cpu-libraries/>, свободный (дата обращения 12.02.19).
693. Комнатнов, М.Е. Сравнение производительности математических библиотек на примере решения системы линейных алгебраических уравнений / М.Е. Комнатнов, С.П. Куксенко // Материалы докладов научно-технической конференции молодых

- специалистов ОАО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнева» «Разработка, производство, испытания и эксплуатация космических аппаратов и систем», посвященной 50-летию полета в космос Ю.А. Гагарина. – Железногорск, 2011. – С. 396–398.
694. Комнатнов, М.Е. Сравнение производительности математических библиотек при использовании различных типов данных / М.Е. Комнатнов, С.П. Куксенко // Материалы докладов всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2011». – Томск, 2011. – Ч. 1. – С. 127–129.
695. Boost C++ Libraries [Электронный ресурс]: библиотека линейной алгебры. – Режим доступа: <http://www.boost.org>, свободный (дата обращения 12.02.2019).
696. Куксенко, С.П. Сравнение вычислительных и аналитических оценок ускорения многократного решения СЛАУ блочным LU-разложением / С.П. Куксенко, Р.С. Суровцев // Доклады ТУСУР. – 2016. – Т. 19. – №2. – С. 71–75.
697. Мусабаев, Р.Р. Программная реализация алгоритма вычисления матрицы погонных сопротивлений многопроводной линии передачи в системе TALGAT / Р.Р. Мусабаев, Е.В. Лежнин, С.П. Куксенко // Материалы Всероссийской научно-технической конференции «Современные проблемы радиоэлектроники». – 2017. – С. 16–18.
698. Квасников, А.А. Совершенствование алгоритма вычисления матрицы погонных сопротивлений линии передачи / А.А. Квасников, С.П. Куксенко // Материалы XIV международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – 2018. – С. 290–293.
699. Lazar, Q. Mastering Qt 5 / Q. Lazar, R. Penea // Packt Publishing, 2016. – 517 p.
700. Qt Widgets – Qt Documentation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://doc.qt.io/qt-5/qtwidgets-index.html>, свободный (дата обращения: 27.02.2019).
701. Фаулер, М. Архитектура корпоративных программных приложений / М. Фаулер – Вильяме, 2006 – 544 с.
702. Study and classification of potential IEMI sources / N. Mora, F. Vega, G. Lugrin, F. Rachidi et al. // System design and assessment notes. – 2014. – Note 41. – P. 1–48.
703. Салов, В.К. Ускорение вычислений за счет использования графических процессоров / В.К. Салов, С.П. Куксенко // Материалы докладов научно-технической конференции молодых специалистов ОАО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнева» «Разработка, производство, испытания и эксплуатация космических аппаратов и систем», посвященной 50-летию полета в космос Ю.А. Гагарина. – Железногорск, 2011. – С. 419–420.
704. Three.js [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://plot.ly/python/>, свободный (дата обращения 30.02.2019).
705. csg.js docs [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://evanw.github.io/csg.js/docs/>, свободный (дата обращения: 30.02.2019).
706. CrashRpt [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://crashrpt.sourceforge.net>, свободный (дата обращения 21.02.2019).
707. Куксенко, С.П. Методы решения СЛАУ в задачах вычислительной электродинамики / С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Вестник Томского государственного педагогического университета. Серия: Естественные и точные науки. Спецвыпуск. – 2005. – №7. – С. 144–149.
708. Куксенко, С.П. Совершенствование предобусловливания при решении СЛАУ с плотной матрицей итерационными методами / С.П. Куксенко, Т.Н. Савельева // 2-ая научно-методическая конференция «Групповое проектное обучение». – Томск, 2007. – Т. 1. – С. 150–153.

709. Куksenko, С.П. Итерационные методы решения СЛАУ в вычислительной электродинамике. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 136 с.
710. Kuksenko S.P. Dense linear system solution by preconditioned iterative methods in computational electromagnetic / S.P. Kuksenko, T.R. Gazizov // 19th International Zurich symposium of electromagnetic compatibility. – 2008. – P. 918–921.
711. Куksenko, С.П. Сравнение итерационных методов при использовании предобуславливания на примере определения токов в проводной антенне / С.П. Куksenko, С.Т. Сивцев // 4-ая международная научно-практическая конференция «Электронные средства и системы управления. Опыт инновационного развития». – Томск, 2007. – Ч.1. – С. 254–258.
712. Куksenko, С.П. Изменение оптимального значения допуска обнуления от частоты сигнала и дискретизации антенны / С.П. Куksenko, С.Т. Сивцев // Сборник научных трудов XV международной молодежной научной конференции «Туполевские чтения». – Казань, 2007. – Т. 2. – С. 206–208.
713. Куksenko, С.П. Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей / С.П. Куksenko, Т.Р. Газизов. – Томск: Томский государственный университет, 2007. – 208 с.
714. Kominami, M. On the integral equation of piecewise linear antennas / M. Kominami, K. Rokushima // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1981. – Vol. 29. – P. 787–792.
715. Рыбин, А.П. Моделирование и экспериментальное исследование широкополосных антенн в ДКМВ диапазоне / А.П. Рыбин, А.Г. Лоцилов, Н.Д. Малютин // Сборник научных трудов всероссийской научно-технической конференции «Научная сессия ТУСУР– 2004». – Томск, 2004. – С. 122–125.
716. Куksenko, С.П. Оптимизация параметров стабилизированного метода бисопряжённых градиентов при решении задач вычислительной электродинамики / С.П. Куksenko, Т.Р. Газизов // Материалы Шестой Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы информационной безопасности государства, общества и личности». – Томск, 2004. – С.113–115.
717. Куksenko, С.П. Исследование решения системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом BiCGstab // Сборник научных трудов всероссийской научно-технической конференции «Научная сессия ТУСУР-2004». – Томск, 2004. – Ч. 1. – С. 110–113.
718. Куksenko, С.П. Повышение эффективности решения системы линейных алгебраических уравнений // Сборник научных трудов XII международной молодежной научной конференции «Туполевские чтения». – Казань, 2004. – Т. 3. – С. 160–161.
719. Куksenko, С.П. Ускорение решения СЛАУ в задачах вычислительной электродинамики / С.П. Куksenko, Т.Р. Газизов // Материалы Седьмой Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы информационной безопасности государства, общества и личности». – Томск, 2005. – С. 54–57.
720. Куksenko, С.П. Сравнение способов предфильтрации при решении СЛАУ с плотной матрицей итерационными методами с предобуславливанием / С.П. Куksenko, Т.Р. Газизов // Инфокоммуникационные технологии. – 2007. – Т. 5, № 2. – С. 61–65.
721. Куksenko, С.П. Зависимость оптимального допуска обнуления от дискретизации антенны / С.П. Куksenko, С.Т. Сивцев // Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2007», посвященная 45-летию ТУСУРа. – Томск, 2007. – С. 119–122.
722. Using spectral low preconditioners for large electromagnetic calculations / Duff I.S., Giraud L., Langou J., Martin E // CERFACS technical report TR/PA/03/95. – 1995. – 16 p.

723. Еремин, А.Ю. Переобусловливание линейных систем с несимметричными матрицами с помощью факторизованных разреженных приближенных обратных / А.Ю. Еремин, А.А. Никишин // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2002. – Т. 284. – С. 18–35.
724. On the performance of certain iterative solvers for coupled systems arising in discretization of non-newtonian flow equations / O. Lliev, J. Linn, M. Moog, et al. // European congress on computational methods in applied sciences and engineering. – 2004. – P. 1–28.
725. Gazizov, T.R. Stable delay of microstrip line with side grounded conductors / T.R. Gazizov, V.K. Salov, S.P. Kuksenko // Wireless communications and mobile computing. – 2017. – V. 2017. – P. 1–5.
726. Ахунов, Р.Р. Многократное решение СЛАУ с частично изменяющейся матрицей итерационным методом / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, В.К. Салов, Т.Р. Газизов // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXV. Записки научных семинаров ПОМИ. – 2013. – Т. 419. – С. 16–25.
727. Ахунов, Р.Р. Ускорение многократного решения СЛАУ итерационным методом при вычислении емкости микрополосковой линии в широком диапазоне изменения ее размеров / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXVII. Записки научных семинаров ПОМИ. – 2014. – Т. 428. – С. 32–41.
728. Ahunov, R.R. Multiple solution of linear algebraic systems by an iterative method with recomputed preconditioner in the analysis of microstrip structures / S.P. Kuksenko, T.R. Gazizov // Proceedings of the 13th International conference of numerical analysis and applied mathematics. – Rhodes, Greece, 2015. – P. 1–4.
729. Ensurance and simulation of electromagnetic compatibility: recent results in TUSUR University / T. Gazizov, A. Melkozerov, A. Zabolotsky, S. Kuksenko et. al. // International conference on applied physics, simulation and computers. – Vienna, Austria, 2015. – 1–12.
730. New developments for improved simulation of interconnects based on method of moments / S.P. Kuksenko, T.R. Gazizov, A.M. Zabolotsky, R.R. Ahunov et al. // Proceedings of the 2015 International conference on modelling, simulation and applied mathematics (MSAM2015). – Phuket, Thailand, 2015. – P. 1–8.
731. Kuksenko, S.P. Choosing order of operations to accelerate strip structure analysis in parameter range / S.P. Kuksenko, R.R. Ahunov, T.R. Gazizov // Journal of physics: conference series. – 2018. – Vol. 1015, no. 3. – P. 1–6.
732. Ахунов, Р.Р. Многократное решение СЛАУ итерационным методом с переформированием матрицы предобусловливания / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXVII. Записки научных семинаров ПОМИ. – 2014. – Т. 428. – С. 42–48.
733. Ахунов, Р.Р. Ускорение многократного решения СЛАУ с изменяющейся матрицей / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко // Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015», посвященная 90-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука. – Новосибирск, 2015. – С. 84–90.
734. Ахунов, Р.Р. Многократное решение систем линейных алгебраических уравнений итерационным методом с адаптивным переформированием предобусловливателя / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – 56(8). – С. 1395–1400.
735. Ахунов, Р.Р. Простой способ ускорения вычисления емкостных матриц полосковой структуры при изменении её геометрического параметра / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Доклады ТУСУР. – 2015. – № 4. – С. 144–148.

736. Gazizov, T.R. Acceleration of multiple solution of linear systems for analyses of microstrip structures / T.R. Gazizov, S.P. Kuksenko, R.R. Akhunov // *International journal of mathematical models and methods in applied sciences*. – 2015. – Vol. 9. – P. 721–726.
737. Zabolotsky, A.M. Improved design of modal filter for electronics protection / A.M. Zabolotsky, T.R. Gazizov, A.O. Melkozerov, P.E. Orlov, E.S. Dolganov // *Proceedings of 31-th International conference on lightning protection*. – 2012. – P. 1–4.
738. Возможности применения новых модальных явлений в целях электромагнитного терроризма и для защиты от него / Т.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов и др. // *Труды VII Международного симпозиума по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии*. – Санкт-Петербург, 2007. – С. 266–269.
739. Заболоцкий, А.М. Использование зеркальной симметрии для совершенствования модальной фильтрации / А.М. Заболоцкий. – *Доклады ТУСУР*. – 2015. – № 2(36). – С. 41–44.
740. Kuksenko, S.P. Multiple solution of linear algebraic systems by iterative methods in the analysis of modal filters // *Proceedings of IEEE 2017 International multi-conference on engineering, computer and information sciences (SIBIRCON)*. – Novosibirsk, 2017. – P. 449–452.
741. Куксенко, С.П. Усовершенствование алгоритма вычисления методом моментов ёмкостных матриц структуры проводников и диэлектриков в диапазоне значений диэлектрической проницаемости / С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // *Электромагнитные волны и электронные системы*. – 2012. – №10. – С. 13–21.
742. Куксенко, С.П. Моделирование помехозащищенной сети электропитания космического аппарата // *Труды МАИ*. – 2019. – №105. – С. 1–20. URL: http://trudymai.ru/upload/iblock/36b/Kuksenko_rus.pdf.
743. Суровцев, Р.С. Вычисление матрицы емкостей произвольной системы проводников и диэлектриков методом моментов: зависимость ускорения за счет блочного LU-разложения от порядка матрицы СЛАУ / Р.С. Суровцев, С.П. Куксенко // *Известия высших учебных заведений. Физика*. – 2012. – Т. 55, №9/3. – С. 126–130.
744. Совершенствование моделирования и обеспечения электромагнитной совместимости бортовой радиоэлектронной аппаратуры космических аппаратов: моногр. / В.К. Салов, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко, П.Е. Орлов, Р.С. Суровцев. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2014. – 131 с.
745. Салов, В.К. Важность корректного учёта частотной зависимости диэлектрической проницаемости материалов при моделировании задач ЭМС / В.К. Салов, П.Е. Орлов, Т.Р. Газизов // *Известия высших учебных заведений. Физика*. – 2012. – Т. 55, №9/3. – С. 106–108.
746. Djordjevich, A.R. Wideband frequency-domain characterization of FR-4 and time-domain causality / A.R. Djordjevich, R.M. Biljic, V.D. Likar-Smiljanic, et al. // *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* – 2001. – Vol. 43, № 4. – P. 662–666.
747. Куксенко С.П. Использование блочного LU-разложения для ускорения вычисления временного отклика связанных линий передачи с учетом частотной зависимости диэлектрической проницаемости подложки / С.П. Куксенко, В.К. Салов, Р.С. Суровцев // *Инфокоммуникационные технологии*. – 2013. – Т. 12, №3. – С. 64–69.
748. Wouwer, A.V. Simulation of ODE/PDE models with MATLAB®, OCTAVE and SCILAB. Scientific and engineering applications / A.V. Wouwer, P. Saucez, C. Vilas. – Switzerland: Springer International Publishing, 2014. – 406 p.
749. Quarteroni, A. Scientific computing with MATLAB and Octave / A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio. – Berlin: Springer-Verlag Heidelberg, 2010. – 465 p.

750. Куксенко, С.П. Ускорение многократного вычисления матрицы коэффициентов электростатической индукции полосковой структуры // Доклады ТУСУР. – 2018. – Т. 21, №4-1. – С. 41–46.
751. Белоусов, А.О. Экспериментальное подтверждение модальной фильтрации в многопроводной микрополосковой линии / А.О. Белоусов, А.М. Заболоцкий, Т.Р. Газизов // Доклады ТУСУР. – 2016. – № 3 (19). – С. 51–54.
752. Куксенко, С.П. Электромагнитная совместимость: моделирование / Под ред. Т.Р. Газизова // – Томск: В-Спектр, 2018. – 188 с.
753. Kuksenko, S.P. Preliminary results of TUSUR University project for design of spacecraft power distribution network: EMC simulation // Journal of physics: conference series. – 2019. – P. 1–6.
754. Orlov, P.E. Modal distortions of pulse signal in multiconductor pcb structure / P.E. Orlov, T.R. Gazizov, S.P. Kuksenko // International Siberian conference on control and communications (SIBCON 2016). – 2016. – P. 1–3.
755. Orlov, P.E. Modal distortions of pulse signal in multiconductor PCB structure / P.E. Orlov, T.R. Gazizov, S.P. Kuksenko // International Siberian conference on control and communications (SIBCON 2016). – Moscow, 2016. – P. 1–3.
756. Новый подход к компоновке плоских кабелей в необслуживаемых летательных аппаратах / Е.Н. Буичкин, П.Е. Орлов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов и др. // Materials of the XII international scientific and practical conference «Areas of scientific thought». – Sheffield, 2015. – Vol. 18. – С. 22–24.
757. Широкополосные дискретные недисперсионные фазовращатели на основе эффекта кратного изменения фазовой скорости в многосвязных полосковых структурах с существенно неуравновешенной электромагнитной связью при сохранении согласования в широкой полосе частот / Н.Д. Малютин, А.Г. Лощилев, В.Н. Федоров, Д.Д. Зыков // Доклады ТУСУР. – 2014. – № 4(34). – С. 22–30.
758. Пат. на полезную модель №79355 РФ. Модальный фильтр / Т.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий, И.Г. Бевзенко, И.Е. Самотин, П.Е. Орлов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко, И.С. Костарев. – Заявка №2008127527/22(033781); приоритет 07.07.2008; опубл. 27.12.2008; Бюл. №36.
759. Пат. на полезную модель №79213 РФ. Устройство воздействия на аппаратуру / Т.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий, И.Г. Бевзенко, И.Е. Самотин, П.Е. Орлов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко, И.С. Костарев. – Заявка №2008127574/22(033831); приоритет 07.07.2008; опубл. 20.12.2008; Бюл. №35.
760. Пат. на полезную модель №800100 РФ. Устройство модального зондирования / Т.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий, И.Г. Бевзенко, И.Е. Самотин, П.Е. Орлов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко, И.С. Костарев. – Заявка №2008127580/22(033837); приоритет 07.07.2008; опубл. 20.01.2009; Бюл. №2.
761. Пат. на полезную модель №2386964 РФ. Устройство обнаружения, идентификации и диагностики многопроводных линий передачи / Т.Р. Газизов, А.О. Мелкозеров, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко, П.Е. Орлов, И.Г. Бевзенко, И.Е. Самотин, Т.Т. Газизов, И.С. Костарев. – Заявка №2009108905/28; приоритет 10.03.2009; опубл. 20.04.2010; Бюл. №11.
762. Пат. на изобретение №2431912 РФ. Устройство защиты от импульсных сигналов / Т.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий, И.Г. Бевзенко, И.Е. Самотин, П.Е. Орлов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко, И.С. Костарев. – Заявка №2010108520/07(012016); приоритет 9.03.2010; опубл. 20.10.2011, Бюл. №29.
763. Пат. на изобретение №2600098 РФ. Меандровая линия задержки из двух витков, защищающая от сверхкоротких импульсов / Р.С. Суровцев, Т.Р. Газизов, А.В. Носов,

- А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко. – Заявка №2015137528; приоритет 02.09.2015; опубл. 20.10.2016; Бюл. №29.
764. Пат. на изобретение №2597940 РФ. Линия задержки, защищающая от сверхкоротких импульсов / Р.С. Суровцев, Т.Р. Газизов, А.В. Носов, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко. – Заявка №2015120797; приоритет 01.06.2016; опубл. 20.09.2016; Бюл. №26.
765. Пат. на изобретение №2606776 РФ. Меандровая линия задержки из двух витков с разными разносами, защищающая от сверхкоротких импульсов / Р.С. Суровцев, Т.Р. Газизов, А.В. Носов, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко. – Заявка №2015137524; приоритет 2.09.2015; опубл. 10.01.2017; Бюл. №1.
766. Пат. на изобретение №2606709 РФ. Меандровая линия задержки с лицевой связью, защищающая от сверхкоротких импульсов / А.Т. Газизов, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко. – Заявка №2015137545; приоритет 2.09.2015; опубл. 10.01.2017; Бюл. №1.
767. Пат. на изобретение №2607252 РФ. Меандровая микрополосковая линия задержки, защищающая от сверхкоротких импульсов / Р.С. Суровцев, Т.Р. Газизов, А.В. Носов, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко. – Заявка №2015129255; приоритет 16.07.2015; опубл. 10.01.2017; Бюл. №1.
768. Пат. на изобретение №2637484 РФ. Линия задержки, защищающая от сверхкоротких импульсов с увеличенной длительностью / Т.Р. Газизов, Р.С. Суровцев, А.В. Носов, С.П. Куксенко, Т.Т. Газизов. – Заявка №2016141521; приоритет 21.10.2016; опубл. 4.12.2017; Бюл. №34.
769. Пат. на изобретение №2656834 РФ. Усовершенствованная линия задержки, защищающая от сверхкоротких импульсов с увеличенной длительностью / Т.Р. Газизов, Р.С. Суровцев, А.В. Носов, С.П. Куксенко, Т.Т. Газизов. – Заявка №2016141523; приоритет 21.10.2016; опубл. 6.06.2018; Бюл. №16.
770. Пат. на изобретение №2624465 РФ. Четырехпроводная зеркально-симметричная структура, защищающая от сверхкоротких импульсов / А.М. Заболоцкий, Т.Р. Газизов, С.П. Куксенко. – Заявка № 2015137546; приоритет 02.09.2015; опубл. 04.07.2017; Бюл. №19.
771. Пат. на изобретение №2431897 РФ. Устройство для нарушения работы аппаратуры за счет разложения и восстановления импульсов / Т.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий, И.Г. Бевзенко, И.Е. Самотин, П.Е. Орлов, А.О. Мелкозеров, Т.Т. Газизов, С.П. Куксенко, И.С. Костарев. – Заявка №2010108518/07(012013); приоритет 9.03.2010; опубл. 20.10.2011; Бюл. №29.
772. Пат. на изобретение №2603843 РФ. Способ резервирования для печатных плат / Т.Р. Газизов, П.Е. Орлов, В.Р. Шарафутдинов, О.М. Кузнецова-Таджибаева, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко, Е.Н. Буичкин. – Заявка №2015137547; приоритет 02.09.2015; опубл. 10.12.2016; Бюл. №34.
773. Пат. на изобретение №2603850 РФ. Способ трассировки печатных проводников цепей с резервированием / Т.Р. Газизов, П.Е. Орлов, В.Р. Шарафутдинов, О.М. Кузнецова-Таджибаева, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко, Е.Н. Буичкин. – Заявка №2015129253; приоритет 16.07.2015; опубл. 10.12.2016; Бюл. №34.
774. Пат. на изобретение №2603851 РФ. Способ трассировки печатных проводников с изменением диэлектрического заполнения между ними для цепей с резервированием / Т.Р. Газизов, П.Е. Орлов, В.Р. Шарафутдинов, О.М. Кузнецова-Таджибаева, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко, Е.Н. Буичкин. – Заявка №2015129263; приоритет 16.07.2015; опубл. 10.12.2016; Бюл. №34.
775. Пат. на изобретение №2614156 РФ. Способ компоновки печатных плат для цепей с резервированием / Т.Р. Газизов, П.Е. Орлов, В.Р. Шарафутдинов, О.М. Кузнецова-

- Таджибаева, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко, Е.Н. Буичкин. – Заявка №2015137532; приоритет 02.09.2015; опубл. 23.03.2017; Бюл. №9.
776. Пат. на изобретение №2624637 РФ. Способ внутренней компоновки печатных плат для цепей с резервированием / Т.Р. Газизов, П.Е. Орлов, В.Р. Шарафутдинов, О.М. Кузнецова-Таджибаева, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко, Е.Н. Буичкин. – Заявка №2015137548; приоритет 02.09.2015; опубл. 05.07.2017; Бюл. №19.
777. Пат. на изобретение №2603848 РФ. Способ резервирования плоских кабелей / Т.Р. Газизов, П.Е. Орлов, В.Р. Шарафутдинов, О.М. Кузнецова-Таджибаева, А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко, Е.Н. Буичкин. – Заявка №2015156667; приоритет 28.12.2015; опубл. 10.12.2016; Бюл. №34.
778. Кропотов, В.В. Блок модальных фильтров для сети Ethernet 100 Base-T / В.В. Кропотов, С.П. Куксенко // Материалы XI международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск: В-Спектр, 2015. – Ч. 2. – С. 36–39.
779. Куксенко, С.П. Оценка уровня излучаемых эмиссий семикаскадного модального фильтра для сети Ethernet 100Base-T / С.П. Куксенко, Р.Р. Хажибеков // Материалы двенадцатой международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск: В-Спектр, 2016. – Т. 1. – С. 208–211.
780. Куксенко, С.П. Оценка уровня излучаемой электромагнитной эмиссии семикаскадного модального фильтра для сети Ethernet 100 Base-T / С.П. Куксенко, Р.Р. Хажибеков, Т.Т. Газизов // Технологии ЭМС. – 2017. – №1(60). – С. 13–20.
781. Газизов, Т.Р. Магистерская программа ТУСУРа «Электромагнитная совместимость радиоэлектронной аппаратуры» / Т.Р. Газизов, С.П. Куксенко, А.М. Заболоцкий, М.Е. Комнатнов, В.К. Салов // Технологии ЭМС. – 2016. – №1(56). – С. 24–33.
782. Газизов, Т.Р. Магистерская программа «Электромагнитная совместимость радиоэлектронной аппаратуры» / Т.Р. Газизов, С.П. Куксенко, А.М. Заболоцкий, М.Е. Комнатнов и др. // Материалы международной научно-методической конференции «Современное образование: проблемы взаимосвязи образовательных и профессиональных стандартов». – Томск, 2016. – С. 124–126.
783. Куксенко, С.П. Актуальность подготовки специалистов по электромагнитной совместимости в топливно-энергетическом комплексе Сибири // 22-я Международная научно-практическая конференция «Природные и интеллектуальные ресурсы Сибири (СИБРЕСУРС-22-2016)». – Томск. – 2016. – С. 88–92.
784. Куксенко, С.П. Магистерская программа «Электромагнитная совместимость в топливно-энергетическом комплексе» // Материалы региональной научно-практической конференции «Наука и практика: проектная деятельность от идеи до внедрения». – 2018. – С. 560–565.
785. Куксенко, С.П. Лабораторный практикум для обучения основам построения компьютерных сетей // Материалы международной научно-методической конференции «Современное образование: проблемы взаимосвязи образовательных и профессиональных стандартов». – Россия, Томск, 28–29 января 2016. – С. 115–116.
786. Лаптев, К.Н. Предложения по организации кластеров в образовательных учреждениях / К.Н. Лаптев, С.П. Куксенко // Материалы докладов Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2008». – Томск, 2008. – Т. 1. – С. 77–80.
787. Куксенко, С. П. Информационные технологии: Учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / С. П. Куксенко, А. В. Демаков. – Томск: ТУСУР, 2018. – 57 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/7911>.

788. Хажобеков, Р.Р. Особенности обучения студентов моделированию задач электромагнитной совместимости / Р.Р. Хажобеков, С.П. Куксенко // Материалы международной методической конференции «Современное образование: повышение профессиональной компетентности преподавателей вуза – гарантия обеспечения качества образования». – 2018. – 59–60.
789. Заболоцкий, А.М. Электромагнитная совместимость: моделирование и обеспечение: Учебно-методическое пособие по практическим и самостоятельным занятиям для аспирантов [Электронный ресурс] / А.М. Заболоцкий, С.П. Куксенко. – Томск: ТУСУР, 2017. – 96 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/7503>.
790. Куксенко, С.П. Новая постановка дисциплины «Теория ЭМС радиоэлектронных средств и систем» / С.П. Куксенко, А.О. Белоусов, Носов А.В // Материалы международной научно-методической конференции «Современное образование: проблемы взаимосвязи образовательных и профессиональных стандартов». – Томск, 2016. – С. 134–135.
791. Куксенко, С.П. Теория электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств и систем: Учебно-методическое пособие по практическим, лабораторным и самостоятельным занятиям [Электронный ресурс]. – Томск: ТУСУР, 2016. – 72 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/6528>.
792. Куксенко, С.П. Использование системы TALGAT при решении задач электроэнергетики / С.П. Куксенко, Р.Р. Мусабаев // Материалы региональной научно-практической конференции «Наука и практика: проектная деятельность от идеи до внедрения». – Томск: Изд-во ТУСУР, 2016. – С. 1–2.
793. Куксенко, С.П. Электромагнитная совместимость: электроэнергетика: Учебно-методическое пособие [Электронный ресурс]. – Томск: ТУСУР, 2017. – 265 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/8003>.
794. Куксенко, С.П. Электромагнитная совместимость: вычислительные методы: Учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / С. П. Куксенко. – Томск: ТУСУР, 2017. – 163 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/7887>.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(обязательное)
КОПИИ ДОКУМЕНТОВ



Акционерное общество
«ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПУТНИКОВЫЕ СИСТЕМЫ»
имени академика М.Ф. Решетнёва



ул. Ленина, д. 52, г. Железногорск, ЗАТО Железногорск, Красноярский край, Российская Федерация, 662972
Тел. (3919) 76-40-02, 72-24-39, Факс (3919) 72-26-35, 75-61-46, e-mail: office@iss-reshetnev.ru, http://www.iss-reshetnev.ru
ОГРН 1082452000290, ИНН 2452034898

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель генерального конструктора
по электрическому проектированию и системам
управления КА акционерного общества
«Информационные спутниковые системы»
имени академика М.Ф. Решетнёва» (АО «ИСС»),
председатель секции №2 ИТС, к.т.н., доцент



С.Г. Кочура

« 10 » 07 2019

АКТ

о внедрении (использовании) результатов диссертационной работы
Куксенко Сергея Петровича

Комиссия в составе:

зам. начальника отделения проектирования и испытаний РЭА АО «ИСС» Е.И. Крутских,
начальника отдела конструирования бортовой РЭА АО «ИСС», к.т.н., С.Б. Сунцова,
начальник группы АО «ИСС», к. ф.-м. н. А.А. Хвалько

составила настоящий акт, подтверждающий факт использования в АО «ИСС» при создании КА Экспресс-АТ1, Экспресс-АТ2, Экспресс-80, Экспресс-103, Экспресс-АМУЗ, Экспресс-АМУ7, Экспресс-АМ8 следующих результатов диссертационной работы Куксенко С.П.:

1. Результаты обзора и сравнительной характеристики численных методов и программного обеспечения для моделирования задач электромагнитной совместимости. Разработка программного обеспечения для аппаратно-программного комплекса на базе системы TALGAT. Проведение предварительного электродинамического анализа корпусов бортовой аппаратуры. Проверка достоверности моделирования с помощью разработанного аппаратно-программного комплекса. Эти результаты отражены в технических отчётах по опытно-конструкторской работе «Разработка и поставка аппаратно-программного комплекса для проведения анализа взаимовлияний электрических сигналов бортовой аппаратуры», контракт № 28/08 от 14.04.2008, шифр «АПК-ТУСУР», генеральный заказчик Министерство обороны РФ, 2008–2009 гг. Указанные результаты позволили выполнить оценку взаимовлияний электрических сигналов бортовой аппаратуры.

2. Результаты обзора методов решения системы линейных алгебраических уравнений, способов преобусловливания и предфильтрации, а также форматов хранения разреженных матриц. Разработанное программное обеспечение для решения системы линейных алгебраических уравнений, а также вычисления эффективности экранирования частных структур по аналитическим моделям. Результаты моделирования соединителя СНП 339. Эти результаты отражены в технических отчётах по опытно-конструкторской работе «Разработка комплекса программных и технических средств для контроля информационных магистралей, обеспечения ЭМС и исследования надёжности унифицированного ряда электронных модулей на основе

технологии «система-на-кристалле» для систем управления и электропитания КА связи, навигации и дистанционного зондирования Земли с длительным сроком активного существования», тема «УЭМ-ТУСУР», контракт 95/10 от 24.11.2010 в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2010–2012 гг. Указанные результаты использованы при создании комплекса программных и технических средств разработки унифицированного ряда электронных модулей КА.

3. Результаты аналитического обзора основных методов и программных средств моделирования электромагнитной совместимости. Предварительные оценки эффективности экранирования корпуса блока системы автономной навигации с использованием аналитических моделей и разработанного программного обеспечения. Эти результаты отражены в технических отчётах по опытно-конструкторской работе «Разработка принципов построения и элементов системы автономной навигации с применением отечественной специализированной элементной базы на основе наногетероструктурной технологии для космических аппаратов всех типов орбит», тема «САН», контракт 96/12 от 16.11.2012 в рамках реализации Постановления 218 Правительства РФ, 2012–2015 гг. Указанные результаты позволили выполнить моделирование цепей электрических принципиальных схем и элементов печатных плат блока система автономной навигации с учётом требований электромагнитной совместимости.

4. Результаты обзора литературы в области проектирования сети электропитания, анализ современной научно-технической, нормативной, методической литературы по исследованиям в области проектирования сети электропитания и проработка вариантов, обоснование и выбор средств разработки прототипов программного обеспечения, устройств для мониторинга, испытаний и защиты, аппаратно-программного комплекса, а также проведение патентных исследований в части программной части аппаратно-программного комплекса (программное обеспечение для синтеза топологии и элементов сети электропитания; численные методы; способы сокращения временных затрат на моделирование; программные ускорители; экспертные системы; методы проверки достоверности электромагнитного моделирования; модели и алгоритмы для проектирования технических решений; экранирование). Разработка прототипа программного обеспечения, реализующего математические модели и вычислительные алгоритмы для проектирования предложенных технических решений, на базе системы TALGAT. Эти результаты отражены в отчетах о прикладном научном исследовании «Теоретические и экспериментальные исследования по синтезу оптимальной сети высоковольтного электропитания для космических аппаратов» по проекту ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение о предоставлении субсидии от 26.09.2017 г. №14.574.21.0172, шифр RFMEFI57417X0172, 2017–2020 гг. Указанные результаты позволили разработать прототип программного обеспечения для синтеза оптимальной сети высоковольтного электропитания перспективных космических аппаратов на базе отечественной системы моделирования.

Зам. начальника отделения проектирования и испытаний РЭА АО «ИСС»

Е.И. Крутских

Начальник отдела конструирования бортовой РЭА АО «ИСС», к.т.н.

С.Б. Сунцов

Начальник группы АО «ИСС», к. ф.-м. н.

А.А. Хвалько

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель генерального

директора по научной работе

ОАО «НПЦ «Полус»»



И.В. Балус И.В. Балус

» 04 _____ 2007 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Куксенко С.П.

Научно-техническая комиссия в составе начальника отделения к.т.н. Гордеева К.Г., начальника отдела д.т.н. Казанцева Ю.М., начальника отдела Поспелова В.В. составила настоящий акт в том, что модуль матричных операций MATRIX в составе системы компьютерного моделирования электромагнитной совместимости TALGAT использовался для оценки паразитных электромагнитных эффектов в печатных платах и в кабелях. Он позволил существенно сократить время компьютерного моделирования, что ускорило анализ ряда проектных решений с учетом электромагнитной совместимости.

Начальник отделения, к.т.н.

К.Г. Гордеев
К.Г. Гордеев

Начальник отдела, д.т.н.

Ю.М. Казанцев
Ю.М. Казанцев

Начальник отдела

В.В. Поспелов
В.В. Поспелов

УТВЕРЖДАЮ
Генеральный директор
ООО «Эремекс», д.т.н.

С.А. Сорокин

«08» июля 2019 г.



АКТ

о внедрении (использовании) результатов диссертационной работы
Куксенко Сергея Петровича

Настоящим актом подтверждается факт использования в
ООО «Эремекс» следующих результатов диссертационной работы
С.П. Куксенко:

с использованием системы TALGAT выполнено квазистатическое
моделирование меандровых линий задержки при изменении их
геометрических и электрофизических параметров (многовариантный анализ).

Результаты использованы в ходе выполнения научно-исследовательской
работы (НИР) по теме «Разработка математических моделей для трассировки
меандровых линий задержки с оптимальными параметрами» (тема «Змейки»,
договор № Р-20130122 от 18.01.2013). Указанные результаты представлены в
техническом отчёте по НИР (регистрационный номер 01201367746,
зарегистрировано 30.07.2013 в государственном информационном фонде
неопубликованных документов ФГАНУ «Центр информационных
технологий и систем органов исполнительной власти»).

Указанные результаты использованы при разработке математических
моделей для вычисления задержек в меандровых линиях для различных
стеков и параметров печатных плат. Куксенко С.П. являлся исполнителем
указанной НИР в 2013 г.

Технический директор
ООО «Эремекс»

д.т.н., профессор

С.Ю. Лузин

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель начальника Главного
управления МЧС России
по Томской области

А.Е. Башкатов

«» 2019 г.

АКТ

о внедрении (использовании) результатов диссертационной работы
Куксенко Сергея Петровича

Настоящим актом подтверждается факт использования в Главном управлении МЧС России по Томской области следующих результатов диссертационной работы С.П.Куксенко :

с использованием системы TALGAT выполнено электродинамическое моделирование проводных антенн ведомственной связи;

для защиты сетевого оборудования Fast Ethernet использованы полосковые модальные фильтры.

Указанные результаты позволили выявить пути совершенствования работы сети ведомственной связи КВ диапазона, а также организовать защищенную от кондуктивных помех структурированную кабельную сеть учреждения.

Начальник отдела информационных
технологий и связи – начальник связи
Главного управления



О.С.Каймонов

А К Т № 31315
ввода в эксплуатацию

«15» декабря 2006 г.

Система компьютерного моделирования электромагнитной совместимости
(название Произведения)

Комиссия в составе:

- Ехлаков Ю.П. - Проректор по информатизации ТУСУРа, председатель комиссии;
Безходарнов И.В. - директор ООО «Томсксофт», член комиссии;
Бойченко И.В. - доцент кафедры АСУ, член комиссии;
Назаркин С.Н. - начальник отдела ЦТТ, член комиссии;
Севченко П.В. - доцент кафедры АОИ, член комиссии;

созданная, на основании приказа ректора № 5609 от 11.07.06 г., составила настоящий акт о
следующем:

Комиссия в период с 1 декабря по 15 декабря 2006 года провела приемку работ
временного трудового коллектива № 31315 «Разработка системы компьютерного
моделирования электромагнитной совместимости», выполненных в рамках мероприятия
3.1.3.в. «Разработка и внедрение информационных систем обеспечения и мониторинга
учебного процесса, научной и организационно-экономической деятельности».

Комиссии при приемке были предъявлены:

- Служебное задание на выполнение работ;
- Заявка;
- План работ;
- Техническая документация;
- Программное обеспечение;

Комиссия установила:

3.1. В рамках реализации мероприятия выполнены следующие работы:

- Разработана система компьютерного моделирования электромагнитной
совместимости;
- Произведено документирование системы.

3.2. Разработанное программное обеспечение соответствует требованиям служебного
задания и заявкам на разработку.

3.3. Представленная техническая документация соответствует версии программного
обеспечения.

Комиссия постановила:

- Принять работы в целом;
- Зарегистрировать программный продукт в отраслевом фонде алгоритмов и программ;
- Внедрить программный продукт в учебно-научном процессе;
- Установить срок полезного использования продукта – 2 год.

Комиссия считает целесообразным:

- Произвести доработку технической документации в соответствии с заданием.



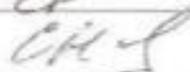
Ехлаков Ю.П.



Безходарнов И.В.



Бойченко И.В.



Назаркин С.Н.



Сенченко П.В.



Ехлаков Ю.П.

«12» 04 2007г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Куксенко С.П.
в систему компьютерного моделирования электромагнитной совместимости

Комиссия в составе Назаркина С.Н. начальника отдела ЦТТ, Безходарнова И.В. директора ООО «Томсксофт», Бойченко И.В. доцента кафедры АСУ и Сенченко П.В. доцента кафедры АОИ составила настоящий акт о внедрении результатов диссертационной работы Куксенко С.П. в систему компьютерного моделирования электромагнитной совместимости.

В рамках реализации системы выполнены следующие работы:

1. Изучение особенностей математических моделей. (Проведен анализ теоретических основ методов решения СЛАУ с плотными действительными и комплексными матрицами большой размерности и анализ теоретических основ построения точных и итерационных методов решения СЛАУ. Изучены основы построения предобусловливания, позволяющих уменьшить время решения СЛАУ.)

2. Предварительная разработка алгоритмов. (Разработаны алгоритмы метода сопряженных градиентов, метода бисопряженных градиентов, стабилизированного метода бисопряженных градиентов, квадратичного метода сопряженных градиентов, метода квази-минимальных невязок, метода обобщенных минимальных невязок, функции вычисления коэффициентов матрицы Гивенса и функции применения вращений Гивенса. Разработаны алгоритмы функций, используемых в итерационных методах, функций фильтрации, определяющих портрет (структуру) разреженности матрицы предобусловливания, функций, реализующих способы вычисления матрицы предобусловливания, функций, реализующих корректирующие шаги для учета влияния матрицы предобусловливания, написан алгоритм функции визуализации матриц.)

3. Программирование на уровне системы, комплексов, компонентов и функций. (Кодирование в составе консольного приложения компонента матричных операций.)

4. Автономная отладка исходного кода на уровне системы, комплексов, компонентов и функций.

5. Комплексное тестирование и отладка. (Протестирована возможность решения системы линейных алгебраических уравнений прямыми и итерационными методами.)

6. Разработка программных документов, проведение испытаний. (Корректировка программы и программной документации по результатам испытаний. Локализация выявленных ошибок в системе по результатам испытаний. Окончательная отладка кода. Внесение изменений в программную документацию по результатам испытаний.)



Безходарнов И.В.



Бойченко И.В.



Назаркин С.Н.



Сенченко П.В.



УТВЕРЖДАЮ
Проректор по НРиИ
д.т.н., проф. Мещеряков Р.В.
18.12.2015

АКТ внедрения №2/2015 от 18.12.2015

Настоящим актом подтверждается факт внедрения (использования) в ОКР по теме «САН», хоздоговор 96/12 от 16.11.2012, выполняемой в ходе реализации Постановления 218 Правительства РФ, следующих результатов интеллектуальной деятельности:

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611088. PCVsensor. Орлов П.Е., Газизов Т.Р., Заболоцкий А.М. – Заявка №2014661973. Дата поступления 25 ноября 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 23 января 2015 г.
2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015614365. TALGAT 2013. Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П., Заболоцкий А.М., Газизов Р.Р., Лежнин Ев.В., Салов В.К., Лежнин Ег.В., Орлов П.Е., Калимулин И.Ф., Суровцев Р.С., Комнатнов М.Е., Ахунов Р.Р., Новикова Е.А. Заявка №2015611288. Дата поступления 3 марта 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16 апреля 2015 г.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615835. ILU(0)-разложение матрицы, хранимой в разреженном строчном формате, с последовательным перебором элементов. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612781. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.
4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616205. ILU(0)-разложение матрицы, хранимой в модифицированном разреженном строчном формате. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612783. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 03 июня 2015 г.
5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616124. ILU(0)-разложение матрицы, хранимой в модифицированном разреженном строчном формате, с использованием вспомогательного вектора. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612895. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 01 июня 2015 г.
6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615730. Организация хранения плотной матрицы в модифицированном строчном разреженном формате после предфильтрации, основанной на максимальном элементе матрицы. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612891. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22 мая 2015 г.
7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615837. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGStab с использованием переформирования матрицы предобуславливания по заданному порогу числа итераций. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов

- Т.Р. Заявка №2015612782. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.
8. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615729. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGStab с переформированием матрицы предобуславливания при превышении среднего времени решения одной системы. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612890. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22 мая 2015 г.
 9. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615793. Многократное решение систем линейных алгебраических уравнений. Авторы: Суровцев Р.С., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612566. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 25 мая 2015 г.
 10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615987. Вычисление дифференциальной ёмкости, индуктивности и сопротивления для связанных обращено-подвешенных полосковых линий. Авторы: Заболоцкий А.М., Газизов Т.Р., Калимулин И.Ф. Заявка №2015612593. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 28 мая 2015 г.
 11. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616060. Вычисление дифференциальной ёмкости, индуктивности и сопротивления для связанных подвешенных полосковых линий. Авторы: Заболоцкий А.М., Газизов Т.Р., Калимулин И.Ф. Заявка №2015612715. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29 мая 2015 г.
 12. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615988. Многорезонансная модель индуктивности Murata LQW2BHN33NJ03 для диапазона частот 0,01–40 ГГц. Авторы: Калимулин И.Ф., Заболоцкий А.М. Заявка №2015612601. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29 мая 2015 г.
 13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616087. Многорезонансная модель конденсатора Murata GRM21BR71H224K для диапазона частот 0,01–40 ГГц. Авторы: Калимулин И.Ф., Заболоцкий А.М. Заявка №2015612625. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29 мая 2015 г.
 14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615845. Модель LC-фильтра на базе компонентов Murata GRM21BR71H224K и LQW2BHN33NJ03 для диапазона частот 0,01–40 ГГц. Авторы: Калимулин И.Ф., Заболоцкий А.М. Заявка №2015612624. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.
 15. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615589. Оптимизация параметров измерительных плат набора TRL Calkit for UTF3680 с учётом технологии производства. Авторы: Калимулин И.Ф., Заболоцкий А.М. Заявка №2015612554. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 21 мая 2015 г.
 16. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615880. Вычисление напряжений и токов вдоль двухпроводной линии

- передачи на основе квазистатического анализа / Р.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий – Заявка №2015612556. Дата поступления 2 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.
17. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615794. Вычисление временного отклика модального фильтра с лицевой связью / А.М. Заболоцкий, А.Т. Газизов, Т.Р. Газизов – Заявка №2015612568. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 25 мая 2015 г.
 18. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616321. Решение СЛАУ с матрицей, полученной с помощью $ILU(0)$ -разложения и хранимой в модифицированном разреженном строчном формате. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612893. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05 июня 2015 г.
 19. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616320. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGStab с использованием матрицы предобуславливания, полученной при решении первой системы. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612892. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05 июня 2015 г.
 20. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616322. Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGstab с использованием при решении текущей системы вектора решения предыдущей. Авторы: Ахунов Р.Р., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612894. Дата поступления 09 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 05 июня 2015 г.
 21. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617207. Временной отклик последовательного интерфейса процессора. Авторы: Зырянова Н.А., Суровцев Р.С., Комнатнов М.Е., Газизов Т.Р. Заявка №2015614262. Дата поступления 22 мая 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 03 июля 2015 г.
 22. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617542. Вычисление дифференциальной ёмкости, индуктивности и сопротивления для связанных обращенных полосковых линий. Авторы: Заболоцкий А.М., Газизов Т.Р., Калимулин И.Ф. Заявка №2015612552. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 14 июля 2015 г.
 23. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015618664. Вычисление комплексной емкостной матрицы многопроводной микрополосковой линии на подложке из FR-4 в диапазоне частот с помощью блочного LU-разложения. Авторы: Суровцев Р.С., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Заявка №2015612938. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 13 августа 2015 г.
 24. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617550. TALGAT 2014. Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П., Заболоцкий А.М., Газизов Р.Р., Лежнин Ев.В., Салов В.К., Лежнин Ег.В., Орлов П.Е., Калимулин И.Ф., Суровцев Р.С., Комнатнов М.Е., Ахунов Р.Р., Новикова Е.А., Газизов Руст.Р., Веселовский А.В.

- Заявка №2015614488. Дата поступления 27 мая 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 17 июля 2015 г.
25. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015660487. TALGAT 2015. Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т., Куксенко С.П., Заболоцкий А.М., Газизов Русл.Р., Лежнин Ев.В., Салов В.К., Лежнин Ег.В., Орлов П.Е., Калимулин И.Ф., Суровцев Р.С., Комнатнов М.Е., Ахунов Р.Р., Газизов Руст.Р., Веселовский А.В. Заявка №2015617580. Дата поступления 17 августа 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 1 октября 2015 г.
 26. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615988. Многорезонансная модель индуктивности Murata LQW2BHN33NJ03 для диапазона частот 0,01–40 ГГц. Авторы: Калимулин И.Ф., Заболоцкий А.М. Заявка №2015612601. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29 мая 2015 г.
 27. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616087. Многорезонансная модель конденсатора Murata GRM21BR71H224K для диапазона частот 0,01–40 ГГц. Авторы: Калимулин И.Ф., Заболоцкий А.М. Заявка №2015612625. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29 мая 2015 г.
 28. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615845. Модель LC-фильтра на базе компонентов Murata GRM21BR71H224K и LQW2BHN33NJ03 для диапазона частот 0,01–40 ГГц. Авторы: Калимулин И.Ф., Заболоцкий А.М. Заявка №2015612624. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.
 29. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615589. Оптимизация параметров измерительных плат набора TRL Calkit for UTF3680 с учётом технологии производства. Авторы: Калимулин И.Ф., Заболоцкий А.М. Заявка №2015612554. Дата поступления 02 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 21 мая 2015 г.
 30. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615880. Вычисление напряжений и токов вдоль двухпроводной линии передачи на основе квазистатического анализа / Р.Р. Газизов, А.М. Заболоцкий – Заявка №2015612556. Дата поступления 2 апреля 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.
 31. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617207. Временной отклик последовательного интерфейса процессора. Авторы: Зырянова Н.А., Суровцев Р.С., Комнатнов М.Е., Газизов Т.Р. Заявка №2015614262. Дата поступления 22 мая 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 03 июля 2015 г.

Указанные программы использовались для моделирования и обеспечения электромагнитной совместимости цепей электрических принципиальных схем, элементов печатных плат и конструкции блока системы автономной навигации космического аппарата. Результаты внедрения (использования) представлены в технических отчетах по теме «САН».

Руководитель темы «САН»
технологий ТУСУРА

директор НИИ космических



д.т.н. Ю.А. Шиняков



УТВЕРЖДАЮ
Проректор по НИИ ТУСУРа
д.т.н., проф. Мещеряков Р.В.
«20» 01 2015 г.

АКТ внедрения №1/2015 от 20.01.2015

Настоящим актом подтверждается факт внедрения (использования) на этапе 4 ОКР «Разработка принципов построения и элементов системы автономной навигации с применением отечественной специализированной элементной базы на основе наногетероструктурной технологии для космических аппаратов всех типов орбит», тема «САН», хоздоговор 96/12 от 16.11.2012, выполняемой в ТУСУРе для ОАО «ИСС» в ходе реализации Постановления 218 Правительства РФ, следующих результатов интеллектуальной деятельности:

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014617440. SEbox. Комнатнов М.Е., Газизов Т.Р., Куксенко С.П. – Заявка №2014615102. Дата поступления 29 мая 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22 июля 2014 г.
2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014617441. Квазистатический анализ плоского трехпроводного кабеля. Орлов П.Е., Газизов Т.Р., Заболоцкий А.М. – Заявка №2014615105. Дата поступления 29 мая 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22 июля 2014 г.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014660639. MicrostripNcond. Салов В.К., Суровцев Р.С., Газизов Т.Р. – Заявка №2014615106. Дата поступления 29 мая 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 13 октября 2014 г.
4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661020. ConnectorDB9Reponse. Салов В.К., Суровцев Р.С., Газизов Т.Р. – Заявка №2014615113. Дата поступления 29 мая 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22 октября 2014 г.
5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661617. ConnectorSNP393Parameters. Суровцев Р.С., Газизов Т.Р. – Заявка №2014619248. Дата поступления 15 сентября 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 10 ноября 2014 г.
6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661022. SEplate. Комнатнов М.Е., Газизов Т.Р., Куксенко С.П. – Заявка №2014615110. Дата поступления 29 мая 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22 октября 2014 г.
7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661507. Квазистатический анализ многослойной печатной платы. Орлов П.Е., Газизов Т.Р., Заболоцкий А.М. – Заявка №2014619241. Дата поступления 15 сентября 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 30 октября 2014 г.
8. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661619. Электромагнитная наводка посадочного места корпуса KD-V99D59-A/ Калимулин И.Ф., Газизов Т.Р., Заболоцкий А.М. – Заявка №2014619243. Дата поступления 15 сентября 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 30 октября 2014 г.
9. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661509. Емкостная матрица тестовой 3D-структуры. Калимулин И.Ф., Газизов Т.Р., Заболоцкий А.М. – Заявка №2014619245. Дата поступления 15 сентября 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 30 октября 2014 г.
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661616. Quasi-static simulation of TEM/GTEM-cells. Комнатнов М.Е., Газизов Т.Р. – 2014619247. Дата поступления 15 сентября 2014 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 10 ноября 2014 г.

Указанные программы использовались для моделирования и обеспечения электромагнитной совместимости цепей электрических принципиальных схем, элементов печатных плат и конструкции блока системы автономной навигации. Результаты внедрения (использования) представлены в технических отчётах по теме «САН».

Руководитель темы «САН»

директор НИИ космических технологий ТУСУРа
д.т.н. Ю.А. Шиняков

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное
автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Томский государственный университет»
(ТГУ, НИ ТГУ)

Ленина пр., 36, г. Томск, 634050
Тел. (3822) 52-98-52, факс (3822) 52-95-85
E-mail: rector@tsu.ru
http://www.tsu.ru
ОКПО 02069318, ОГРН 1027000853978
ИНН 7018012970, КПП 701701001

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по образовательной
деятельности НИ ТГУ


В.В. Демин
« ____ » _____ 2019 г.


04.07.2019 № 13-433
на № _____ от _____

АКТ

о внедрении (использовании) в учебный процесс результатов
диссертационной работы
Куксенко Сергея Петровича

Настоящим актом подтверждается внедрение в учебный процесс федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» результатов диссертационной работы Куксенко С.П.

Полученные в диссертационной работе результаты по анализу и оптимизации проводных антенн, многопроводных линий передачи и полосковых фильтров методом моментов с использованием компьютерного моделирования и разработанные автором программные средства для моделирования задач электромагнитной совместимости бортовой радиоэлектронной аппаратуры использованы при преподавании дисциплины «Электромагнитная совместимость» для магистрантов физико-технического факультета по программе «Проектирование и конструирование промышленных космических систем» для предприятия «Газпром космические системы» в весеннем семестре 2017/2018 уч. года.

И.о. декана ФТФ ТГУ,
д.ф.-м.н., проф.



Крайнов А.Ю.



«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор ТУСУР по учебной работе
к.т.н. доцент Решетников М.Т.

9 апреля 2007 г.

АКТ

внедрения результатов диссертационной работы Куксенко С.П.
в учебный процесс

Мы, нижеподписавшиеся, заведующий кафедрой телевидения и управления ТУСУР, д.т.н., проф. Пустынский И.Н., председатель учебно-методической комиссии радиотехнического факультета ТУСУР д.т.н., проф. Задорин А.С. настоящим актом подтверждаем внедрение в учебный процесс следующих результатов диссертационной работы Куксенко С.П.:

1. Принципы построения и алгоритмы прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) легли в основу *двух авторских лекций* по дисциплине «Основы автоматизации проектирования радиоэлектронных устройств», прочитанных Куксенко С.П. студентам групп: 112 – специальность «Бытовая радиоэлектронная аппаратура, 172 – специальность «Аудиовизуальная техника», 132-1, 132-2 – специальность «Сервис».

2. Модуль матричных операций MATRIX в составе системы TALGAT использовался *в лабораторной работе* (по сравнению времени решения СЛАУ методом исключения Гаусса и итерационными методами BiCGStab и GMRES(m) с оптимизацией допуска обнуления) по дисциплине «Основы автоматизированного проектирования в сервисе» студентами групп 134-1, 134-2 – специальность «Сервис».

3. Детальное описание методов решения СЛАУ и особенностей их использования в системе TALGAT приведено *в учебном методическом пособии* «Использование методов решения СЛАУ» для студентов, проходящих групповое проектное обучение по направлению «Электромагнитная совместимость».

Заведующий кафедрой телевидения и управления
д.т.н., проф. Пустынский И.Н.

Председатель учебно-методической комиссии
радиотехнического факультета ТУСУР
к.т.н., доцент Белов В.И.



«УТВЕРЖДАЮ»

Директор департамента
образования ТУСУР
д.т.н., профессор

П.Е. Троян

» _____ 2019

АКТ

внедрения в учебный процесс результатов диссертационной работы

Куксенко Сергея Петровича

Мы, нижеподписавшиеся, заместитель заведующего кафедрой телевидения и управления (ТУ) по учебной работе, Бусыгина А.В., руководитель магистерской программы кафедры ТУ «Электромагнитная совместимость радиоэлектронной аппаратуры», д.т.н. Заболоцкий А.М. настоящим актом подтверждаем факт внедрения в учебный процесс кафедры ТУ следующих результатов диссертационной работы Куксенко С.П.:

1. Разработанное программное обеспечение (система TALGAT) используется, как основной инструмент ознакомления с процессом моделирования, при подготовке аспирантов (дисциплина «Электромагнитная совместимость: моделирование и обеспечение»), обучающихся по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника» (09.06.01) и «Электроника, радиотехника и системы связи» (11.06.01), а также магистрантов (дисциплины «Теория ЭМС радиоэлектронных средств и систем» и «ЭМС электрических сетей»), обучающихся по направлениям «Радиотехника» (11.04.01) и «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (11.04.02) – программы «ЭМС радиоэлектронной аппаратуры», «ЭМС в топливно-энергетическом комплексе» и «Защита от электромагнитного терроризма».

2. Особенности математического моделирования, применения численных методов, методов решения СЛАУ и построения сетки применительно к задачам моделирования электромагнитной совместимости, освещаются в дисциплине «Вычислительная ЭМС» при подготовке магистрантов по программам «ЭМС радиоэлектронной аппаратуры», «ЭМС в топливно-энергетическом комплексе» и «Защита от электромагнитного терроризма».

Заместитель заведующего каф. ТУ
по учебной работе

 /Бусыгина А.В./

Руководитель магистерской программы
«Электромагнитная совместимость
радиоэлектронной аппаратуры»

 /Заболоцкий А.М./

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 79355

МОДАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР

Патентообладатель(и): *Газизов Тальгат Рашитович (RU), Заболоцкий Александр Михайлович (RU), Бевзенко Иван Геннадьевич (RU), Самотин Иван Евгеньевич (RU), Орлов Павел Евгеньевич (RU), Мелкозеров Александр Олегович (RU), Газизов Тимур Тальгатович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Костарев Игорь Степанович (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № 2008127527

Приоритет полезной модели 07 июля 2008 г.

Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей Российской Федерации 27 декабря 2008 г.

Срок действия патента истекает 07 июля 2018 г.

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам



Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 79213

УСТРОЙСТВО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА АППАРАТУРУ

Патентообладатель(и): *Газизов Тальгат Рашитович (RU), Заболоцкий Александр Михайлович (RU), Бевзенко Иван Геннадьевич (RU), Орлов Павел Евгеньевич (RU), Самошин Иван Евгеньевич (RU), Мелкозеров Александр Олегович (RU), Газизов Тимур Тальгатович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Костарев Игорь Степанович (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № **2008127574**

Приоритет полезной модели **07 июля 2008 г.**

Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей Российской Федерации **20 декабря 2008 г.**

Срок действия патента истекает **07 июля 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам



Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 80010

УСТРОЙСТВО МОДАЛЬНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Патентообладатель(ли): *Галилов Тальгат Рашитович (RU), Забалоцкий Александр Михайлович (RU), Орлов Павел Евгеньевич (RU), Самотин Иван Евгеньевич (RU), Бекзенко Иван Геннадьевич (RU), Мелкозеров Александр Олегович (RU), Галилов Тимур Тальгатович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Костарев Игорь Степанович (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № 2008127580

Приоритет полезной модели **07 июля 2008 г.**

Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей Российской Федерации **20 января 2009 г.**

Срок действия патента истекает **07 июля 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам



Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ
№ 2386964

**УСТРОЙСТВО ОБНАРУЖЕНИЯ, ИДЕНТИФИКАЦИИ И
ДИАГНОСТИКИ МНОГОПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ
ПЕРЕДАЧИ**

Патентообладатель(и): *Газизов Тальгат Рашитович (RU), Заболоцкий Александр Михайлович (RU), Орлов Павел Евгеньевич (RU), Самотин Иван Евгеньевич (RU), Бекзенко Иван Геннадьевич (RU), Мелкозеров Александр Олегович (RU), Газизов Тимур Тальгатович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Костарев Игорь Степанович (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № 2009108905

Приоритет изобретения **10 марта 2009 г.**

Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации **20 апреля 2010 г.**

Срок действия патента истекает **10 марта 2029 г.**

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам



Б.И. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2431912

УСТРОЙСТВО ЗАЩИТЫ ОТ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Патентообладатель(и): *Общество с ограниченной ответственностью "Твердь" (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № 2010108518

Приоритет изобретения 09 марта 2010 г.

Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации 20 октября 2011 г.

Срок действия патента истекает 09 марта 2030 г.

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам



Б.И. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2431897

**УСТРОЙСТВО ДЛЯ НАРУШЕНИЯ РАБОТЫ
АППАРАТУРЫ ЗА СЧЕТ РАЗЛОЖЕНИЯ И
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ**

Патентообладатель(ы): *Общество с ограниченной
ответственностью "Твердь" (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № 2010108520

Приоритет изобретения 09 марта 2010 г.

Зарегистрировано в Государственном реестре
изобретений Российской Федерации 20 октября 2011 г.

Срок действия патента истекает 09 марта 2030 г.

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной
собственности, патентам и товарным знакам



Б.И. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2614156

СПОСОБ КОМПОНОВКИ ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ ДЛЯ ЦЕПЕЙ С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

Патентообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Авторы: *Газизов Тальгат Рашитович (RU), Орлов Павел Евгеньевич (RU), Шарафутдинов Виталий Расимович (RU), Кузнецова-Таджибаева Ольга Михайловна (RU), Заболоцкий Александр Михайлович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Буичкин Евгений Николаевич (RU)*

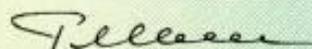
Заявка № 2015137532

Приоритет изобретения **02 сентября 2015 г.**

Дата государственной регистрации в
Государственном реестре изобретений
Российской Федерации **23 марта 2017 г.**

Срок действия исключительного права
на изобретение истекает **02 сентября 2035 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Ивлиев*



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2607252

МЕАНДРОВАЯ МИКРОПОЛОСКОВАЯ ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ, ЗАЩИЩАЮЩАЯ ОТ СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

Патентообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Авторы: *Суровцев Роман Сергеевич (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU), Носов Александр Вячеславович (RU), Заболоцкий Александр Михайлович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU)*

Заявка № 2015129255

Приоритет изобретения 16 июля 2015 г.

Дата государственной регистрации в

Государственном реестре изобретений

Российской Федерации 10 января 2017 г.

Срок действия исключительного права

на изобретение истекает 16 июля 2035 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Ивалиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2606776

**МЕАНДРОВАЯ ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ ИЗ ДВУХ ВИТКОВ
С РАЗНЫМИ РАЗНОСАМИ, ЗАЩИЩАЮЩАЯ ОТ
СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ**

Патентообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Авторы: *см. на обороте*

Заявка № 2015137524

Приоритет изобретения 02 сентября 2015 г.

Дата государственной регистрации в

Государственном реестре изобретений

Российской Федерации 10 января 2017 г.

Срок действия исключительного права

на изобретение истекает 02 сентября 2035 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Ивлиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2624465

ЧЕТЫРЕХПРОВОДНАЯ ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНАЯ СТРУКТУРА, ЗАЩИЩАЮЩАЯ ОТ СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

Патентообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Авторы: *Заболоцкий Александр Михайлович (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU)*

Заявка № 2015137546

Приоритет изобретения 02 сентября 2015 г.

Дата государственной регистрации в

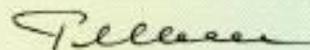
Государственном реестре изобретений

Российской Федерации 04 июля 2017 г.

Срок действия исключительного права

на изобретение истекает 02 сентября 2035 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 Г.П. Ивлиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2624637

**СПОСОБ ВНУТРЕННЕЙ КОМПОНОВКИ ПЕЧАТНЫХ
ПЛАТ ДЛЯ ЦЕПЕЙ С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ**

Патентообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Авторы: *см. на обороте*

Заявка № 2015137548

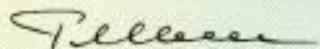
Приоритет изобретения **02 сентября 2015 г.**

Дата государственной регистрации в
Государственном реестре изобретений

Российской Федерации **05 июля 2017 г.**

Срок действия исключительного права
на изобретение истекает **02 сентября 2035 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Исхов*



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2637484

**ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ, ЗАЩИЩАЮЩАЯ ОТ
СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ С УВЕЛИЧЕННОЙ
ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ**

Патентообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Тамский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (RU)*

Авторы: *Газизов Тальгат Рашитович (RU), Суровцев Роман Сергеевич (RU), Носов Александр Вячеславович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Газизов Тимур Тальгатович (RU)*

Заявка № 2016141521

Приоритет изобретения 21 октября 2016 г.

Дата государственной регистрации в

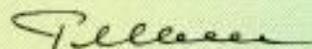
Государственном реестре изобретений

Российской Федерации 04 декабря 2017 г.

Срок действия исключительного права

на изобретение истекает 21 октября 2036 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Ивлиев*



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2600098

МЕАНДРОВАЯ ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ ИЗ ДВУХ ВИТКОВ, ЗАЩИЩАЮЩАЯ ОТ СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

Патентообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

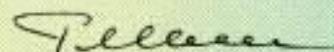
Заявка № 2015137528

Приоритет изобретения **02 сентября 2015 г.**

Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации **22 сентября 2016 г.**

Срок действия патента истекает **02 сентября 2035 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Излиев*



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2597940

**ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ, ЗАЩИЩАЮЩАЯ ОТ
СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ**

Патентообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

Заявка № 2015120797

Приоритет изобретения **01 июня 2015 г.**

Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации **25 августа 2016 г.**

Срок действия патента истекает **01 июня 2035 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.И. Ильина



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2656834

**УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ,
ЗАЩИЩАЮЩАЯ ОТ СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ
С УВЕЛИЧЕННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ**

Патентообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (РУ)*

Авторы: *см. на обороте*

Заявка № 2016141523

Приоритет изобретения 21 октября 2016 г.

Дата государственной регистрации в

Государственном реестре изобретений

Российской Федерации 06 июня 2018 г.

Срок действия исключительного права

на изобретение истекает 21 октября 2036 г.



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2603843

СПОСОБ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ ДЛЯ ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ

Патентообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

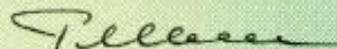
Заявка № 2015137547

Приоритет изобретения 02 сентября 2015 г.

Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации 09 ноября 2016 г.

Срок действия патента истекает 02 сентября 2035 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 Г.П. Иванов



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2603850

СПОСОБ ТРАССИРОВКИ ПЕЧАТНЫХ ПРОВОДНИКОВ ЦЕПЕЙ С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

Патентообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

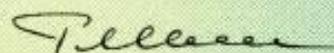
Заявка № 2015129253

Приоритет изобретения **16 июля 2015 г.**

Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации **09 ноября 2016 г.**

Срок действия патента истекает **16 июля 2035 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Иванев*



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2603851

СПОСОБ ТРАССИРОВКИ ПЕЧАТНЫХ ПРОВОДНИКОВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ ДЛЯ ЦЕПЕЙ С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

Патентообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

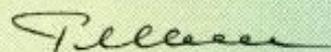
Заявка № 2015129263

Приоритет изобретения **16 июля 2015 г.**

Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации **09 ноября 2016 г.**

Срок действия патента истекает **16 июля 2035 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Изrael*



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2603848

СПОСОБ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ КАБЕЛЕЙ

Патентообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Автор(ы): *см. на обороте*

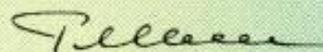
Заявка № 2015156667

Приоритет изобретения 28 декабря 2015 г.

Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации 09 ноября 2016 г.

Срок действия патента истекает 28 декабря 2035 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Иванюв



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2606709

МЕАНДРОВАЯ ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ С ЛИЦЕВОЙ СВЯЗЬЮ, ЗАЩИЩАЮЩАЯ ОТ СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

Патентообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники" (ТУСУР) (RU)*

Авторы: *Газизов Александр Тальгатович (RU), Заболоцкий Александр Михайлович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU)*

Заявка № 2015137545

Приоритет изобретения 02 сентября 2015 г.

Дата государственной регистрации в

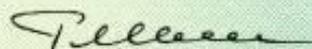
Государственном реестре изобретений

Российской Федерации 10 января 2017 г.

Срок действия исключительного права

на изобретение истекает 02 сентября 2035 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Ивлиев*





ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ФГНУ «ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КООРДИНАЦИОННЫЙ ЦЕНТР ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ОТРАСЛЕВОЙ ФОНД АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

**СВИДЕТЕЛЬСТВО ОБ ОТРАСЛЕВОЙ
РЕГИСТРАЦИИ РАЗРАБОТКИ**

№ 8376

Настоящее свидетельство выдано на разработку:

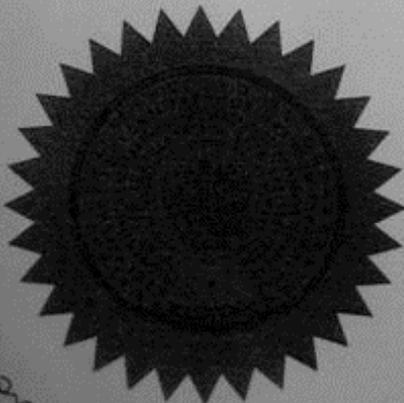
**Система компьютерного моделирования сложных
структур проводников и диэлектриков TALGAT**

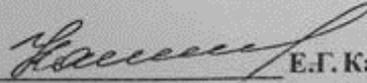
зарегистрированную в Отраслевом фонде алгоритмов и программ.

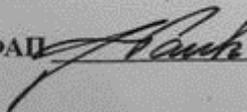
Дата регистрации: 24 мая 2007 года

Авторы: Газизов Т.Р., Мелкозеров А.О., Газизов Т.Т.,
Куксенко С.П., Заболоцкий А.М., Костарев И.С.

Организация-разработчик: Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники



Директор  Е.Г. Калинин

Руководитель ОФАП  А.И. Галкина

Дата выдачи 06.06.2007

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015616322

**Многokратное решение СЛАУ итерационным методом
BiCGstab с использованием при решении текущей системы
вектора решения предыдущей.**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Томский государственный университет систем
управления и радиоэлектроники» (RU)*

Авторы: *Ахунов Роман Раисович (RU), Куксенко Сергей Петрович
(RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № **2015612894**

Дата поступления **09 апреля 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **05 июня 2015 г.**



*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015616321

**Решение СЛАУ с матрицей, полученной с помощью
ILU(0)-разложения и хранимой в модифицированном
разреженном строчном формате.**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (RU)*

Авторы: *Ахунов Роман Раисович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № **2015612893**

Дата поступления **09 апреля 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **05 июня 2015 г.**



*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015616320

Многократное решение СЛАУ итерационным методом BiCGStab с использованием матрицы предобуславливания, полученной при решении первой системы.

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (RU)*

Авторы: *Ахунов Роман Раисович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № 2015612892

Дата поступления 09 апреля 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 05 июня 2015 г.



Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Курий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015616205

**ILU(0)-разложение матрицы, хранимой в
модифицированном разреженном строчном формате**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (ТУСУР) (RU)*

Авторы: *Ахунов Роман Раисович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № **2015612783**

Дата поступления **09 апреля 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **03 июня 2015 г.**



*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015616124

**ILU(0)-разложение матрицы, хранимой в
модифицированном разреженном строчном формате, с
использованием вспомогательного вектора**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Томский государственный университет систем
управления и радиозлектроники» (RU)*

Авторы: *Ахунов Роман Раисович (RU), Куксенко Сергей Петрович
(RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № **2015612895**

Дата поступления **09 апреля 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **01 июня 2015 г.**



*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015615837

**Многократное решение СЛАУ итерационным методом
BiCGStab с использованием переформирования матрицы
предобуславливания по заданному порогу числа итераций**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (RU)*

Авторы: *Ахунов Роман Раисович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № 2015612782

Дата поступления 09 апреля 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.



*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015615835

**ILU(0)-разложение матрицы, хранимой в разреженном
строчном формате, с последовательным перебором
элементов**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Томский государственный университет систем
управления и радиозлектроники» (RU)*

Авторы: *Ахунов Роман Раисович (RU), Куксенко Сергей Петрович
(RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № 2015612781

Дата поступления 09 апреля 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 26 мая 2015 г.



*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015615730

**Организация хранения плотной матрицы в
модифицированном строчном разреженном формате после
предфильтрации, основанной на максимальном элементе
матрицы**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Томский государственный университет систем
управления и радиозлектроники» (RU)*

Авторы: *Ахунов Роман Раисович (RU), Куксенко Сергей Петрович
(RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № **2015612891**

Дата поступления **09 апреля 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **22 мая 2015 г.**

*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*



A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Л.Л. Курий'.

Л.Л. Курий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015615729

**Многократное решение СЛАУ итерационным методом
BiCGStab с переформированием матрицы
предобусловливания при превышении среднего времени
решения одной системы**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (RU)*

Авторы: *Ахунов Роман Раисович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № 2015612890

Дата поступления 09 апреля 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 22 мая 2015 г.

*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*



Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2009614871

TALGAT 2008

Правообладатель(ли): *Общество с ограниченной ответственностью «Твердь» (RU)*

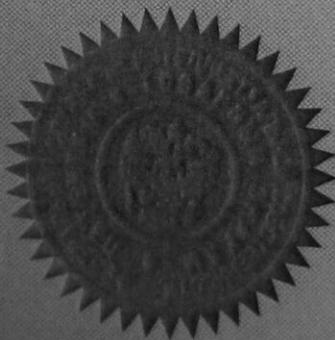
Автор(ы): *Газизов Тальгат Рашитович, Мелкозеров Александр Олегович, Газизов Тимур Тальгатович, Куксенко Сергей Петрович, Заболоцкий Александр Михайлович (RU)*

Заявка № 2009613644

Дата поступления 9 июля 2009 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
8 сентября 2009 г.

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам



Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2010613497

TALGAT 2009

Правообладатель(ли): **Общество с ограниченной ответственностью «Твердь» (RU)**

Автор(ы): **Газизов Тальгат Рашитович, Мелкозеров Александр Олегович, Газизов Тимур Тальгатович, Куксенко Сергей Петрович, Заболоцкий Александр Михайлович (RU)**

Заявка № **2010612008**

Дата поступления **13 апреля 2010 г.**

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
28 мая 2010 г.

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам



Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2012610712

TALGAT 2010

Правообладатель(ли): **Общество с ограниченной ответственностью
«Твердь» (RU)**

Автор(ы): **Газизов Тальгат Рашитович,
Мелкозеров Александр Олегович, Газизов Тимур Тальгатович,
Куксенко Сергей Петрович, Заболоцкий Александр Михайлович,
Аширбакиев Ренат Ихсанович, Вершинин Евгений Анатольевич,
Салов Василий Константинович, Лежнин Евгений Владимирович,
Орлов Павел Евгеньевич, Бевзенко Иван Геннадьевич,
Калимулин Илья Фидаильевич (RU)**

Заявка № 2011617178

Дата поступления 26 сентября 2011 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
13 января 2012 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2012660373

TALGAT 2011

Правообладатель(ли): *Общество с ограниченной ответственностью
«ТУСУР – Модальные Технологии» (RU)*

Автор(ы): *Газизов Тальгат Рашитович, Мелкозеров Александр
Олегович, Газизов Тимур Тальгатович, Куксенко Сергей
Петрович, Заболоцкий Александр Михайлович, Аширбакиев
Ренат Ихсанович, Лежнин Евгений Владимирович, Салов
Василий Константинович, Лежнин Егор Владимирович, Орлов
Павел Евгеньевич, Калимулин Илья Фидаильевич, Суровцев
Роман Сергеевич, Комнатнов Максим Евгеньевич (RU)*

Заявка № 2012618426

Дата поступления 5 октября 2012 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
16 ноября 2012 г.



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

A handwritten signature in dark ink, appearing to read "Симонов", written over a light-colored background.

Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2013619615

TALGAT 2012

Правообладатель: *Общество с ограниченной ответственностью «ТУСУР - Модальные Технологии» (RU)*

Авторы: *см. на обороте*

Заявка № **2013617773**

Дата поступления **29 августа 2013 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **11 октября 2013 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности



A handwritten signature in dark ink, which appears to be "B.I. Simonov".

Б.И. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015614365

TALGAT 2013

Правообладатель: *Общество с ограниченной ответственностью «ТАЛГАТ» (RU)*

Авторы: *см. на обороте*

Заявка № 2015611288

Дата поступления 03 марта 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 16 апреля 2015 г.

*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015617550

TALGAT 2014

Правообладатель: *Общество с ограниченной ответственностью «Твердь» (RU)*

Авторы: *см. на обороте*

Заявка № **2015614488**

Дата поступления **27 мая 2015 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **14 июля 2015 г.**

*Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015660487

TALGAT 2015

Правообладатель: *Общество с ограниченной ответственностью «Твердь» (RU)*

Авторы: *см. на обороте*

Заявка № **2015617580**

Дата поступления **17 августа 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **01 октября 2015 г.**

Заместитель руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности



Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016662520

TALGAT 2016

Правообладатель: *Общество с ограниченной ответственностью «ТАЛГАТ» (RU)*

Авторы: *см. на обороте*

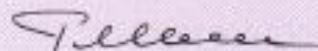
Заявка № 2016619296

Дата поступления 01 сентября 2016 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 14 ноября 2016 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 Г.П. Ивлиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018611481

TALGAT 2017

Правообладатель: *Общество с ограниченной ответственностью «ТАЛГАТ» (RU)*

Авторы: *см. на обороте*

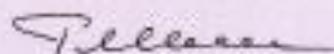
Заявка № **2017663209**

Дата поступления **13 декабря 2017 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **02 февраля 2018 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Изrael*



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015618664

**Вычисление комплексной емкостной матрицы
многопроводной микрополосковой линии на подложке из
FR-4 в диапазоне частот с помощью блочного
LU-разложения**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (RU)*

Авторы: *Суровцев Роман Сергеевич (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № **2015612938**

Дата поступления **02 апреля 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **13 августа 2015 г.**

Заместитель руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности



Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015615793

Многokратное решение систем линейных алгебраических уравнений с частично изменяющейся матрицей

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (RU)*

Авторы: *Суровцев Роман Сергеевич (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № 2015612566

Дата поступления 02 апреля 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 25 мая 2015 г.



Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Курий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014617440

SEbox

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (RU)**

Авторы: **Комнатнов Максим Евгеньевич (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU)**

Заявка № **2014615102**

Дата поступления **29 мая 2014 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **22 июля 2014 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014661022

SEplate

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (ТУСУР) (RU)*

Авторы: *Комнатнов Максим Евгеньевич (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU)*

Заявка № 2014615110

Дата поступления 29 мая 2014 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 22 октября 2014 г.



Врио руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018661874

«Вычисление и трехмерное отображение эффективности экранирования металлическим корпусом с апертурой»

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (ТУСУР) (RU)*

Авторы: *Квасников Алексей Андреевич (RU), Комнатинов Максим Евгеньевич (RU), Куксенко Сергей Петрович (RU), Газизов Тальгат Рашитович (RU)*

Заявка № 2018616275

Дата поступления 18 июня 2018 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 20 сентября 2018 г.



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Ивлиев