На правах рукописи

Кручинин Дмитрий Владимирович

МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ

Специальность 05.13.17 — «Теоретические основы информатики»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора технических наук

Томск — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (ТУСУР).

Научный консультант — доктор технических наук, доцент
Рулевский Виктор Михайлович

Официальные оппоненты: **Костюк Юрий Леонидович,**
доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры теоретических основ информатики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Павский Валерий Алексеевич,
доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры общей математики и информатики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет»

Рябко Борис Яковлевич,
доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник, и.о. заведующего лабораторией информационных систем и защиты информации ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий», г. Новосибирск

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»

Защита состоится 22 сентября 2022 г. в 12 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.268.05 на базе Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 40, ауд. 201.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ТУСУРа по адресу: 634045, г. Томск, ул. Красноармейская, 146 и на сайте ТУСУРа по адресу: https://postgraduate.tusur.ru/urls/cx6rtrfu.

Автореферат разослан «___» ___________ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Костюченко Евгений Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Развитие информационных технологий имеет тенденцию к существенному его усложнению, увеличению сроков разработки и стоимости. Поэтому особое значение принимает направление развития информационных технологий, связанное с построением технологий разработки программного обеспечения и инструментальных средств. Для разработки таких технологий необходимо развитие математических основ, методов построения алгоритмов и баз знаний. Более того, интенсивное развитие информационных технологий на фоне формирования цифровой экономики приводит к экспоненциальному росту объемов различного рода данных, которые носят распределенный характер. Таким образом, возникает потребность в разработке эффективных систем хранения, передачи и обработки больших объемов данных. Для оперативной работы с такими данными требуется алгоритмический инструментарий, который позволит структурировать и систематизировать информацию о различных объектах.

Информационным объектом будем считать описание реального объекта, явления, процесса, события в виде совокупности логически связанных характеристик (информационных элементов). Существуют количественные и качественные характеристики информационного объекта. Особое значение для построения и анализа методов представления информационных объектов имеет теория производящих функций, поскольку производящие функции являются описательной характеристикой информационных объектов, заключающейся в подсчете числа объектов, принадлежащих некоторому семейству конечных множеств. Основная идея производящих функций заключается в отображении исследуемых множеств информационных объектов в множество степенных рядов и последующей работе с ними при помощи развитого аппарата функционального анализа.

Поскольку многим информационным объектам, в том числе характеризующимся большим объемом данных, свойственна иерархическая или рекурсивная природа их описания, то существует альтернативный способ представления множества таких информационных объектов в форме комбинаторного множества. Общие и универсальные методы, направленные на исследование таких представлений и разработку соответствующих алгоритмов комбинаторной генерации, представлены в работах таких ученых, как Э.М. Рейнгольд, Д.Л. Крехер, Е. Баркуччи, С. Баччелли, А. Дель Лунго, В. Вайновски, Ф. Флажоле, К. Мартинес, К. Мулинеро, Б.Я. Рябко, Ю.С. Медведева и другие. Если рассмотреть последовательность значений функции мощности для заданного комбинаторного множества, то данная последовательность может быть представлена с помощью выражения производящей функции. Таким образом, возникает ситуация, когда для функции мощности комбинаторного множества не известно явное выражение, но имеется представление в виде производящей функции. Тогда, чтобы определить явное выражение для функции мощности комбинаторного множества, необходимо получить явное выражение для коэффициентов соответствующей ей производящей функции. Однако существует огромное количество комбинаторных множеств, которые определяются более чем одним параметром. В таком случае для получения явных выражений функций мощности комбинаторных множеств необходимо уже оперировать производящими функциями многих переменных.

Кроме того, исследования производящих функций находят свое применение в рамках решения следующих значимых и актуальных научных задач: развитие методов индексации и поиска сложных информационных объектов, оптимизация на сложных дискретных структурах, создание новых способов представления сложных дискретных структур (например, в области биоинформатики и хемоинформатики), развитие методов представления полиномов и другие. В настоящее время наблюдается значительный прогресс в области исследований производящих функций, в первую очередь связанный с исследованиями свойств полиномов, заданных производящими функциями. Можно выделить работы следующих ученых: А. Эрдели, Р.П. Боас и Р.К. Бак, С. Роман, Э.Б. Макбрайд, Х.М. Шривастава, Х.Л. Маноча, Т. Ким, Й. Шимшек, Я.Л. Геронимус, Н.Н. Лебедев, П.К. Суетин, В.В. Прасолов. Также стоит выделить работы следующих ученых: Г. Эндрюс, Д. Риордан, Ф. Флажоле, К. Краттенталер, Д. Фоата, Г.С. Уилф, Л. Комте, И.М. Гессель, М. Дрмота. В отечественной литературе значительное внимание теория производящих функций получила в работах Н.Я. Виленкина, К.А. Рыбникова, С.А. Ландо, В.Н. Сачкова, Г.П. Егорычева, О.В. Кузьмина и других ученых.

Основные разработки в данной области исследований касаются класса производящих функций одной переменной. Однако существует достаточно большое количество объектов, описываемых производящими функциями двух и более переменных. Для производящих функций многих переменных соответствующий математический аппарат развит слабо, а в общем виде применение коэффициентов степеней производящих функций многих переменных исследовано недостаточно. Поэтому разработка новых методов и программного обеспечения, основанных на производящих функциях многих переменных, существенно расширит возможности использования производящих функций как для развития самой теории производящих функций, так и для решения прикладных задач.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является повышение эффективности методов преобразования информации в данные и знания за счет применения аппарата производящих функций многих переменных и их реализации в программных средствах автоматизации.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Провести аналитический обзор современного состояния исследований в области теории производящих функций и методов на основе их применения, в том числе для задач описания информационных объектов и построения алгоритмов комбинаторной генерации;

2. Разработать методы оперирования коэффициентами степеней производящих функций многих переменных и применить их для получения методов вычисления явных выражений функции мощности множеств, решения функциональных уравнений, описания полиномов, числовых треугольников и решеточных путей;

3. Модифицировать метод построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ с учетом описания функции мощности множества производящей функцией многих переменных, а также с применением приближенных вычислений и двоичного поиска для поиска выбранного сына ИЛИ-узла;

4. Разработать алгоритмы комбинаторной генерации для формирования информационных объектов, представленных следующими комбинаторными множествами: множество сочетаний из n по m с применением колексикографического порядка; множество самонепересекающихся решеточных путей на плоскости; множество помеченных путей Дика длины $2n$ с m подъемами на возвратных шагах; множество путей Дика с пиками; множество последовательностей вариантов ответа на тест с вопросами закрытого типа; множество исходов турнира на выбывание; множество частей круга, полученных при его разрезе прямыми линиями; множество правильных скобочных последовательностей, разряженных нулями; множество разбиений множества;

5. Создать базу знаний производящих функций двух переменных и реализовать ее в виде автоматизированной электронной энциклопедии числовых пирамид;

6. Разработать метод построения критериев простоты числа на основе методов оперирования коэффициентами степеней производящих функций;

7. На основе разработанных методов и алгоритмов создать программное обеспечение для определения коэффициентов степеней производящих функций и для генерации по рангу элементов комбинаторных множеств в виде библиотек к математическим пакетам Maxima и Mathematica;

8. Внедрить полученные методы, алгоритмы и программное обеспечение для решения задач, связанных с построением проверочных выборок для тестирования систем различного класса.

Объект исследования. Объектом исследования является процесс формирования информационных объектов на основе производящих функций многих переменных.

Предмет исследования. Предметом исследования являются методы и алгоритмы формирования информационных объектов на основе производящих функций многих переменных.

Методы исследования. В диссертационной работе применялись методы оперирования производящими функциями одной переменной, построения алгоритмов комбинаторной генерации, анализа алгоритмов и объектно-ориентированного программирования.

Научная новизна полученных результатов:

1. Предложен комплексный метод формирования информационных объектов, основанный на k-й степени производящих функций, отличающийся наличием правил преобразования коэффициентов степеней взаимных, обратных и композиции производящих функций многих переменных;

2. Предложена модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ, которая отличается применением предложенного комплексного метода для нахождения выражения функции мощности комбинаторного множества, а также применением приближенных вычислений и двоичного поиска для определения выбранного сына ИЛИ-узла для задач генерации информационных объектов;

3. Разработаны новые алгоритмы ранжирования и генерации по рангу для множества информационных объектов, обладающие меньшей вычислительной сложностью;

4. Сформулирован подход к созданию базы знаний производящих функций двух переменных и реализован в виде электронной энциклопедии, обеспечивающей автоматизированный поиск и манипулирование матричными представлениями соответствующих функций;

5. Сформулирован подход к созданию программных систем компьютерной алгебры и систем тестирования, отличающийся применением коэффициентов степеней производящих функций, представленных в явном или матричном виде.

Теоретическая значимость работы. Теоретическая значимость результатов диссертационной работы заключается в развитии теории производящих функций за счет разработки комплексного метода формирования информационных объектов, основанного на k-й степени производящих функций и их коэффициентов. Развиты методы построения алгоритмов комбинаторной генерации за счет использования разработанных методов оперирования производящими функциями и предварительного определения ветви дерева И/ИЛИ. Предложенный на основе применения коэффициентов степеней производящих функций подход к созданию программных систем компьютерной алгебры и систем тестирования является теоретической основой для развития новых технологий проектирования программного обеспечения и решения задач индексации и поиска сложных информационных объектов, для организации новых способов хранения информации и модернизации принципов работы систем баз данных, для создания новых способов представления сложных дискретных структур в конкретных прикладных задачах (например, в области биоинформатики и хемоинформатики).

Практическая значимость работы. Практическая значимость работы заключается в создании методов и программного обеспечения, ускоряющего процесс формирования входных последовательностей для тестирования сложных информационных и программных объектов. Разработанное программное обеспечение в виде библиотек для систем компьютерной алгебры Maxima и Mathematica позволяет решать задачи, отсутствующие в перечне стандартных функций математических пакетов. Применение разработанного программного обеспечения ускоряет процесс вычислений при работе с производящими функциями. Созданная база знаний и ее реализация в виде электронной энциклопедии расширяют возможности проведения исследований числовых пирамид.

Практическая значимость результатов диссертационной работы подтверждается их внедрением в деятельность научно-производственных предприятий. При внедрении в деятельность «НИИ АЭМ ТУСУР» и в деятельность АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва» использование разработанных алгоритмов и программного обеспечения позволило снизить время формирования выходных характеристик имитаторов энергопреобразующей аппаратуры на 43%, что привело к сокращению времени тестирования систем энергообеспечения. При внедрении в деятельность ООО «ПлантаПлюс» использование разработанных алгоритмов позволило сократить объем базы данных на 9% за счет уменьшения количества дублируемой информации и повысить скорость поиска и обработки данных на 5%. При внедрении в деятельность ООО «Эль Контент» использование разработанных алгоритмов и программного обеспечения позволило уменьшить временные затраты на 50% во время тестирования систем тестового оценивания. При внедрении в учебный процесс ФГБОУ ВО «ТУСУР» в рамках создания автоматизированной системы обучения математическим дисциплинам использование разработанного программного обеспечения позволило сократить временные затраты на создание и проверку контрольных и домашних работ за счет автоматизации данного процесса.

Положения, выносимые на защиту:

1. Разработанный комплексный метод формирования информационных объектов, основанный на k-й степени производящих функций, отличающийся от существующих наличием правил преобразования коэффициентов степеней взаимных, обратных и композиции производящих функций многих переменных, позволяет получить их явные представления, обладающие меньшей вычислительной сложностью.

Соответствует п. 3 паспорта специальности 05.13.17: Исследование методов и разработка средств кодирования информации в виде данных. Принципы создания языков описания данных, языков манипулирования данными, языков запросов. Разработка и исследование моделей данных и новых принципов их проектирования;

2. Модифицированный метод построения алгоритмов комбинаторной генерации, отличающийся применением приближенных вычислений и двоичного поиска для определения выбранного сына ИЛИ-узла для задач генерации информационных объектов и применением предложенного комплексного метода для задач поиска функций мощности, позволяет строить алгоритмы комбинаторной генерации с меньшей вычислительной сложностью, в том числе для более сложных информационных объектов, описываемых производящими функциями многих переменных.
Соответствует п. 3 паспорта специальности 05.13.17: Исследование методов и разработка средств кодирования информации в виде данных. Принципы создания языков описания данных, языков манипулирования данными, языков запросов. Разработка и исследование моделей данных и новых принципов их проектирования;

3. Разработанные алгоритмы комбинаторной генерации для множеств информационных объектов, описываемых производящими функциями, позволяют генерировать информационные объекты с меньшей вычислительной сложностью.
Соответствует п. 3 паспорта специальности 05.13.17: Исследование методов и разработка средств кодирования информации в виде данных. Принципы создания языков описания данных, языков манипулирования данными, языков запросов. Разработка и исследование моделей данных и новых принципов их проектирования;

4. Построенная база знаний производящих функций двух переменных, основанная на фреймовой модели, позволяет автоматизировать процесс поиска и оперирования коэффициентами степеней производящих функций двух переменных.
Соответствует п. 4 паспорта специальности 05.13.17: Исследование и разработка средств представления знаний. Принципы создания языков представления знаний, в том числе для плохо структурированных предметных областей и слабоструктурированных задач; разработка интегрированных средств представления знаний, средств представления знаний, отражающих динамику процессов, концептуальных и семиотических моделей предметных областей;

5. Предложен подход к созданию программных систем компьютерной алгебры и систем тестирования. Отличительная особенность предложенного подхода заключается в применении коэффициентов степеней производящих функций, что позволяет решать следующие задачи: находить явные выражения коэффициентов композиции производящих функций, строить алгоритмы вычисления матричных представлений обратных и взаимных производящих функций, строить критерии простоты числа и формировать тестовые выборки.
Соответствует п. 14 паспорта специальности 05.13.17: Разработка теоретических основ создания программных систем для новых информационных технологий.

Достоверность результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается корректностью применения математических методов, основанных на теории производящих функций, сравнением разработанных алгоритмов с известными алгоритмами, полученными исследователями других научных групп, проверкой теоретических положений вычислительными экспериментами, положительным эффектом от внедрения полученных результатов.

Внедрение результатов работы. Результаты диссертационной работы использованы в ходе выполнения следующих научно-исследовательских работ:

– грант «Российского фонда фундаментальных исследований» (проект № 12-01-09350 «Метод получения выражений полиномов на основе композиции производящих функций» на 2012 г. — Руководитель);

– государственное задание Министерства образования и науки РФ (проект № 01201274654 «Разработка и исследование методов и технологий информационной безопасности в технических и высокопроизводительных вычислительных системах» на 2012–2014 гг. — Исполнитель);

– государственное задание Министерства образования и науки РФ (проект № 114030440055 «Фундаментальные основы проектирования информационно-безопасных систем» на 2014 г. — Исполнитель);

– стипендия Президента РФ для молодых ученых и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики по направлению «Стратегические информационные технологии, включая вопросы создания суперкомпьютеров и разработки программного обеспечения» (научно-исследовательская работа по теме «Разработка математического и алгоритмического обеспечения систем криптографической защиты информации на основе аппарата производящих функций» на 2015–2017 гг. — Руководитель);

– государственное задание Министерства образования и науки РФ (проект № AAAA-A15-115120110047-7 «Разработка и исследование методов построения информационно-безопасных систем» на 2015–2016 гг. — Исполнитель);

– Федеральная целевая программа Министерства образования и науки РФ (проект № 114112170068 «Создание программно-аппаратного комплекса для управления стеганографической информацией для мультимедиа потоков в телевидении и интернет-вещании» на 2014–2016 гг. — Исполнитель);

– грант «Российского фонда фундаментальных исследований» (проект № 16-31-50010 «Разработка метода получения тождеств и свойств специальных полиномов на основе использования q-интегралов на кольце целых p-адических чисел и операции композиции производящих функций» на 2016 г. — Исполнитель);

– стипендия Президента РФ для молодых ученых и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики по направлению «Стратегические информационные технологии, включая вопросы создания суперкомпьютеров и разработки программного обеспечения» (научно-исследовательская работа по теме «Разработка алгоритмов и программного обеспечения на основе новых методов комбинаторной генерации» на 2018–2020 гг. — Руководитель);

– базовая часть государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 2.8172.2017/8.9 «Метод и модели определения уровня защищенности информационных систем» на 2017–2019 гг. — Исполнитель);

– грант «Российского научного фонда» (проект № 18-71-00059 «Разработка алгоритмов и программного обеспечения индексирования больших объемов данных на основе новых методов комбинаторной генерации» на 2018–2020 гг. — Руководитель);

– грант «Российского фонда фундаментальных исследований» (проект № 18-41-703006 «Исследование свойств полиномов на основе степеней производящих функций» на 2018–2019 гг. — Руководитель);

– грант «Российского фонда фундаментальных исследований» (проект № 20-31-70037 «Исследование коэффициентов степеней производящих функций многих переменных» на 2019–2021 гг. — Руководитель);

– грант «Фонда содействия инновациям» (проект № 77ГУЦ-ЭС8-D3/56679 «Разработка системы адаптивного обучения с элементами искусственного интеллекта» на 2019–2021 гг. — Руководитель);

– государственное задание Министерства науки и высшего образования (проект № FEWM-2020-0046 «Фундаментальные основы и методология создания высокоэффективного энергопреобразования для систем космического и морского назначения на базе интеллектуальных силовых модулей сверхвысокой степени интеграции» на 2020–2022 гг. — Исполнитель);

– стипендия Президента РФ для молодых ученых и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики по направлению «Стратегические информационные технологии, включая вопросы создания суперкомпьютеров и разработки программного обеспечения» (научно-исследовательская работа по теме «Математическое, алгоритмическое и программное обеспечение для индексации больших объемов данных, описываемых комбинаторными множествами» на 2021–2023 гг. — Руководитель).

Результаты диссертационной работы внедрены в деятельность «НИИ АЭМ ТУСУР» и в деятельность АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва» для решения практической задачи формирования выходных характеристик имитаторов энергопреобразующей аппаратуры, в деятельность ООО «ПлантаПлюс» для решения практической задачи улучшения информационной системы хранения и обработки экспериментальных данных, в деятельность ООО «Эль Контент» для решения практической задачи тестирования разработанного программного обеспечения систем обучения, в учебный процесс НИ ТПУ при обучении студентов по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника» и «Информационные системы и технологии», в учебный процесс ФГБОУ ВО «ТУСУР» при обучении студентов по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника» и «Управление в технических системах».

Личный вклад автора. Личный вклад автора настоящей диссертационной работы состоит в определении направлений исследований, в подготовке и проведении непосредственно научно-исследовательской работы, в самостоятельном формулировании выводов и научных положений.

Автором самостоятельно разработан комплексный метод формирования информационных объектов, основанный на k-й степени производящих функций, предложена модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ, разработаны алгоритмы комбинаторной генерации, построена база знаний производящих функций двух переменных, предложен подход к созданию программных систем компьютерной алгебры и систем тестирования на основе использования производящих функций. В постановке отдельных задач исследований, обсуждении результатов, проведении расчетов и программной реализации были привлечены сотрудники и студенты университета, что отражается в совместных работах. Разработка программного обеспечения проведена автором совместно с сотрудниками и студентами ТУСУР. Соавторы, принимавшие участие в отдельных направлениях исследований, указаны в списке основных публикаций по теме диссертации. Все результаты, составляющие научную основу диссертации и выносимые на защиту, получены автором лично.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях, в том числе на следующих конференциях: The International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (2012, 2015, 2016, 2018, 2021 гг., Греция); The International Conference «Commutative Ring Theory, Integer-Valued Polynomials and Polynomial Functions» (2012 г., Австрия, г. Грац, Грацский технический университет); The Palanga Conference in Combinatorics and Number Theory (2013 г., Литва, г. Паланга); Международная конференция «Дискретная математика, теория графов и их приложения» (2014 г., Беларусь, г. Минск, НАН Беларуси); The International Conference in Honour of Professor R.P. Agarwal (2014 г., Турция, г. Бурса, университет Улудаг); The International Conference on Lattice Path Combinatorics & Applications (2015 г., США, г. Помона, Калифорнийский государственный политехнический университет в г. Помона); The International Conference of The Jangjeon Mathematical Society (2015, 2016, 2019 гг.) The International Research Conference «Information Technologies in Science, Management, Social Sphere and Medicine» (2017 г., г. Томск); The Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (2018–2021 гг.); Международная научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР» (2012–2021 гг., г. Томск, ТУСУР); Международная научная конференция, посвященная памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева (2013 г., г. Красноярск, СибГУ им. М.Ф. Решетнева); Международная научно-практическая конференция «Электронные средства и системы управления» (2013–2019 гг., г. Томск, ТУСУР); Международная научно-практическая конференция «Информационные процессы и технологии «Информатика – 2014» (2014 г., г. Севастополь); Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Технологии Microsoft в теории и практике программирования» (2015 г., г. Томск, ТПУ); Всероссийская научная конференция «Наука. Технологии. Инновации» (2015, 2016, 2018 гг., г. Новосибирск, НГТУ); Международная научно-практическая конференция молодых ученых «Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук» (2018–2019 гг., г. Тольятти, ТГУ); Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (2018-2019 гг., г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук» (2021 г., г. Томск).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертационного исследования обобщены в 4 монографиях и опубликованы в 43 статьях в рецензируемых научных изданиях, рекомендуемых для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук. При этом 12 статей опубликовано в рецензируемых журналах из перечня ВАК, 31 статья опубликована в зарубежных научных изданиях, в том числе 27 в индексируемых Web of Science и/или Scopus (из них 11 статей в журналах, входящих в первый и второй квартили Web of Science и/или Scopus). Результаты исследований представлены также в виде 60 публикаций в тезисах и материалах научных конференций. Разработанные технические решения и методы защищены четырьмя свидетельствами о регистрации программ для ЭВМ. В опубликованных работах материалы диссертации изложены полно.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав основной части, заключения, списка литературы и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 319 страниц, включая 43 рисунка и 11 таблиц. Список литературы содержит 299 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, сформулирована цель, поставлены задачи работы, изложены научная новизна, теоретическая и практическая значимость представляемой работы, а также положения, выносимые на защиту. Указаны сведения об апробации и внедрении результатов.

В **первой главе** представлен анализ современного состояния исследований в области теории производящих функций и методов на основе их применения, в том числе для задач описания информационных объектов. Введены основные понятия диссертационного исследования, приведена классификация видов производящих функций, а также способы оперирования и вычисления коэффициентов производящих функций.

Ключевым понятием, которое исследуется в диссертационной работе, является математический аппарат производящих функций, имеющий широкое приложение к перечислительным задачам со стороны подсчета разного рода объектов, то есть для определения количества объектов в некотором классе (в том числе для задач описания информационных объектов), что служит хорошей основой для решения задач хранения и генерации.

Определение 1. Обыкновенной производящей функцией произвольной (бесконечной) последовательности чисел $f(0), f(1), f(2), \ldots$ называется выражение вида

$$f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \ldots = \sum_{n \geq 0} f(n)\, x^n.$$

Производящая функция представляет собой последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной.

Классификация производящих функций зависит от количества параметров, от характера описываемого объекта (например полиномы), от количества формальных переменных и других условий. В данной диссертации рассматриваются обыкновенные производящие функции как основной тип производящих функций, тем не менее предлагаемые в диссертационной работе подходы могут быть применены и для других типов производящих функций.

Производящие функции как инструмент описания и изучения имеют разнообразное применение как в математике, так и в теоретической информатике, так как производящие функции позволяют получить компактное представление дискретных структур и предоставляют широкий набор функциональных возможностей при работе с такими структурами.

В качестве основных информационных объектов, для которых применяется аппарат производящих функций, можно выделить графы, деревья, пути, скобочные структуры, полиномы и многие другие.

Существуют достаточно много вариантов получения производящих функций из выражений описываемых ими коэффициентов. Можно выделить следующие методики:

1. Техника перегруппировки рядов (или манипуляция рядами);
2. Техника декомпозиции;
3. Операторные методы;
4. Техника дробного дифференцирования;
5. Теневое исчисление.

Однако в обратном направлении методы развиты не достаточно, отсутствуют унифицированные подходы определения коэффициентов производящих функций. Поэтому из ключевых задач при работе с производящими функциями выделяют вычисление соответствующих коэффициентов.

Анализ современного состояния показал, что существующие исследования в основном направлены на изучение производящих функций одной формальной переменной. Однако существует большое количество задач, связанных с производящими функциями многих переменных, в том числе для которых неизвестны явные представления (но известны производящие функции), например, задача нахождения вероятности наличия конкретного ребра в идеальном графе для ацтекского бриллианта, задача подсчета всех гистограмм и задача нахождения явных формул для числовых треугольников Дика и Моцкина с кратностями. Также, как и для одномерного случая, одной из ключевых задач при работе с многомерными производящими функциями выделяют вычисление соответствующих им коэффициентов. Тем не менее, для производящих функций многих переменных методы получения выражений их коэффициентов развиты недостаточно. Поэтому формирование общего подхода исследования степеней производящих функций многих переменных с целью получения явных представлений для различных информационных объектов имеет важное значение.

Во **второй главе** представлены основные результаты в области разработки математического исчисления над коэффициентами степеней производящих функций для формирования и описания информационных объектов. Излагаются методы получения коэффициентов степеней производящих функций для одномерного, двумерного и трехмерного случая.

Определение 2. Многомерной производящей функцией будем называть следующий формальный степенной ряд:

$$F(x,y,\ldots,z)=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\ldots\sum_{l\geq 0}f(n,m,\ldots,l)x^n y^m\cdots z^l.$$

Для производящих функций многих переменных соответствующий математический аппарат развит слабо, а в общем виде применение коэффициентов степеней производящих функций многих переменных исследовано недостаточно. Поэтому одной из задач данного диссертационного исследования является выделение класса производящих функций многих переменных и разработка новых методов получения явных выражений коэффициентов их степеней, а именно методов получения коэффициентов степеней взаимных, обратных, сложения, умножения и композиции производящих функций многих переменных.

Для начала определим общий вид k-й степени многомерной производящей функции:

$$F(x,y,\ldots,z)^k = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\cdots\sum_{l\geq 0} f(n,m,\ldots,l,k)x^n y^m \cdots z^l,$$

где $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда для $F(x,y,\ldots,z)$ с порядком $ord(F) > 0$, порядок для $F(x,y,\ldots,z)^k$, $k \in \mathbb{N}$, будет удовлетворять неравенству $ord(F^k) \geq k$.

В общем виде коэффициенты $f(n,m,\ldots,l,k)$ определяются как

$$f(n,m,\ldots,l,k) =$$

$$= \sum_{\eta_1+\ldots+\eta_k=n}\left(\sum_{\mu_1+\ldots+\mu_k=m}\left(\cdots\left(\sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_k=l}\left(\prod_{i=1}^{k} f(\eta_i,\mu_i,\ldots,\lambda_i)\right)\right)\cdots\right)\right),$$

где $\eta_i,\mu_i,\ldots,\lambda_i \in \mathbb{N}_0$. Здесь суммирование ведется по всем разложениям чисел $n,m,\ldots,l$ ровно на k членов.

Чтобы выделить класс коэффициентов степеней формальных степенных рядов, введем понятие композиты многомерной производящей функции.

Определение 3. Композита $F^{\Delta}(n,m,\ldots,l,k)$ многомерной производящей функции

$$F(x,y,\ldots,z) = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\cdots\sum_{l\geq 0} f(n,m,\ldots,l)x^n y^m \cdots z^l, \quad ord(F) \geq 1,$$

есть функция коэффициентов k-й степени функции $F(x,y,\ldots,z)$:

$$F(x,y,\ldots,z)^k = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\cdots\sum_{l\geq 0} F^{\Delta}(n,m,\ldots,l,k)x^n y^m \cdots z^l.$$

Для двумерных производящих функций получены следующие правила определения коэффициентов $g(n,m,k)$ производящей функции $G(x,y)^k$:

– если $G(x,y) = H(A(x,y),B(x,y))$, то

$$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m}\sum_{k_b=0}^{n+m-k_a} h(k_a,k_b,k)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A^{\Delta}(i,j,k_a)B^{\Delta}(n-i,m-j,k_b);$$

– если $G(x,y) = A(x,y) + B(x,y)$, то

$$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m}\binom{k}{k_a}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A^{\Delta}(i,j,k_a)B^{\Delta}(n-i,m-j,k-k_a);$$

– если $G(x,y) = A(x,y) \cdot B(x,y)$, то

$$g(n,m,k) = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m+k}{i+k} \binom{i+k-1}{i} \frac{a(n,m,i)}{a(0,0)^{i+k}} (-1)^i;$$

– если $A(x,y) \cdot G(x,y) = 1$, то

$$g(n,m,k) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} A^{\Delta}(i,j,k) B^{\Delta}(n-i,m-j,k);$$

– если $A(G(x,y),y) = x$, то

$$g(n,m,k) = \frac{k}{n} \sum_{i=0}^{n+m} \binom{2n+m-k}{i+n} \binom{i+n-1}{i} \frac{A^{\Delta}(i+n-k,m,i)}{a(1,0)^{i+n}} (-1)^i.$$

В таблице 1 представлены полученные результаты для частных случаев композиции двумерных производящих функций.

Аналогично получены правила определения коэффициентов степеней взаимных, обратных и композиции трехмерных производящих функций. По такому же пути правила вычисления композит могут быть расширены на производящие функции для случая n переменных.

Пусть дана рациональная производящая функция многих переменных следующего вида:

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) =$$

$$= \sum_{k_1\geq 0} \sum_{k_2\geq 0} \cdots \sum_{k_n\geq 0} f(k_1,k_2,\dots,k_n)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} = \frac{P(x_1,x_2,\dots,x_n)}{Q(x_1,x_2,\dots,x_n)},$$

где $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и $Q(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — производящие функции n переменных

$$P(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{k_1\geq 0} \sum_{k_2\geq 0} \cdots \sum_{k_n\geq 0} p(k_1,k_2,\dots,k_n)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},$$

$$Q(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{k_1\geq 0} \sum_{k_2\geq 0} \cdots \sum_{k_n\geq 0} q(k_1,k_2,\dots,k_n)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}.$$

Тогда для получения явных выражений коэффициентов функций данного вида можно воспользоваться следующим методом:

1. Представить производящую функцию $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ как сумму производящих функций $P_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$, для которых можно получить их коэффициенты $p_i(k_1,k_2,\dots,k_n)$ и композиты $P_i^{\Delta}(k_1,k_2,\dots,k_n,k)$:

$$P(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i} P_i(x_1,x_2,\dots,x_n);$$

Таблица 1 — Правила определения коэффициентов степеней двумерных производящих функций

Функция	Явное представление
$G(x,y) = H(A(x,y),B(y))$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m} \sum_{k_b=0}^{n+m-k_a} h(k_a,k_b,k) \sum_{j=0}^{m} A^{\Delta}(n,j,k_a) B^{\Delta}(m-j,k_b)$
$G(x,y) = H(A(y),B(x,y))$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m} \sum_{k_b=0}^{n+m-k_a} h(k_a,k_b,k) \sum_{j=0}^{m} A^{\Delta}(j,k_a) B^{\Delta}(n,m-j,k_b)$
$G(x,y) = H(A(x,y),B(x))$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m} \sum_{k_b=0}^{n+m-k_a} h(k_a,k_b,k) \sum_{i=0}^{n} A^{\Delta}(i,m,k_a) B^{\Delta}(n-i,k_b)$
$G(x,y) = H(A(x),B(x,y))$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m} \sum_{k_b=0}^{n+m-k_a} h(k_a,k_b,k) \sum_{i=0}^{n} A^{\Delta}(i,k_a) B^{\Delta}(n-i,m,k_b)$
$G(x,y) = H(A(x,y),y)$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m} \sum_{k_b=0}^{n+m-k_a} h(k_a,k_b,k) A^{\Delta}(n,m-k_b,k_a)$
$G(x,y) = H(y,B(x,y))$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m} \sum_{k_b=0}^{n+m-k_a} h(k_a,k_b,k) B^{\Delta}(n,m-k_a,k_b)$
$G(x,y) = H(A(x,y),x)$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m} \sum_{k_b=0}^{n+m-k_a} h(k_a,k_b,k) A^{\Delta}(n-k_b,m,k_a)$
$G(x,y) = H(x,B(x,y))$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m} \sum_{k_b=0}^{n+m-k_a} h(k_a,k_b,k) B^{\Delta}(n-k_a,m,k_b)$
$G(x,y) = H(A(x),B(y))$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n} \sum_{k_b=0}^{m} h(k_a,k_b,k) A^{\Delta}(n,k_a) B^{\Delta}(m,k_b)$
$G(x,y) = H(A(x),y)$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n} h(k_a,m,k) A^{\Delta}(n,k_a)$
$G(x,y) = H(x,B(y))$	$g(n,m,k) = \sum_{k_b=0}^{m} h(n,k_b,k) B^{\Delta}(m,k_b)$
$G(x,y) = H(A(x,y))$	$g(n,m,k) = \sum_{k_a=0}^{n+m} h(k_a,k) A^{\Delta}(n,m,k_a)$

2. Найти явные выражения коэффициентов $p_i(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ и композит $P_i^{\Delta}(k_1,k_2,\ldots,k_n,k)$ для всех полученных производящих функций $P_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

3. Представить производящую функцию $Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ как сумму производящих функций $Q_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, для которых можно получить их коэффициенты $q_i(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ и композиты $Q_i^{\Delta}(k_1,k_2,\ldots,k_n,k)$:

$$Q(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 1 - \sum_i Q_i(x_1,x_2,\ldots,x_n);$$

4. Найти явные выражения коэффициентов $q_i(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ и композит $Q_i^{\Delta}(k_1,k_2,\ldots,k_n,k)$ для всех полученных производящих функций $Q_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

5. Последовательно выполняя операции композиции и сложения для каждой $Q_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, получить композиту $Q_s^{\Delta}(k_1,k_2,\ldots,k_n,k)$ производящей функции

$$1 - Q(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_i Q_i(x_1,x_2,\ldots,x_n);$$

6. Получить коэффициенты производящей функции

$$R(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{1}{Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{1}{1 - \sum\limits_i Q_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

по формуле

$$r(k_1,k_2,\ldots,k_n) = \sum_{k=0}^{k_1+k_2+\ldots+k_n} Q_s^{\Delta}(k_1,k_2,\ldots,k_n,k);$$

7. Получить коэффициенты производящей функции

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{P(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot R(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

применив операцию умножения производящих функций

$$f(k_1,k_2,\ldots,k_n) = \sum_{l_1\geq 0}\sum_{l_2\geq 0}\cdots\sum_{l_n\geq 0} p(l_1,l_2,\ldots,l_n)\, r(k_1-l_1,k_2-l_2,\ldots,k_n-l_n).$$

По итогу выполнения всех требуемых действий будет получено явное выражение коэффициентов рациональных производящих функций многих переменных.

За счет разработанного математического исчисления над коэффициентами степеней производящих функций многих переменных представлен комплексный метод формирования информационных объектов. Комплексный метод состоит из совокупности методов и правил для оперирования производящими функциями одной, двух и трех переменных, а также n-мерных рациональных производящих функций. С точки зрения приложения разработанных подходов найдены явные выражения для ряда известных последовательностей онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей и соответствующих им информационных объектов. Рассмотрен вопрос применения предложенного комплексного метода для формирования и описания информационных объектов на следующих примерах: специальные числа и полиномы, числовые треугольники. Применение предложенного комплексного метода позволяет для информационных объектов, описываемых производящими функциями, получать явные представления, обладающие меньшей вычислительной сложностью по сравнению с вычислением коэффициентов на основе формул, построенных на разбиениях.

В **третьей главе** представлены основные результаты в области разработки методов и алгоритмов комбинаторной генерации.

Структура многих информационных объектов может быть представлена в виде иерархической или рекурсивной зависимости. Для представления и кодирования таких информационных объектов достаточно хорошо подходит применение древовидных структур данных. В свою очередь, это приводит к возможности описания исследуемого информационного объекта с помощью формального комбинаторного множества, для которого применимы различного рода алгоритмы комбинаторной генерации. Среди основных подходов к разработке алгоритмов комбинаторной генерации выделяются: метод поиска с возвратом (backtracking), ECO-метод, метод Ф. Флажоле, метод Б.Я. Рябко, метод на основе деревьев И/ИЛИ.

В рамках диссертационного исследования предложена модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ за счет применения разработанного комплексного метода получения коэффициентов производящих функций многих переменных для решения задач поиска функций мощности комбинаторных множеств, а также за счет применения различных методов поиска для повышения быстродействия алгоритмов генерации. Предложенный модифицированный метод заключается в выполнении последовательности следующих шагов:

1. Если известно выражение функции мощности $f(n,m,\ldots,l) = |A_{n,m,\ldots,l}|$ комбинаторного множества $A_{n,m,\ldots,l}$, принадлежащее алгебре $\{\mathbb{N},+,\times,R\}$, то переход на шаг 4;

2. Если известно выражение производящей функции многих переменных для последовательности значений функции мощности $f(n,m,\ldots,l)$ комбинаторного множества $A_{n,m,\ldots,l}$, то применить комплексный метод получения явных выражений коэффициентов производящих функций многих

переменных. Иначе дальнейшее применение метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ невозможно;

3. Если получено выражение функции мощности $f(n,m,\ldots,l)$ комбинаторного множества $A_{n,m,\ldots,l}$, принадлежащее алгебре $\{\mathbb{N},+,\times,R\}$, то переход на шаг 4. Иначе дальнейшее применение метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ невозможно;

4. На основе выражения функции мощности $f(n,m,\ldots,l)$ комбинаторного множества $A_{n,m,\ldots,l}$ построить структуру дерева И/ИЛИ D;

5. Определить биекцию $A_{n,m,\ldots,l} \leftrightarrow W(D)$ между элементами комбинаторного множества $A_{n,m,\ldots,l}$ и множества всех вариантов v дерева И/ИЛИ D в виде алгоритмов `ObjectToVariant`$(a,D) : A_{n,m,\ldots,l} \to W(D)$, где $a \in A_{n,m,\ldots,l}$, и `VariantToObject`$(v,D) : W(D) \to A_{n,m,\ldots,l}$, где $v \in W(D)$;

6. Определить биекцию $W(D) \leftrightarrow \mathbb{N}_{|W(D)|}$ между элементами множества всех вариантов v дерева И/ИЛИ D и конечного множества натуральных чисел $\mathbb{N}_{|W(D)|} = \{0,1,\ldots,|W(D)|-1\}$ с помощью алгоритмов `RankVariant`$(v,D) : W(D) \to \mathbb{N}_{|W(D)|}$, где $v \in W(D)$, и `UnrankVariant`$(r,D) : \mathbb{N}_{|W(D)|} \to W(D)$, где $r \in \mathbb{N}_{|W(D)|}$;

7. Если в структуре дерева И/ИЛИ D присутствует ИЛИ-узел с количеством сыновей, которое зависит от параметров комбинаторного множества $A_{n,m,\ldots,l}$, то попробовать уменьшить вычислительную сложность алгоритма `UnrankVariant`(r,D) за счет применения методов приближенных вычислений или метода двоичного поиска для поиска выбранного сына ИЛИ-узла.

Совокупность алгоритмов `ObjectToVariant`$(a,D) : A_{n,m,\ldots,l} \to W(D)$ и `RankVariant`$(v,D) : W(D) \to \mathbb{N}_{|W(D)|}$ представляют собой алгоритм ранжирования комбинаторного объекта `Rank`$(a) : A_{n,m,\ldots,l} \to \mathbb{N}$, который позволяет кодировать комбинаторный объект $a \in A_{n,m,\ldots,l}$ уникальным рангом $r \in \mathbb{N}_{|W(D)|}$.

Совокупность алгоритмов `UnrankVariant`$(r,D) : \mathbb{N}_{|W(D)|} \to W(D)$ и `VariantToObject`$(v,D) : W(D) \to A_{n,m,\ldots,l}$ представляют собой алгоритм генерации по рангу комбинаторного объекта `Unrank`$(r) : \mathbb{N} \to A_{n,m,\ldots,l}$, который позволяет восстановить комбинаторный объект $a \in A_{n,m,\ldots,l}$ из ранга $r \in \mathbb{N}_{|W(D)|}$.

Предложенный модифицированный метод построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ отличается от оригинального метода и его модификаций применением разработанного комплексного метода получения явных выражений коэффициентов производящих функций многих переменных для нахождения выражения функции мощности комбинаторного множества, в том числе определяемого несколькими параметрами (отражено в действиях шага 2). Также предложенный модифицированный метод отличается применением методов приближенных вычислений и метода двоичного поиска для поиска выбранного сына ИЛИ-узла, что позволяет снижать вычислительную сложность алгоритмов генерации по рангу (отражено в действиях шага 7).

С целью апробации предложенного модифицированного метода построения алгоритмов комбинаторной генерации, разработаны новые алгоритмы ранжирования и генерации по рангу для целого набора комбинаторных множеств. В частности, рассмотрено применение предложенных подходов к уменьшению вычислительной сложности алгоритмов генерации по рангу за счет использования методов приближенных вычислений и метода двоичного поиска. Для этого представлена модификация алгоритма генерации по рангу для классического комбинаторного множества сочетаний из n по m в колексикографическом порядке с применением методов приближенных вычислений для поиска выбранного сына ИЛИ-узла. Вычислительная сложность модифицированного алгоритма для предварительного поиска значения k составляет $O(m \cdot (m + \varepsilon m)) \approx O(m^2)$. В отличие от оригинального алгоритма, полученный алгоритм можно эффективно применять при больших n и малых m, поскольку время работы этого алгоритма зависит только от параметра m. Также разработаны новые алгоритмы ранжирования и генерации по рангу для комбинаторного множества самонепересекающихся решеточных путей на плоскости. В данном случае применение метода двоичного поиска для поиска выбранного сына ИЛИ-узла позволяет сократить в среднем количество требуемых вычислительных операций и получить вычислительную сложность $O(n \log_2 n)$, что является лучшим значением по сравнению с исходной версией алгоритма с вычислительной сложностью $O(n^2)$.

Кроме того, рассмотрено применение разработанного комплексного метода получения явных выражений коэффициентов производящих функций многих переменных для нахождения выражения функции мощности комбинаторного множества. Для этого рассмотрено комбинаторное множество помеченных путей Дика длины $2n$ с m подъемами на возвратных шагах, функция мощности которого определяется производящей функцией двух переменных. Применяя разработанные во второй главе правила определения коэффициентов для производящих функций исследуемого комбинаторного множества, получено явное представление для ее коэффициентов. Полученное выражение функции мощности комбинаторного множества принадлежит требуемой алгебре $\{\mathbb{N}, +, \times, R\}$, что позволило на ее основе построить структуру дерева И/ИЛИ и разработать алгоритмы комбинаторной генерации. Также рассмотрено комбинаторное множество путей Дика с пиками, функция мощности которого определяется производящей функцией трех переменных. Применяя разработанные во второй главе правила определения коэффициентов для производящей функции исследуемого комбинаторного множества, получено явное представление и рекуррентное соотношение для ее коэффициентов. Полученное рекуррентное выражение функции мощности комбинаторного множества принадлежит требуемой алгебре $\{\mathbb{N}, +, \times, R\}$, что позволило на ее основе построить структуру дерева И/ИЛИ и разработать новые алгоритмы комбинаторной генерации.

Дополнительно рассмотрен процесс разработки новых алгоритмов ранжирования и генерации по рангу с помощью метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ для следующих комбинаторных множеств: множество последовательностей вариантов ответа на тест с вопросами закрытого типа; множество исходов турнира на выбывание; множество частей круга, полученных при его разрезе прямыми линиями; множество правильных скобочных последовательностей, разряженных нулями; множество разбиений множества. Полученные результаты подтверждают универсальность и эффективность применения данного метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ для широкого многообразия комбинаторных множеств.

В **четвертой главе** представлены основные результаты в области разработки базы знаний производящих функций двух переменных.

Приведенный в первых главах математический инструментарий позволяет решать задачи формирования информационных объектов с помощью соответствующих правил и операций. При этом важнейшее значение в выполнении этих правил и операций играют коэффициенты k-й степени производящих функций многих переменных. Дополнительным шагом в развитии данного направления является создание соответствующей базы знаний для производящих функций двух переменных и их коэффициентов k-й степени.

Переход на исследование коэффициентов степеней производящих функций многих переменных открыл новые возможности для решения задач, основанных на применении композиции производящих функций многих переменных, а также для решения смежных задач. Запишем основные соотношения для коэффициентов степеней производящих функций двух переменных и дадим соответствующие определения.

Пусть задана производящая функция вида

$$U(x,y) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} u(n,m)\, x^n y^m.$$

Тогда числовой пирамидой для производящей функции $U(x,y)$ будем называть трехмерную таблицу, формируемую выражением

$$T(n,m,k) = [x^n y^m] U(x,y)^k,$$

где $T(n,m,k)$ описывается выражением, состоящим из произведения или деления биномиальных коэффициентов, а также рациональных выражений, состоящих из переменных n, m, k и констант.

Числовая пирамида состоит из коэффициентов k-й степени производящей функции $U(x,y)$. Тогда для числовой пирамиды можно записать рекуррентное выражение вида

$$T(n,m,k) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} T(i,j,k-1)\, u(n-i,m-j).$$

Структура фрейма предлагаемой базы знаний содержит:

– десятичный четырехзначный номер производящей функции;

– явное выражение производящей функции $U_{num}(x,y)$;

– явное выражение коэффициентов $T_{num}(n,m,k)$;

– числовую пирамиду, представленную трехмерной таблицей;

– связь с другими числовыми пирамидами (взаимная, обратная);

– список ссылок на источники информации из онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS;

– программные функции вычисления коэффициентов $T_{num}(n,m,k)$;

– программные функции получения представления в формате Latex.

Фреймовая модель представления знаний предлагаемой базы знаний отражена в таблице 2.

Таблица 2 — Фреймовая модель представления знаний

Имя фрейма: <PyramidN>		
Имя слота	Тип данных	Значение слота
Слот 1: <Производящая функция>	Выражение	$U_{num}(x,y)$
Слот 2: <Явное представление>	Выражение	$T_{num}(n,m,k)$
Слот 3: <Пирамида>	Целое	Трехмерная матрица
Слот 4: <Внутренние связи>	Список	Перечень взаимных, инверсных и обратных числовых пирамид
Слот 5: <Связь с OEIS>	Список	Перечень ссылок URL
Слот 6: <Свойства>	Текст	Свойства симметричности
Слот 7: < Процедура 1>	Процедура	Построение числовой пирамиды
Слот 8: < Процедура 2>	Процедура	Получение взаимных и обратных числовых пирамид
Слот 9: < Процедура 3>	Процедура	Вычисление коэффициентов производящей функции $U_{num}(x,y)$
Слот 10: < Процедура 4>	Процедура	Процедура получения представления в формате TeX
Слот 11: < Процедура 5>	Процедура	Процедура получения представления в формате Maxima
Слот 12: < Процедура 6>	Процедура	Процедура построения числовой пирамиды
Слот 13: < Процедура 7>	Процедура	Поиск числовой пирамиды по значениям ее слота
Слот 14: < Процедура 8>	Связанная процедура	Проверка на дублирование

Данная база знаний реализована в виде электронной энциклопедии числовых пирамид, преимуществом которой является автоматизированный процесс поиска хранящихся записей. Электронная энциклопедия числовых пирамид (ЭЭЧП) разработана в форме веб-сайта, наподобие онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS. Рассмотрим модель представления данных, которая состоит из следующих атрибутов:

1. Идентификатор числовой пирамиды num;
2. Формула производящей функции $U_{num}(x,y)$;
3. Явная формула коэффициентов $T_{num}(n,m,k)$;
4. Программа вычисления коэффициентов числовой пирамиды по формуле $T_{num}(n,m,k)$;
5. Программа вычисления коэффициентов числовой пирамиды через разложение в ряд производящей функции $U_{num}(x,y)$;
6. Представление производящей функции $U_{num}(x,y)$ в виде mathml-текста;
7. Представление явной формулы коэффициентов $T_{num}(n,m,k)$ в виде mathml-текста;
8. Представление производящей функции $U_{num}(x,y)$ в виде программы на языке Maxima;
9. Представление явной формулы коэффициентов $T_{num}(n,m,k)$ в виде программы на языке Maxima;
10. Представление производящей функции $U_{num}(x,y)$ в виде программы на языке Mathematica;
11. Представление явной формулы коэффициентов $T_{num}(n,m,k)$ в виде программы на языке Mathematica;
12. Список связанных пирамид (взаимная, инверсная, реверсивная, инверсная, обратная реверсивная);
13. Список ссылок на последовательности онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS;
14. Список свойств пирамиды;
15. Представление производящей функции $U_{num}(x,y)$ в виде Latex-текста;
16. Представление явной формулы коэффициентов $T_{num}(n,m,k)$ в виде Latex-текста.

На рисунке 1 представлена структура программной системы ЭЭЧП.

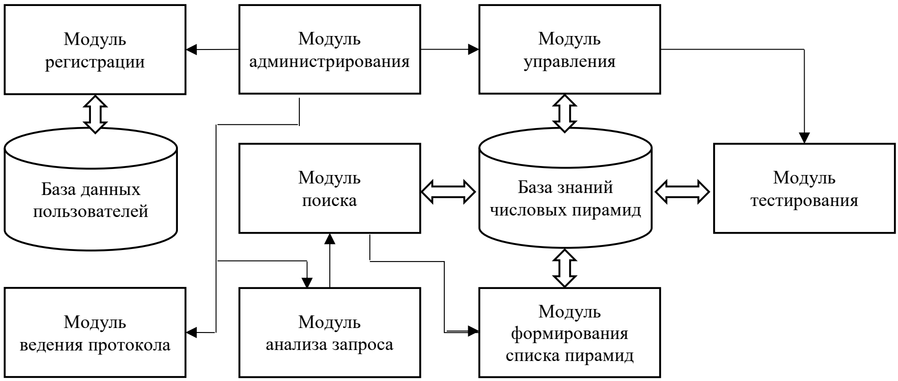

Рисунок 1 — Структура программной системы электронной энциклопедии числовых пирамид

Структура программной системы ЭЭЧП состоит из базы данных пользователей и базы знаний числовых пирамид, а также следующих модулей системы:

1. Модуль администрирования: обеспечивает координацию и установку модулей системы, базы данных и базы знаний, а также организует права доступа к системе;
2. Модуль регистрации: обеспечивает регистрацию и вход в систему;
3. Модуль управления базой знаний числовых пирамид: обеспечивает ввод и редактирование данных и программ для числовых пирамид;
4. Модуль анализа запроса: производит синтаксический анализ запроса пользователя, при неверном запросе формирует сообщение об ошибке, при верном запросе производит его преобразование для дальнейшей обработки и передает его в модуль поиска;
5. Модуль поиска: производит поиск подходящей числовой пирамиды в базе знаний и формирует список таких числовых пирамид (если в результате поиска список пуст, то формирует соответствующее сообщение, иначе передает полученный список в модуль формирования списка пирамид);
6. Модуль формирования списка пирамид: обеспечивает преобразование списка числовых пирамид в выходное представление и передает его пользователю;
7. Модуль ведения протокола: осуществляет запись протокола в файл протокола (структура протокола содержит информацию о пользователе, запросе и работе модулей системы);
8. Модуль тестирования: обеспечивает тестирование базы знаний при внесении в нее новых числовых пирамид (проверяется соответствие производящей функции и явной формулы числовой пирамиды, отсутствие копий этой числовой пирамиды под другими номерами, проверяются ссылки на другие числовые пирамиды).

Язык запросов описывается регулярной грамматикой и содержит следующие команды:

1. F:<выражение производящей функции числовой пирамиды>;
2. T:<выражение явной формулы коэффициентов числовой пирамиды>;
3. D:<список строк со значениями коэффициентов числовой пирамиды>;
4. <идентификатор числовой пирамиды>.

Полученная база знаний, содержащая записи о 1502 производящих функций и их коэффициентов, является мощным инструментом для тестирования модулей программных систем компьютерной алгебры, выполняющих преобразования производящих функций и их коэффициентов.

Предложена методика использования разработанной базы знаний производящих функций двух переменных, которая позволяет решать широкий круг задач оперирования производящими функциями двух переменных и их коэффициентами для формирования информационных объектов. Например, использование базы знаний может обеспечить построение алгоритмов комбинаторной генерации для более сложных комбинаторных объектов, определяемых производящими функциями многих переменных, без проведения дополнительных вычислений.

В **пятой главе** представлены основные результаты в области разработки методов генерации критериев простоты числа.

Под критерием простоты числа понимается утверждение, которому должны удовлетворять простые числа. Если целое число n не удовлетворяет условиям критерия простоты числа, то данное число n гарантированно будет составным, иначе число n является простым с некоторой вероятностью ошибки.

Рассмотрим свойства композиции производящих функций, направленные на получение новых критериев простоты числа. Данное исследование базируется на применении композиции обыкновенной производящей функции с целыми коэффициентами и логарифмической производящей функции.

Теорема 1. *Пусть заданы обыкновенные производящие функции с целыми коэффициентами* $F(x) = \sum\limits_{n>0} f(n)\,x^n$ *и* $B(x) = \sum\limits_{n\geq 0} b(n)\,x^n$*, а также композиция производящих функций* $G(x) = R(F(x)) = \sum\limits_{n>0} g(n)\,x^n$*, где* $R(x) = \int B(x)dx$*. Тогда значение выражения*

$$ng(n) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{F^{\Delta}(n,k)b(k-1)}{k}$$

будет целым для всех $n \in \mathbb{N}$*.*

Следствие 1. *Значение выражения*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{F^{\Delta}(n,k)b(k-1)}{k} \tag{1}$$

есть целое для любого простого числа n. Обратное утверждение неверно.

Полученные свойства композиции производящих функций могут применяться для построения новых критериев простоты числа. Для этого будем использовать совокупность обыкновенной и логарифмической производящих функций $F(x) = \sum\limits_{n>0} f(n)\, x^n$ и $R(x) = \sum\limits_{n>0} r(n)x^n = \sum\limits_{n>0} \frac{a(n)}{n} x^n$, где $f(n)$ и $a(n)$ являются целочисленными последовательностями. Тогда метод построения критериев простоты числа заключается в следующем:

1. Необходимо получить явную формулу коэффициентов композиции производящих функций вида $G(x) = R\left(F(x)\right) = \sum\limits_{n>0} g(n)\, x^n$;

2. Согласно Теореме 1 выражение $ng(n)$ является целым для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому необходимо произвести операцию дифференцирования;

3. По возможности упростить полученное выражение, а именно получить выражение, зависящее только от n и без дополнительного суммирования по k. Для упрощения можно воспользоваться онлайн-энциклопедией целочисленных последовательностей;

4. Необходимо привести полученное выражение к виду выражения (1), выполнив деление на n и вычитание n-го члена суммы.

В итоге после всех преобразований получается выражение, которое зависит только от n и которое будет целым для простых n, то есть получаем критерий простоты числа для вероятностных тестов простоты числа. В зависимости от параметров композиции, а именно от выбора логарифмической производящей функции и композиты производящей функции внутренней функции композиции, получаемые критерии простоты числа будут иметь разные числовые и вероятностные характеристики, а также оценки вычислительной сложности.

С применением разработанного метода получены критерии простоты числа на основе композиции логарифмической и обыкновенной производящих функций, композиции экспоненциальной и обыкновенной производящих функций, а также рекуррентные критерии простоты. Получены критерии простоты, связанные с числами Люка, Фибоначчи, Белла, полиномами Эйлера и другие. Показана взаимосвязь полученного метода с существующими алгоритмами (в частности, получен критерий простоты числа на основе малой теоремы Ферма).

Кроме того, на основе предложенного метода разработано специализированное программное обеспечение — генератор критериев простоты числа (Primality Criterion Generator). Использование данного программного обеспечения позволило сформировать более 700 критериев простоты числа для конкретных производящих функций. Также в дополнение реализован инструментарий для анализа и сравнения тестов и критериев простоты числа в виде специализированного программного обеспечения (Primality Test Analyser). Разработанное программное обеспечение позволяет значительно облегчить процесс анализа и сравнения тестов и критериев простоты числа за счет автоматизации данного процесса и представления итоговой информации в удобной для понимания и сравнения форме.

Благодаря полученным результатам определены теоретические основы для дальнейшего построения новых инструментальных средств, основанных на алгоритмах проверки чисел на простоту.

В **шестой главе** представлены основные результаты в области разработки программного обеспечения для вычисления коэффициентов степеней производящих функций и для генерации по рангу элементов комбинаторных множеств в виде библиотек к математическим пакетам Maxima и Mathematica.

Описанные во второй главе методы реализованы в качестве библиотеки для математического пакета Mathematica, которая автоматизирует процесс получения коэффициентов производящих функций с использованием композит. Разработанная библиотека по работе с производящими функциями содержит:

1. Перечень композит для заданных производящих функций;
2. Правила вычисления композит;
3. Функции для представления информационных объектов на основе композит производящих функций.

Перечень композит для заданных производящих функций содержит 150 программных функций для вычисления композит производящих функций полиномиального, рационального, тригонометрического, гиперболического, логарифмического, экспоненциального и иррационального видов. Правила вычисления композит содержат 26 программных функций для вычисления коэффициентов и композит суммы, умножения, композиции, взаимных и обратных производящих функций, а также вывода найденных коэффициентов и композит производящих функций в формате таблиц и математических выражений.

Раздел, связанный с применением композит, содержит функции для:

– нахождения композит производящих функций, заданных уравнением;

– нахождения коэффициентов диагоналей треугольника композит;

– решения рекуррентных уравнений с производящими функциями;

– поиска критериев простоты числа на основе свойств композиции обыкновенных производящих функций с целыми коэффициентами.

Существующие решения в современных математических пакетах для одномерного случая, в отличие от многомерного, позволяют вычислять коэффициенты производящих функций за счет встроенных инструментов.

Проведенное сравнение показало, что использование разработанной библиотеки для вычисления коэффициентов производящих функций оправдано при определенных условиях. Также можно сказать, что реализованный в библиотеке метод нахождения коэффициентов производящих функций, основанный на композитах производящих функций, не уступает другим рассмотренным методам, потому что тратит наименьшее количество оперативной памяти на вычисления и не самое большое количество времени на вычисления.

Для производящих функций многих переменных вычисление коэффициентов стандартными способами возможно только для простых производящих функций. Например, вычисление коэффициентов производящей функции $F(x,y) = e^{x+y}$ соразмерно как по времени, так и по объему затрачиваемой памяти. Однако при усложнении производящих функций за счет композиции с другими производящими функциями, стандартными средствами затруднительно посчитать соответствующие коэффициенты в отличие от подхода, основанного на разработанных во второй главе методах.

В итоге сравнение способов вычисления коэффициентов производящих функций для одномерного случая показало, что методы, разработанные и реализованные в данной диссертации, сопоставимы с другими методами по критерию затраченного на вычисления времени, но предполагают меньшее количество затрачиваемой оперативной памяти. Для производящих функций двух и трех переменных предлагаемые методы показывают значительно лучшие результаты по сравнению с аналогами.

Также на основе результатов, полученных во второй главе, разработана библиотека к математическому пакету Mathematica для вычисления выражений полиномов. Разработанная библиотека содержит: 23 программные функции для вычисления полиномов Абеля, Бернулли, Бесселя, Чебышева, Эйлера, Эйлера-Фробениуса, Гегенбауэра, Эрмита, Гумберта, Якоби, Лагерра, Лежандра, Лерча, Малера, Мейкснера, Мотта, Наруми, Петерса, Стирлинга и Белла. Сравнение предлагаемых методов проведено на примере вычисления полиномов Белла. В качестве аналогов взяты встроенные функции вычисления полиномов Белла в Mathematica и Maple. Результаты сравнения показали преимущество предлагаемого способа над существующими по критерию затраченного на вычисления времени и оперативной памяти.

Кроме того, разработано программное обеспечение для ранжирования и генерации по рангу элементов комбинаторных множеств. Данное программное обеспечение представляет собой совокупность подключаемых библиотек к системе компьютерной алгебры Maxima и автоматизирует процессы вычислений в рамках разработанных в третьей главе алгоритмов комбинаторной генерации.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы по проделанной работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решена крупная научная задача развития методов преобразования информации в данные и знания, применяющих аппарат производящих функций многих переменных.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Изложены методы получения коэффициентов степеней производящих функций для случая одномерных, двумерных, трехмерных производящих функций и n-мерных рациональных производящих функций. Рассмотрены правила преобразования коэффициентов степеней взаимных, обратных и композиции производящих функций многих переменных, что позволяет получить их явные представления. За счет разработанного математического исчисления над коэффициентами степеней производящих функций представлен комплексный метод формирования информационных объектов, состоящий из совокупности методов и правил оперирования производящими функциями одной, двух и трех переменных, а также n-мерными рациональными производящими функциями. В качестве приложения разработанных подходов найдены явные выражения для ряда известных последовательностей онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей и ряда информационных объектов. Рассмотрен вопрос применения предложенного комплексного метода для формирования и описания информационных объектов на следующих примерах: специальные числа и полиномы, числовые треугольники и решеточные пути. Полученные результаты дополняют имеющиеся методы в теории производящих функций и теории полиномов на предмет эффективного определения явных представлений для соответствующих информационных объектов, а также позволяют находить связанные с ними разнообразные свойства;

2. Представлен модифицированный метод построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ, который отличается от оригинального метода и его модификаций применением разработанного комплексного метода получения явных выражений коэффициентов производящих функций многих переменных для нахождения выражения функции мощности комбинаторного множества, в том числе определяемого несколькими параметрами. Также предложенный метод отличается применением методов приближенных вычислений и двоичного поиска для поиска выбранного сына ИЛИ-узла, что позволяет снижать вычислительную сложность алгоритмов генерации по рангу;

3. Разработаны алгоритмы комбинаторной генерации для информационных объектов, представленных комбинаторными множествами: множество сочетаний из n по m в колексикографическом порядке; множество самонепересекающихся решеточных путей на плоскости; множество помеченных путей Дика длины $2n$ с m подъемами на возвратных шагах; множество путей Дика с пиками; множество последовательностей вариантов

ответа на тест с вопросами закрытого типа; множество исходов турнира на выбывание; множество частей круга, полученных при его разрезе прямыми линиями; множество правильных скобочных последовательностей, разряженных нулями; множество разбиений множества;

4. Создана база знаний производящих функций двух переменных, основанная на фреймовой модели. Данная база знаний реализована в виде автоматизированной электронной энциклопедии числовых пирамид, преимуществом которой является автоматизированный процесс поиска хранящихся записей. Полученная база знаний, содержащая 1502 производящие функции и их коэффициенты, является мощным инструментом для тестирования модулей программных систем компьютерной алгебры, выполняющих преобразования производящих функций и их коэффициентов;

5. Представлен метод построения критериев простоты числа на основе методов оперирования коэффициентами степеней производящих функций. С применением разработанного метода получены критерии простоты числа. Также на основе предложенного метода разработано специализированное программное обеспечение — генератор критериев простоты числа, и программа для анализа сгенерированных критериев. Благодаря полученным результатам определены теоретические основы для дальнейшего построения новых инструментальных средств, основанных на алгоритмах проверки чисел на простоту;

6. На основе разработанных методов и алгоритмов создано программное обеспечение для вычисления коэффициентов степеней производящих функций и для генерации по рангу элементов комбинаторного множества в виде библиотек к математическим пакетам Maxima и Mathematica. Применение разработанного программного обеспечения позволяет решать с меньшими затратами следующие задачи: находить явные выражения композиции производящих функций, строить алгоритмы вычисления матричных представлений обратных и взаимных производящих функций, находить решения функциональных уравнений на основе уравнения Лагранжа, строить критерии простоты числа, получать алгоритмы ранжирования и генерации по рангу элементов комбинаторных множеств.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в ведущих рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов кандидатских и докторских диссертационных работ

1. **Кручинин Д.В.** Метод построения алгоритмов проверки простоты натуральных чисел для задач защиты информации / Д.В. Кручинин, В.В. Кручинин // Доклады ТУСУР. — 2011. — Т. 24, № 2. — С. 247–251.

2. **Кручинин Д.В.** О свойствах коэффициентов суперпозиции некоторых производящих функций / Д.В. Кручинин // Прикладная дискретная математика. — 2012. — Т. 15, № 1. — С. 55–59.
3. **Кручинин Д.В.** Метод построения рекуррентных вероятностных генераторов простых чисел / Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУР. — 2012. — Т. 25, № 2. — С. 131–135.
4. **Кручинин Д.В.** Программное обеспечение для анализа тестов простоты натурального числа / Д.В. Кручинин, Ю.В. Шабля // Доклады ТУСУР. — 2014. — Т. 34. — С. 95–99.
5. Шабля Ю.В. Генератор критериев простоты натурального числа на основе свойств композиции производящих функций / Ю.В. Шабля, **Д.В. Кручинин**, А.А. Шелупанов // Доклады ТУСУР. — 2015. — Т. 38. — С. 97–101.
6. Перминова М.Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М.Ю. Перминова, В.В. Кручинин, **Д.В. Кручинин** // Доклады ТУСУР. — 2015. — Т. 38. — С. 102–107.
7. Актуальные направления развития методов и средств защиты информации / А.А. Шелупанов, О.О. Евсютин, А.А. Конев, Е.Ю. Костюченко, **Д.В. Кручинин**, Д.С. Никифоров // Доклады ТУСУР. — 2017. — Т. 20, № 3. — С. 11–24.
8. Сравнительный анализ вычислительных способов нахождения коэффициентов ряда Тейлора в математических пакетах / В.С. Мельман, Ю.В. Шабля, **Д.В. Кручинин**, В.В. Кручинин // Доклады ТУСУР. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 71–74.
9. Шабля Ю.В. Модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе применения теории производящих функций / Ю.В. Шабля, **Д.В. Кручинин** // Доклады ТУСУР. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 55–60.
10. **Кручинин Д.В.** База знаний коэффициентов k-степени производящих функций двух переменных / Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУР. — 2021. — Т. 24, № 4. — С. 85–89.
11. **Кручинин Д.В.** Модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе применения производящих функций многих переменных и приближенных вычислений / Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУР. — 2022. — Т. 25, № 1. — С. 55–60.
12. **Кручинин Д.В.** Методика использования базы знаний производящих функций двух переменных / Д.В. Кручинин // Системы анализа и обработки данных. — 2022. — Т. 85, № 1. — С. 121–139.

Монографии и главы монографий

13. Кручинин В.В. Степени производящих функций и их применение / В.В. Кручинин, **Д.В. Кручинин**. — Томск: Издательство ТУСУР, 2013. — 236 с.
14. Метод получения явных выражений полиномов на основе степеней производящих функций и его реализация / **Д.В. Кручинин**, В.В. Кручинин, А.А. Шелупанов, Ю.В. Шабля, В.С. Мельман. — Томск: В-Спектр, 2017. — 172 с.
15. **Kruchinin D.** Obtaining explicit formulas and identities for polynomials defined by generating functions of the form $F(t)^x \cdot G(t)^\alpha$ / D. Kruchinin, V. Kruchinin, Y. Shablya // Polynomials – Theory and Application. — UK: IntechOpen, 2019.

16. Explicit formulas for enumeration of lattice paths: Basketball and the kernel method / C. Banderier, C. Krattenthaler, A. Krinik, **D. Kruchinin**, V. Kruchinin, D. Nguyen, M. Wallner // Lattice Path Combinatorics and Applications. — Springer, 2019. — P. 78–118.

Публикации в научных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus

17. **Kruchinin D.** A method for obtaining generating functions for central coefficients of triangles / D. Kruchinin, V. Kruchinin // Journal of Integer Sequences. — 2012. — Vol. 15, no. 9. — Article 12.9.3.
18. **Kruchinin D.V.** A method for obtaining expressions for polynomials based on a composition of generating functions / D.V. Kruchinin, V.V. Kruchinin // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2012). AIP Conference Proceedings. — 2012. — Vol. 1479. — P. 383–386.
19. **Kruchinin D.V.** Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials / D.V. Kruchinin, V.V. Kruchinin // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2013. — Vol. 404, no. 1. — P. 161–171.
20. **Kruchinin D.V.** Explicit formulas for some generalized polynomials / D.V. Kruchinin, V.V. Kruchinin // Applied Mathematics and Information Sciences. — 2013. — Vol. 7, no. 5. — P. 2083–2088.
21. **Kruchinin D.V.** Explicit formula for the generalized Mott polynomials / D.V. Kruchinin // Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang). — 2014. — Vol. 24, no. 3. — P. 327–332.
22. **Kruchinin D.V.** Explicit formulas for Meixner polynomials / D.V. Kruchinin, Y.V. Shablya // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 2015. — Article 620569.
23. **Kruchinin D.V.** A generating function for the diagonal $T_{2n,n}$ in triangles / D.V. Kruchinin, V.V. Kruchinin // Journal of Integer Sequences. — 2015. — Vol. 18, no. 4. — Article 15.4.6.
24. **Kruchinin D.V.** On solving some functional equations / D.V. Kruchinin // Advances in Difference Equations. — 2015. — Vol. 2015. — Article 17.
25. A method for obtaining coefficients of compositional inverse generating functions / **D.V. Kruchinin**, Y.V. Shablya, V.V. Kruchinin, A.A. Shelupanov // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2015). AIP Conference Proceedings. — 2016. — Vol. 1738. — Article 130003.
26. **Kruchinin D.V.** About some properties of polynomials defined by generating functions of form $F(t,x)^{\alpha} \cdot G(t,\alpha)^{x}$ / D.V. Kruchinin, V.V. Kruchinin // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2016). AIP Conference Proceedings. — 2017. — Vol. 1863. — Article 300015.
27. Several formulas for special values of the Bell polynomials of the second kind and applications / F. Qi, X.-T. Shi, F.-F. Liu, **D.V. Kruchinin** // Journal of Applied Analysis and Computation. — 2017. — Vol. 7, no. 3. — P. 857–871.
28. **Kruchinin D.V.** Explicit formulas for Korobov polynomials / D.V. Kruchinin // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. — 2017. — Vol. 20, no. 1. — P. 43–50.

29. Personalized distance learning using the STACK system / **D. Kruchinin**, Y. Shablya, A. Shelupanov, V. Melman // International Research Conference "Information technologies in Science, Management, Social sphere and Medicine" (ITSMSSM 2017). — 2017. — Vol. 72. — P. 18–20.
30. Integer properties of a composition of exponential generating functions / **D.V. Kruchinin**, Y.V. Shablya, O.O. Evsutin, A.A. Shelupanov // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2016). AIP Conference Proceedings. — 2017. — Vol. 1863. — Article 300014.
31. Properties of a composition of exponential and ordinary generating functions / **D.V. Kruchinin**, Y.V. Shablya, V.V. Kruchinin, A.A. Shelupanov // Communications in Mathematics and Applications. — 2018. — Vol. 9, no. 4. — P. 705–711.
32. **Kruchinin D.V.** Explicit formula for reciprocal generating function and its application / D.V. Kruchinin, V.V. Kruchinin // Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang). — 2019. — Vol. 29, no. 3. — P. 365–372.
33. Explicit formulas for the Eulerian numbers of the second kind / **D.V. Kruchinin**, V.V. Kruchinin, Y.V. Shablya, A.A. Shelupanov // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2018). AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2116. — Article 100008.
34. A library for calculating polynomials based on compositae of generating functions / **D.V. Kruchinin**, V.S. Melman, Y.V. Shablya, A.A. Shelupanov // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2018). AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2116. — Article 100007.
35. Information security methods – Modern research directions / A. Shelupanov, O. Evsyutin, A. Konev, E. Kostyuchenko, **D. Kruchinin**, D. Nikiforov // Symmetry. — 2019. — Vol. 11, no. 2. — Article 150.
36. Algorithms for ranking and unranking the combinatorial set of closed questionnaire answers / P.P. Shcheglov, G.A. Filippov, Y.V. Shablya, **D.V. Kruchinin** // International Conference on Prospects of Fundamental Sciences Development. Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — Vol. 1611. — Article 012069.
37. Shablya Y. Euler–Catalan's number triangle and its application / Y. Shablya, **D. Kruchinin** // Symmetry. — 2020. — Vol. 12, no. 4. — Article 600.
38. Shablya Y. Method for developing combinatorial generation algorithms based on AND/OR trees and its application / Y. Shablya, **D. Kruchinin**, V. Kruchinin // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 6. — Article 962.
39. **Kruchinin D.** Generalized Tepper's identity and its application / D. Kruchinin, V. Kruchinin, Y. Simsek // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 2. — Article 243.
40. Shablya Y.V. New properties of a composition of ordinary generating functions for primes / Y.V. Shablya, **D.V. Kruchinin**, A.A. Shelupanov // Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography. — 2021. — Vol. 24, no. 4. — P. 917–930.
41. **Kruchinin D.** Method for obtaining coefficients of powers of bivariate generating functions / D. Kruchinin, V. Kruchinin, Y. Shablya // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, no. 4. — Article 428.
42. **Kruchinin D.** On some properties of generalized Narayana numbers / D. Kruchinin, V. Kruchinin, Y. Shablya // Quaestiones Mathematicae. — 2021.
43. Unranking small combinations of a large set in co-lexicographic order / V. Kruchinin, Y. Shablya, **D. Kruchinin**, V. Rulevskiy // Algorithms. — 2022. — Vol. 15, no. 2. — Article 36.

Публикации в прочих зарубежных периодических научных изданиях

44. Kruchinin V.V. Composita and its properties / V.V. Kruchinin, **D.V. Kruchinin** // Journal of Analysis and Number Theory. — 2014. — Vol. 2, no. 2. — P. 37–44.
45. Realization of a method for calculating Bell polynomials based on compositae of generating functions / V.S. Melman, Y.V. Shablya, **D.V. Kruchinin**, A.A. Shelupanov // Journal of Informatics and Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 10, no. 4. — P. 659–672.
46. **Kruchinin D.V.** New approach to study numeric triangles / D.V. Kruchinin // KnE Engineering. — 2018. — Vol. 3, no. 5. — P. 290–297.
47. **Kruchinin D.V.** About solving some functional equations related to the Lagrange inversion theorem / D.V. Kruchinin, M.Y. Perminova // Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2021. — Vol. 3, no. 1. — P. 62–69.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018611241 Российская Федерация. Программа «PTA: Primality Test Analyser» для анализа тестов простоты числа : № 2017662547 : заявл. 04.12.2017 : опубл. 26.01.2018 / Шабля Ю.В., **Кручинин Д.В.**, Мельман В.С.
2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018611242 Российская Федерация. Программа «PCG: Primality Criterion Generator» для генерации критериев простоты числа : № 2017662540 : заявл. 04.12.2017 : опубл. 26.01.2018 / Шабля Ю.В., **Кручинин Д.В.**, Мельман В.С.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019660020 Российская Федерация. Программа для ранжирования и генерации по рангу элементов комбинаторных множеств : № 2019618795 : заявл. 17.07.2019 : опубл. 29.07.2019 / Шабля Ю.В., **Кручинин Д.В.**
4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021669954 Российская Федерация. Программа для генерации и оценки математических заданий : № 2021669226 : заявл. 29.11.2021 : опубл. 06.12.2021 / **Кручинин Д.В.**

Тираж 100 экз. Заказ 165
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (3822) 53-30-18.