

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого
Президента России Б. Н. Ельцина»
(«УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»)



На правах рукописи

Денисов

УДК 621.396.677.85

Денисов Дмитрий Вадимович

**Методы анализа, оптимизации и реализации
многослойных сферических линзовых структур**

Специальность 2.2.14 —
«Антенны, СВЧ-устройства и их технологии»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора технических наук

Научный консультант:
д.т.н., доцент
Носков Владислав Яковлевич

Екатеринбург — 2026

Оглавление

Стр.

Мотивы исследования	15
Введение	17
Глава 1. Линзы Люнеберга. Свойства и потенциал применения на радиочастотах	46
1.1 Введение	46
1.2 Историческая справка и этапы развития линз Люнеберга	46
1.3 Линзы Люнеберга. Основные свойства	52
1.4 Электродинамическое моделирование линзы Люнеберга при равношаговой аппроксимации	53
1.5 Способы аппроксимации линзы Люнеберга	60
1.6 Применение линз Люнеберга в радиотехнических приложениях .	61
1.6.1 Применение в системах сотовой связи	62
1.6.2 Применение в системах подвижной связи	64
1.6.3 Применение на летательных аппаратах	65
1.6.4 Применение в качестве радиолокационных отражателей .	65
1.6.5 Применение в системах радиопротиводействия	69
1.6.6 Применение в качестве высоконаправленной антенны . . .	69
1.6.7 Применение линз Люнеберга в системах роботизированного зрения	71
1.7 Управление электромагнитным полем в объёмных сферически-симметричных структурах: обобщённая постановка .	72
1.7.1 От частного к общему: линза Люнеберга как один из представителей класса градиентных сферических структур	72
1.7.2 Уравнения поля в радиально-неоднородной сфере	73
1.7.3 Уравнение эйконала и инвариант Буше	74
1.7.4 Класс отображений «вход–выход» и тождество Люнеберга	75
1.7.5 Связь с трансформационной оптикой	76
1.7.6 Иерархия задач управления электромагнитным полем . .	77
1.7.7 Прямая и обратная задачи: формальная постановка	78
1.7.8 Согласование лучевого и волнового подходов	80

1.7.9	Связь с потенциалами Дебая, Герца и единый формализм школы Б. А. Панченко	81
1.7.10	Анизотропное обобщение и пределы изотропного класса	82
1.7.11	Энергетические ограничения и пределы управления	83
1.7.12	Связь с задачами обратного дизайна и нейросетевыми суррогатами	85
1.8	Выводы по главе	86

Глава 2. Расчёт многослойных сфер методом тензорных функций Грина

2.1	Введение	88
2.2	Аппараты анализа объёмных сферических линз	89
2.3	Функция Грина в классическом представлении	98
2.4	Тензорные функции Грина в замкнутом виде для сферических трёхмерных областей	101
2.5	Частное представление функций Грина. Рекуррентный пересчёт направленных импедансов и адмитансов по слоям	106
2.5.1	Общая форма рекуррентного соотношения	107
2.5.2	Граничные условия в центре линзы и на внешней поверхности	108
2.5.3	Критерий усечения ряда по n	109
2.5.4	Зоны поля и условие применимости дальнезонного представления	109
2.6	Асимптотические представления для полиномов Лежандра и сферических функций Бесселя	111
2.7	Интегральные соотношения между собственными функциями разных порядков	112
2.8	Примеры решения задач дифракции	113
2.8.1	Интегральные характеристики рассеяния: σ_s , σ_r , σ_p	115
2.8.2	Расширенный набор интегральных характеристик: попутное рассеяние и поглощение	117
2.8.3	Влияние диэлектрических потерь на интегральные характеристики	118
2.8.4	Бистатическое сечение рассеяния	120

2.8.5	Угловой портрет кросс-поляризации	122
2.9	Электромагнитное возбуждение линзы Люнеберга. Антенная задача	126
2.9.1	Расширенная параметрика по электрическому размеру линзы	130
2.10	Сравнение результатов расчёта ЛЛ с помощью ТФГ и другими методами. Дифракционная задача	135
2.10.1	Рассеяние на металлическом шаре	137
2.10.2	Результаты рассеяния на ЛЛ. Сравнение ТФГ с HFSS	139
2.10.3	Результаты рассеяния на ЛЛ. Сравнение результатов расчёта ТФГ с решениями, полученными другими авторами	142
2.11	Расширение аппарата ТФГ на сферические радиально-анизотропные слоистые структуры	143
2.11.1	Постановка задачи и физическая мотивация	143
2.11.2	Уравнения Максвелла в радиально-анизотропной среде	146
2.11.3	Решения радиальных уравнений и направленные импедансы	148
2.11.4	Коэффициенты Ми для одиночной анизотропной сферы	148
2.11.5	Программная реализация и валидация	149
2.11.6	Соотношение с геометрооптическим синтезом анизотропных и градиентных линз школы ИРЭ РАН	153
2.11.7	Связь с трансформационной оптикой и переход к маскирующим оболочкам Pendry	155
2.12	Выводы по главе	156
Глава 3. Дифракция плоской электромагнитной волны на линзе		157
3.1	Введение	157
3.2	Частный вид функций Грина для задач дифракции	157
3.3	Представление источников поля для задач дифракции	158
3.4	Дифракционные характеристики линзы Люнеберга при линейной поляризации	158
3.5	Дифракционные характеристики линзы Люнеберга для поля круговой поляризации	159

3.6	Численный анализ зависимости $\alpha(k_0 a)$ для многослойной аппроксимации	166
3.7	Выводы по главе	167
Глава 4.	Способы аппроксимации многослойных линз	169
4.1	Введение	169
4.2	Свойства линз при равношаговой аппроксимации	169
4.3	Линза Максвелла (рыбий глаз) в составе антенных систем с линзой Люнеберга	179
4.4	Синтез профиля $\varepsilon(r)$ для преломления под заданным углом: обратная задача	179
4.4.1	Постановка обратной задачи	179
4.4.2	Сведение к уравнению Абеля и его аналитическое обращение	180
4.4.3	Численные примеры семейства $n(r)$ для различных α	182
4.4.4	Многослойная аппроксимация синтезированного профиля	183
4.4.5	Верификация: лучевая трассировка и электродинамический расчёт	185
4.4.6	Обобщение на случай переменного угла отклонения	186
4.4.7	Выводы раздела	187
4.5	Сходимость аппроксимации по числу слоёв	188
4.5.1	Сходимость электродинамического отклика по числу слоёв	190
4.6	Выводы по главе	193
Глава 5.	Линзы Люнеберга в составе антенных систем	195
5.1	Введение	195
5.2	Первичные источники для возбуждения линз при линейной поляризации	195
5.3	Первичные источники для возбуждения линз при круговой поляризации	196
5.4	Антенные характеристики линзы Люнеберга	197
5.5	Влияние положения и размера облучателя на антенные характеристики линзы	198

5.5.1	Учёт конечного размера раскрыва облучателя в аппарате ТФГ	198
5.6	ЛЛ в составе многолучевых базовых станций	200
5.6.1	Характеристики тела линзы для многолучевой БС	201
5.7	Выводы по главе	205
Глава 6.	Антенные решётки в составе линз	207
6.1	Введение	207
6.2	Ограничения, налагаемые на решётку первичных облучателей	207
6.3	Формирование диаграммы направленности с использованием нескольких облучателей	212
6.3.1	Множитель системы эквидистантной линейной решётки	212
6.3.2	Типовой пример: решётка из трёх линз	213
6.3.3	Экономия материала и массы	213
6.3.4	Конструктор лучей диаграмм направленности	214
6.4	Формирование широкой диаграммы направленности с заданным уровнем неравномерности в рабочем секторе углов	215
6.5	Развязка между каналами антенной решётки линзы Люнеберга	215
6.6	Развязка между элементами антенной решётки	216
6.6.1	Линейная поляризация, параллельные излучатели	216
6.6.2	Линейная поляризация, коллинеарные излучатели	217
6.6.3	Ортогональная поляризация	217
6.7	Влияние вынесенного облучателя на характеристики антенной решётки	217
6.8	Выводы по главе	218
Глава 7.	Модифицированные по форме линзы	220
7.1	Введение	220
7.2	Конструкция и параметры полусферической линзы Люнеберга	220
7.3	Размещение линзовых антенн с косекансной ДН на носителе	224
7.4	Оценка влияния материала подложки между ЛЛ и экраном	226
7.5	Влияние формы и размеров экрана на обратное излучение модифицированной линзы	228
7.6	Тороидная линза Люнеберга	231

7.6.1	Мотивация перехода к тороидной геометрии	231
7.6.2	Геометрия и параметризация поверхности	232
7.6.3	Профиль диэлектрической проницаемости	233
7.6.4	Многослойная аппроксимация и параметры ФДМ-печати .	233
7.6.5	Оценка объёма, массы и времени печати	235
7.6.6	Число фидеров и параметры диаграммы направленности .	235
7.6.7	Синтез в Ansys HFSS	236
7.6.8	Сравнительная оценка конфигураций	236
7.7	Магнетодиэлектрическая линза Люнеберга	238
7.7.1	Обобщённый закон Люнеберга и условие импедансного согласования	238
7.7.2	Численная реализация многослойной аппроксимации . . .	238
7.7.3	Сечения рассеяния: подавление обратного излучения . . .	239
7.7.4	Прикладные следствия	240
7.8	Метаматериальные сферические рассеиватели с отрицательным коэффициентом рефракции	241
7.8.1	Левосторонние среды и обобщение закона Снелла	241
7.8.2	Импедансное согласование при $\epsilon = \mu < 0$	242
7.8.3	Численные результаты для канонических конфигураций .	242
7.8.4	Связь с работами Шабунина–Костицына (цилиндрическая геометрия)	244
7.8.5	Локализация ближнего поля внутри ЛН-сферы (эффект Пендри в сферической геометрии)	244
7.9	Сферические рассеиватели с радиопоглощающим покрытием . . .	247
7.9.1	Электродинамические параметры РПМ ZIK	247
7.9.2	Подавление ЭПР проводящей сферы	248
7.9.3	Сопоставление с магнетодиэлектрической ЛЛ	250
7.10	Линза Люнеберга с металлической сферой внутри	250
7.10.1	Мотивация включения проводящего элемента	250
7.10.2	Постановка электродинамической задачи	251
7.10.3	Замкнутое аналитическое решение методом ТФГ	257
7.10.4	Сравнение ТФГ и метода конечных элементов	258

7.10.5	Управление уровнем обратного излучения металлическим ядром	259
7.10.6	Интеграция с задачами оптимизации и машинного обучения	261
7.10.7	Выводы по разделу	261
7.11	Применение синтезированных линз-дефлекторов в задачах радиолокации и радионавигации	262
7.11.1	Обзор прикладных задач для структур с управляемым углом преломления	262
7.11.2	Многочувствительная секторная радиолокационная станция . . .	263
7.11.3	Радарная модификация уравнения дальности для линзы-дефлектора	264
7.11.4	Пассивный радиолокационный рефлектор на базе линзы Итона	265
7.11.5	Радионавигационный маяк с наклонной диаграммой . . .	266
7.11.6	Отклонение и подавление лучей: линза как элемент управления ЭПР	267
7.11.7	Имитатор ложной цели	267
7.11.8	Метеорологическая РЛС с косекансной диаграммой	268
7.11.9	Выводы раздела	268
7.12	Выводы по главе	269
Глава 8.	Конструктивные варианты исполнения линз	271
8.1	Введение	271
8.2	Применение искусственных диэлектриков и метаматериалов . . .	272
8.3	Обзор способов реализации линзовых антенн	273
8.4	Подбор параметров диэлектрической проницаемости для изготовления линз с помощью 3D печати	275
8.5	Реализация линзы Люнеберга способом 3D-печати	281
8.5.1	Синтез линзы в форме многогранника Голдберга	281
8.5.2	Синтез линзы Люнеберга для управления ЭПР летательного аппарата	288
8.6	Технология изготовления линзы Люнеберга из пенопласта переменной плотности	313

8.7	Выводы по главе	317
-----	---------------------------	-----

Глава 9. Метод декомпозиции произвольных структур:

	тензорные функции Грина для комбинированных плоско-цилиндрически-сферических областей	319
9.1	Введение	319
9.2	Аппарат ТФГ для плоских многослойных магнитодиэлектрических структур	320
9.2.1	Постановка задачи и спектральное разложение	320
9.2.2	Разложение поля на ТМ- и ТЕ-составляющие	321
9.2.3	Направленные импедансы и адмитансы. Рекуррентный пересчёт по слоям	322
9.2.4	Тензор Грина электрического типа для плоской слоистой среды	323
9.2.5	Сводка результатов триады «плоскость — цилиндр — сфера»	324
9.3	Принцип декомпозиции произвольной структуры	327
9.3.1	Определение канонических подобластей и интерфейсов	327
9.3.2	Примеры комбинированных структур из настоящей диссертации	327
9.3.3	Условия сшивания тангенциальных компонент поля	328
9.3.4	Преобразование между модальными базисами	329
9.3.5	Структура расширенной системы линейных уравнений	330
9.3.6	Физическая интерпретация интерфейса	330
9.4	Сшивание полей плоскость $\leftrightarrow$ сфера	331
9.4.1	Геометрия задачи и постановка	331
9.4.2	Разложение плоской волны по сферическим векторным гармоникам	332
9.4.3	Спектральная импедансная связь на плоском интерфейсе	333
9.4.4	Усечение модальных рядов и оценка точности	334
9.5	Сшивание полей сфера $\leftrightarrow$ цилиндр	335
9.5.1	Геометрия и постановка задачи	335
9.5.2	Преобразование сферических гармоник в цилиндрические	335
9.5.3	Двойной импедансный портрет интерфейса	336

9.5.4	Многослойное расширение цилиндрического портрета . . .	337
9.6	Сшивание полей цилиндр $\leftrightarrow$ плоскость	338
9.6.1	Геометрия и постановка задачи	339
9.6.2	Связь цилиндрических и плоских волн через интегральное представление Зоммерфельда	339
9.6.3	Преобразование Графа–Ламиа и спектральная импедансная связь	339
9.6.4	Замыкание триады и эквивалентность трёх типов сшивания	340
9.7	Итерационный алгоритм решения комбинированной задачи . . .	341
9.7.1	Общая схема	341
9.7.2	Сходимость и оценка вычислительной сложности	342
9.7.3	Метод Бубнова–Галёркина и сходимость к точному решению	343
9.7.4	Предельные переходы и самосогласованность триады . . .	343
9.8	Численные примеры преобразований модальных базисов	344
9.8.1	Релея–Гордона: разложение плоской волны по сферическим гармоникам	344
9.8.2	Гегенбауэра–Графа: сферическая гармоника в цилиндрическом базисе	345
9.8.3	Якоби–Ангера: цилиндрическая мода как спектр плоских волн	345
9.9	Программная реализация и численная верификация	345
9.9.1	Архитектура модуля <code>decomposition</code>	345
9.9.2	Верификационные расчёты	346
9.9.3	Состояние реализации сшивания	348
9.10	Применение метода: модельная задача о комбинированном рассеивателе	349
9.10.1	Постановка задачи и геометрическая декомпозиция	349
9.10.2	Декомпозиция на канонические подобласти	350
9.10.3	Расчёт диагональных блоков СЛАУ	351
9.10.4	Сшивание полей на интерфейсах	353
9.10.5	Сборка глобальной СЛАУ и оценка вычислительной стоимости	354

9.10.6 Сопоставление с альтернативными подходами	354
9.10.7 Замкнутая двухобластная задача: линза над проводящей плоскостью	355
9.11 Выводы по главе	357

Глава 10. Программно-аппаратный комплекс для синтеза линз

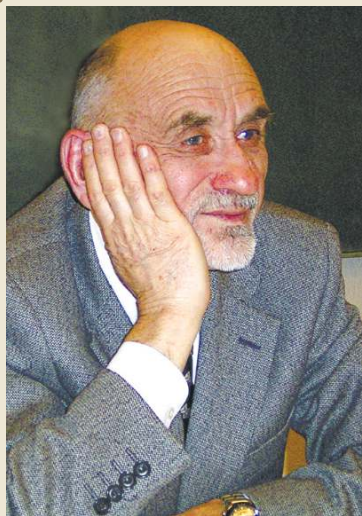
Люнеберга	359
10.1 Введение	359
10.2 Библиотека GreenTensor для расчёта рассеяния электромагнитных волн на многослойных сферических телах . .	360
10.3 Архитектура библиотеки и состав модулей	360
10.4 Библиотека GreenTensor. Начало работы	362
10.4.1 Установка библиотеки	363
10.4.2 Первый тестовый проект	363
10.4.3 Эталонные наборы данных в <code>examples.json</code>	364
10.4.4 Параметрический свип через <code>ScatteringCalculator</code> . . .	365
10.4.5 Построение нейросетевого суррогата характеристик рассеяния	368
10.5 Текущие ограничения библиотеки и дорожная карта	371
10.6 Примеры применения библиотеки	372
10.6.1 Дифракция на металлической сфере	372
10.6.2 Дифракция на линзе Люнеберга	372
10.6.3 Металлическая сфера с диэлектрическим укрытием	373
10.7 Расчёт бистатической ЭПР с применением библиотеки GreenTensor	375
10.8 Сравнение GreenTensor с результатами других авторов. Расчёт бистатической ЭПР	377
10.9 Внутренние регрессионные тесты библиотеки	378
10.10 Сравнение результатов с моделью в HFSS. Расчёт диаграммы рассеяния	381
10.11 Эталонный FEM-решатель Ansys HFSS: архитектура и место в методике верификации	383
10.12 Сопоставительный Matlab-скрипт <code>lin_polar_TFG-HFSS_compare.m</code>	384
10.13 Интеграция GreenTensor с Ansys HFSS через IronPython-скрипты синтеза	385

10.14	Оптимизация линзовой антенны в HFSS. Design of Experiments и распределённые расчёты	387
10.15	Аналитические производные и Far-Field Tuning	388
10.16	SBR+ для сопряжения с платформой	389
10.17	Анализ электромагнитной совместимости в Ansys EMIT	390
10.18	Распространение методик в инженерном сообществе	391
10.19	Количественное сопоставление времени и памяти: ТФГ vs FEM в HFSS	391
10.19.1	Предельные электрические размеры и масштабируемость метода	392
10.20	Сопоставление метода ТФГ с альтернативными методами электродинамического анализа	393
10.20.1	Метод конечных элементов (FEM) и метод конечных разностей во временной области (FDTD)	393
10.20.2	Метод моментов (МоМ) и метод поверхностных интегральных уравнений	394
10.20.3	Метод стреляющих и отражённых лучей (SBR+) и физическая оптика (PO)	394
10.20.4	Аналитические решения для канонических геометрий	395
10.20.5	Сводное сопоставление методов	395
10.21	GreenTensor как библиотека-плагин для отечественных и зарубежных САПР	396
10.21.1	Интеграция с отечественными САЕ: пакет ЛОГОС ЭМИ	396
10.21.2	Интеграция с зарубежными САЕ: Ansys, Altair, Dassault Systèmes	397
10.21.3	Интеграция с фреймворками машинного обучения и системами автоматизации	397
10.21.4	Веб-сервис <i>greentensor.ru</i> : интерактивный расчётный движок	398
10.22	Выводы по главе	399
	Заключение	403
	Список сокращений и условных обозначений	411

	Стр.
Единицы измерения и словарь терминов	413
Список литературы	418
Список рисунков	438
Список таблиц	445
Приложение А. Примеры программного кода	450
А.1 Пример расчёта слоёв линзы Максвелла на языке Python	450
А.2 Исходный код Python-модуля <code>decomposition</code> (метод декомпозиции произвольных структур)	452
Приложение Б. Терминология, параметры слоёв и стратификации линзы Люнеберга	456
Б.1 Соглашение о терминологии	456
Б.2 Параметры слоёв линзы Люнеберга	457
Б.3 Использование коэффициентов сред в <i>Tensor Green Function</i>	459
Б.4 Влияние стратификации на характеристики линзы Люнеберга	461
Б.5 Историко-библиометрический обзор линз Люнеберга	465
Приложение В. Рекуррентные соотношения специальных функций, используемые в библиотеке <i>GreenTensor</i>	471
В.1 Сферические функции Бесселя–Риккати	471
В.2 Ассоциированные функции Лежандра и угловые функции π_n , τ_n	472
В.3 Численная реализация в <i>GreenTensor</i>	473
Приложение Г. Научно-популярные публикации автора по направлению прикладной электродинамики	474
Г.1 Перечень материалов и их вклад в направление	474
Г.2 Сводная статистика корпуса	477
Приложение Д. Работа с интерактивным расчётным движком на сайте <i>greentensor.ru</i>	479
Д.1 Архитектура и условия запуска	479

	Стр.
Д.2 Главная страница и панель параметров	480
Д.3 Входные параметры	480
Д.4 Выходные данные и форматы экспорта	482
Д.5 Типовые сценарии использования	483
Д.6 Ограничения текущей версии и дорожная карта	484

Мотивы исследования



Посвящается памяти д.т.н., профессора, заслуженного деятеля науки РФ Бориса Алексеевича Панченко.

06.06.1934 — 15.09.2019.

Значительная доля представленной диссертационной работы выполнялась под руководством доктора технических наук, заслуженного деятеля науки Российской Федерации, почетного профессора УГТУ-УПИ, Бориса Алексеевича Панченко.

Б. А. Панченко является основателем научной школы прикладной электродинамики на Урале. Уральский федеральный университет удостоил научную школу прикладной электродинамики звания *ведущей научной школы*. Члены школы продолжают активно работать в области высокочастотной радиотехники, антенн, дифракции электромагнитного поля и распространения радиоволн.

Б. А. Панченко является автором более 250 научных трудов, он опубликовал 14 монографий по технической электродинамике, теории и технике антенн, радиофизике и теории дифракции. Под его руководством защищено 9 докторских и более 30 кандидатских диссертаций. Б. А. Панченко имеет множество наград, в том числе медаль «За доблестный труд», знаки «Почётный радист» и «Заслуженный работник высшего образования». Подробный очерк о научной и педагогической деятельности Бориса Алексеевича опубликован на первых страницах выпуска журнала *Ural Radio Engineering Journal* за 2019 год.

По субъективному мнению автора, одним из наиболее значимых достижений Бориса Алексеевича является то, насколько основательно он выстраивал работу со своими учениками.

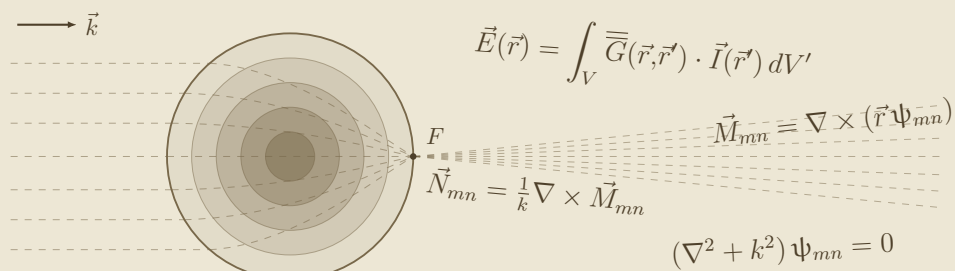
В последние годы Б. А. Панченко увлёкся задачами дифракции электромагнитных волн на сферических многослойных телах. Одним из приложений стала разработка электродинамической теории на основе тензорных функций Грина для сферических неоднородных сред. Компьютерные программы, созданные в рамках этого подхода, позволили выполнять расчёты диаграмм направленности антенн на несколько порядков быстрее, чем широко применяемые пакеты электродинамического моделирования (CST Microwave Studio, HFSS, FEKO). В этом направлении

успешно работали и защитили свои диссертации М. Г. Гизатуллин, Е. В. Комарова и Д. В. Денисов. Всего под руководством Б. А. Панченко более 30 человек защитили кандидатские диссертации.

Автору настоящей работы посчастливилось работать под руководством опытного профессора с 2009 по 2019 год и перенять знания своих коллег — М. Г. Гизатуллина и Е. В. Комаровой, защитивших кандидатские диссертации в 2009 и 2012 годах соответственно. Им автор также выражает глубокую признательность. В нашем научном коллективе работы аспирантов и докторантов часто имели преемственность и получали дальнейшее развитие в рамках слаженной работы под руководством опытного профессора; эта традиция продолжается по сей день.

Борис Алексеевич всегда оставался сторонником обмена опытом между различными научными школами и коллективами. В связи с этим официальным оппонентом на защите кандидатской диссертации Д. В. Денисова выступил руководитель дружественной научной школы, д.т.н., доцент Владислав Яковлевич Носков. Именно под его научным руководством Борис Алексеевич в последние годы своей жизни и рекомендовал автору завершить подготовку докторской диссертации. Владислав Яковлевич Носков — известный специалист в таких областях, как системы ближней радиолокации, автоколебательные системы и автодины, теория нелинейных колебаний в радиотехнике, приёмопередающие устройства и антенны для систем радиолокации и связи. Он пользуется уважением коллег как специалист высокой квалификации и как доброжелательный человек, всегда готовый помочь. Синтез знаний двух научных школ — «Прикладной электродинамики» (Б. А. Панченко) и «Теории и техники радиолокации» (В. Я. Носков) — позволил получить оригинальные решения, связанные с применением специализированных антенных систем в задачах управления радиозаметностью, которые описаны в настоящей диссертационной работе.

При подготовке диссертационной работы преследовались цели сохранения, систематизации и развития наработок научной школы. В этом направлении был адаптирован аппарат тензорных функций Грина для решения более широкого класса задач, а также сформирована открытая (*open source*) библиотека электродинамического анализа *Green Tensor*. Предусмотрена возможность её интеграции в расчётные программные пакеты электродинамического анализа.



Введение

Свойства сферической линзы Люнеберга (ЛЛ)¹ были описаны ещё в начале 1950-х годов, однако длительное время в радиотехнике они не находили практического применения из-за технологических трудностей изготовления. С развитием технологий синтеза материалов и средств 3D-печати интерес к линзам Люнеберга возобновился [1; 2]; наиболее активно их применение развивается в системах связи миллиметрового диапазона и в устройствах радиовидения беспилотного транспорта. Линзы Люнеберга служат высоконаправленными антеннами наряду с зеркальными, фазированными антенными решётками, а также плоскими линзовыми антеннами, выполненными в виде ускоряющих и замедляющих структур [3; 4].

Состояние проблемы и степень её разработанности. Задача электродинамического анализа сферических градиентных линз имеет давнюю историю. Теоретические основы заложены в работах Р. К. Люнеберга [5], обобщавших идеи Максвелла и Штеттлера [6] о градиентных средах; первые систематические расчёты антенных характеристик сферических линз были проведены в работе Г. Т. Маркова [7] и в западной классической литературе [8–10]. Современный этап характеризуется интенсивным развитием трёх независимых, но пересекающихся направлений — методов электродинамического анализа, технологий изготовления и собственно антенных приложений, — каждое из которых имеет собственные ограничения, не устранённые в рамках существующего инструментария.

Особое место в этом ряду занимает линия *геометрооптического синтеза* градиентных линз, последовательно развиваемая школой ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (В. А. Калошин, А. С. Венецкий с соавторами): ещё в 1973 г. задача Люнеберга была обобщена на анизотропную среду [11], впоследствии получены решения задач синтеза трёхфокальных градиентных линз [12], общее решение задачи синтеза градиентной линзы с центральной симметрией, внешним фокусом и произвольным выходным фронтом [13], охватывающее как частные

¹ Фамилию немецкого учёного Р. К. Люнеберга (R. K. Luneburg) в русскоязычной литературе передают двояко — *Люнеберг* и *Люнебург* (в англоязычной — *Luneburg* и *Luneberg*), причём в современных источниках примерно поровну; оба написания корректны. В настоящей работе написание не унифицируется: при упоминании конкретных исследований оно сохраняется таким, как его используют авторы цитируемых источников, а при нейтральном упоминании применяется вариант «Люнеберг». Подробнее — Приложение Б, раздел Б.1.

случаи решения Моргана, Кэя, Итона–Липмана и линзу с концентрическим зеркалом, решение задачи синтеза анизотропных линз Люнебурга [14] (характерно, что из двух предложенных там методик устойчивой оказывается именно *рекуррентная процедура на слоистой модели* среды — итерационная процедура на непрерывной градиентной модели расходится при малых радиусах, что независимо подтверждает продуктивность слоистой постановки, принятой в настоящей работе), а также многолучевые антенны полного азимутального обзора на основе слоистых градиентных и геодезических линз [15; 16]. Работы этой линии дают исчерпывающий ответ на вопрос, *каким должен быть* непрерывный закон $n(r)$, и образуют непосредственный бэкграунд настоящей диссертации в части синтеза; настоящая работа продолжает эту линию в смежной, полноволновой постановке — от найденного в геометрикооптическом приближении непрерывного профиля к его многослойной реализации с конечным числом слоёв и строгому электродинамическому анализу при конечных электрических размерах $k_0 a$, когда дифракционные поправки становятся определяющими, а лучевое приближение теряет применимость.

В направлении *методов электродинамического анализа* за последние три десятилетия оформились четыре основных подхода к расчёту многослойных сферических структур. *Метод конечных элементов* (FEM), реализованный в Ansys HFSS и аналогичных коммерческих пакетах, обеспечивает высокую точность для произвольной геометрии и анизотропных сред; однако при многократном расчёте одной и той же многослойной структуры с варьируемыми параметрами слоёв (что требуется при оптимизации профиля, генерации обучающих выборок для нейросетей или подборе технологических параметров 3D-печати) его вычислительная стоимость неприемлема — полный параметрический прогон по 4–6 переменным занимает несколько дней машинного времени даже на рабочих станциях уровня Intel Xeon. *Метод конечных разностей во временной области* (FDTD), реализованный в CST Microwave Studio, обладает преимуществом для широкополосных задач, но ещё более требователен к объёму оперативной памяти. *Метод моментов* (MoM) плохо приспособлен к сложно-неоднородным диэлектрическим объёмам, а *метод трассировки и отражения лучей* (SBR) при многократных переотражениях в многослойной сферической линзе накапливает недопустимую ошибку и становится применимым только к электрически крупным конструкциям без тонкой структуры слоёв. Специализированные аналитические приближения теории Ми [17]

остаются эффективными лишь для однородных диэлектрических сфер; их обобщение на произвольный многослойный градиентный профиль требует введения аппарата направленных импедансов и рекуррентной схемы пересчёта по слоям, развитого Б. А. Панченко в серии монографий [18—20] применительно к общему случаю областей, частично заполненных диэлектриком, и впоследствии адаптированного С. Н. Шабуниним к цилиндрическим слоистым структурам в серии работ [21—23] и обобщённого им в докторской диссертации «Электродинамика плоских и цилиндрических магнитодиэлектрических слоистых структур» [24], защищённой в 2006 г. в УГТУ-УПИ под научным консультированием Б. А. Панченко и непосредственно соответствующей по специальности 05.12.07 настоящей работе. Для сферической геометрии этот аппарат, однако, до настоящего времени не был доведён до универсального программного инструмента, пригодного для инженерного проектирования линз Люнеберга и их модификаций, и не был интегрирован со стандартными средами электродинамического моделирования и алгоритмами параметрической оптимизации.

В направлении *аппроксимации непрерывного профиля линзы* существующие работы, включая исследования Fuchs и соавторов [25; 26] и Thornton с соавторами [27; 28], сосредоточены преимущественно на равношаговой стратификации с эвристически подбираемыми значениями проницаемости слоёв. Такой подход не использует возможностей современных многокритериальных оптимизационных алгоритмов и не позволяет в явном виде связать параметры стратификации с технологическими ограничениями FDM-3D-печати — дискретным рядом достижимых значений диэлектрической проницаемости полимеров (HIPS, PLA, PETG) и диапазоном степеней заполнения стандартных слайсеров [29]. В результате между расчётной моделью линзы и производимым образцом сохраняется технологический разрыв, требующий ручной подгонки параметров печати.

В направлении *антенных приложений* линза Люнеберга традиционно применялась в узком классе задач: многолучевая фокусировка при осевом расположении облучателя [3; 27]. Работы последних лет существенно расширили этот круг — показана возможность применения ЛЛ в многолучевых базовых станциях 5G [30—33], в задачах управления радиозаметностью беспилотного транспорта [34—36], в системах связи и дистанционного зондирования [1; 2; 37]. Вместе с тем формирование диаграммы направленности специального вида (косекансной $\text{cosec}^2(\theta)$ для обзорной радиолокации, панорамной 360° без ме-

ханического сканирования, с управляемым уровнем обратного излучения для снижения ЭПР) остаётся методически не проработанным: отсутствует единый расчётный аппарат, позволяющий в рамках одной модели описывать сферические, полусферические, тороидные и модифицированные конфигурации линзы с центральным металлическим ядром.

Таким образом, в рамках существующего состояния проблемы выявляются три не устранённых к настоящему времени пробела:

- методический — отсутствие универсального полуаналитического инструмента электродинамического анализа, сочетающего быстроту расчёта ТФГ и широту применимости коммерческих FEM-пакетов для задач параметрической оптимизации и машинного обучения на многослойных сферических и тороидных структурах;
- технологический — отсутствие методики многослойной аппроксимации профиля, связанной с реальными возможностями FDM-3D-печати и обеспечивающей контролируемую точность воспроизведения непрерывного закона $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ без ручной подгонки;
- прикладной — отсутствие единого методического подхода к проектированию модифицированных конфигураций ЛЛ (полусфера с экраном, тороид, сфера с центральным металлом) для формирования диаграмм направленности специального вида в сетях 5G/6G, радиолокации и системах управления радиозаметностью.

Непосредственный бэкграунд работы и новизна относительно него. Сказанное позволяет явно зафиксировать предшествующий уровень, относительно которого формулируется новизна настоящей работы. Непосредственный бэкграунд диссертации образуют четыре линии исследований: (а) геометрооптический синтез градиентных линз с центральной симметрией — от частного решения Люнеберга [5] и общего решения Моргана [8] до обобщения задачи на анизотропные среды и общего решения задачи синтеза, полученных В. А. Калошиным, А. С. Венецким и соавторами [11; 13; 14]; (б) строгий полноволновой анализ сферически-слоистых сред на основе сферических волновых функций и диадных функций Грина [25; 38—42]; (в) аппарат тензорных функций Грина слоистых сред — классические монографии [43; 44], школа Б. А. Панченко — С. Н. Шабунина [18; 24] и одномерные алгоритмы расчёта функций Грина трёх канонических геометрий [45]; (г) технологии многослойной реализации градиентных профилей [25; 27; 29]. Новыми относительно

этого бэкграунда являются: перенос рекуррентной импедансной схемы ТФГ на сферический случай с линейной по числу слоёв сложностью и декомпозиционным сшиванием подобластей разной координатной симметрии (положение 1); открытая программная реализация метода в виде библиотеки *GreenTensor* (положение 2); замкнутое решение обратной задачи синтеза линз-дефлекторов с произвольным углом отклонения в слоисто-дискретной постановке, продолжающее линию общего геометрооптического решения [13] на полноволновом уровне (положение 3); единый расчётно-технологический цикл проектирования модифицированных конфигураций линзы и их FDM-реализации (положения 4, 5).

Устранение именно этих трёх пробелов составляет основное содержание настоящей диссертации; её научные результаты, программные инструменты и инженерные решения соответствующим образом сгруппированы по главам и отражены в положениях, выносимых на защиту. Методический пробел замкнут разработанной автором открытой Python-библиотекой *GreenTensor* [46; 47], реализующей рекуррентный пересчёт направленных импедансов и адмитансов по слоям. Библиотека доступна в открытом виде: исходный код — на GitHub, документация — на *Read the Docs* [48], официальный сайт — greentensor.ru. Описание архитектуры, сравнение с альтернативными методами электродинамического анализа (FEM, FDTD, МоМ, SBR+, ряды Ми) и варианты интеграции с САПР приведены в главе 10.

Отдельный методический результат — развитый в главе 9 *метод декомпозиции произвольных электродинамических структур* на конечный набор канонических подобластей трёх типов (плоско-, цилиндрически- и сферически-слоистых) с замкнутым аппаратом сшивания тангенциальных компонент электромагнитного поля на интерфейсах разной координатной симметрии. Получены ядра преобразования модальных базисов в трёх типах сшивания (плоск. $\leftrightarrow$ сфера, сфера $\leftrightarrow$ цил., цил. $\leftrightarrow$ плоск.) на основе теорем сложения Релея–Гордона, Гегенбауэра–Графа и Якоби–Ангера–Графа; задача сведена к глобальной системе линейных алгебраических уравнений с блочной матрицей, в которой диагональные блоки суть импедансные матрицы локальных ТФГ-задач. Метод реализован в виде самостоятельного Python-модуля *decomposition* (приложение А.2) и объединяет ранее независимо развитые аппараты ТФГ для плоских, цилиндрических и сферических структур в едином инструменте. Этот результат составляет содержание **положения 1**, выносимого на защиту.

Формулировка крупной научной проблемы и методологическое позиционирование работы. Перечисленные методический, технологический и прикладной пробелы не являются независимыми частными недочётами существующего инструментария: они объединяются в рамках единой крупной научной проблемы, явная формулировка которой целесообразна в соответствии с пунктом 9 Положения о присуждении учёных степеней (постановление Правительства РФ от 24.09.2013 № 842 с последующими изменениями), относящего к категории докторских работ, в частности, те, что содержат *решение крупной научной проблемы, имеющей важное политическое, социально-экономическое, культурное или хозяйственное значение*. Настоящая работа предъявляется именно по этой квалификационной характеристике — как *решение крупной научной проблемы развития теории и техники антенн* в части электродинамики и проектирования сферических градиентных линзовых структур, имеющей важное хозяйственное значение для перспективных отечественных систем радиосвязи, радиолокации и управления радиозаметностью; обоснование данного тезиса составляет содержание настоящего раздела введения.

Крупная научная проблема, на решение которой направлена настоящая работа, может быть сформулирована следующим образом: разработка универсального полуаналитического метода электродинамического анализа многослойных радиально-неоднородных сферических диэлектрических структур, обеспечивающего расчёт практически произвольного числа слоёв без потери точности и с радикальным сокращением вычислительных затрат по сравнению с существующими полномасштабными численными методами, и применение этого метода к синтезу нового класса линзовых антенн и пассивных рассеивателей миллиметрового и сантиметрового диапазонов для перспективных систем радиосвязи, радиолокации и управления радиозаметностью. Масштаб и хозяйственная значимость этой проблемы определяются тем, что именно класс многослойных сферических и сфероподобных диэлектрических структур образует элементную базу перспективных пассивных формирователей многолучевой диаграммы направленности в сетях подвижной связи пятого и шестого поколений, в средствах радиовидения беспилотного транспорта и в системах управления радиозаметностью, прямо отнесённых к приоритетным направлениям технологического развития Российской Федерации.

Методологический разрыв как обоснование докторского уровня работы. Сформулированная выше проблема актуальна потому, что в послед-

ние два десятилетия между растущим прикладным запросом на проектирование многослойных и градиентных диэлектрических структур и возможностями массовых парадигм численной электродинамики при решении задач параметрической оптимизации, обратного синтеза и генерации обучающих выборок для нейросетевых моделей сформировался отчётливый *методологический разрыв*. Метод конечных элементов в его наиболее зрелых коммерческих реализациях (Ansys HFSS и аналогичные пакеты) обеспечивает строгое полноволновое решение и при однократном расчёте остаётся фактическим эталоном точности; однако его вычислительные требования становятся неприемлемыми уже при умеренном электрическом размере объекта — для канонической задачи рассеяния на многослойной диэлектрической сфере при частоте $f = 10$ ГГц объём оперативной памяти, потребляемой адаптивной тетраэдральной сеткой, исчисляется сотнями гигабайт, а время одного прогона — часами; полный параметрический свип по 4–6 переменным занимает от нескольких суток до недель машинного времени даже на высокопроизводительных рабочих станциях. Это делает прямое применение метода конечных элементов в задачах многокритериальной генетической оптимизации и в офлайн-генерации обучающих выборок объёмом $10^3 \dots 10^4$ конфигураций экономически и технически нереализуемым. Метод трассировки и отражения лучей при многократных переотражениях в многослойной сферической структуре наталкивается на комбинаторный рост числа лучевых траекторий: каждый дополнительный слой увеличивает число учитываемых отражений на порядок и более, что приводит к экспоненциальному росту вычислительной сложности и накоплению численной погрешности и фактически делает метод непригодным для многослойных градиентных линз с числом слоёв $L \geq 4 \dots 6$. Метод моментов и более общие методы интегральных уравнений ориентированы на тонкопроводящие и поверхностные структуры и не покрывают должным образом задачу объёмной дифракции на радиально-неоднородных диэлектриках без существенных модификаций. Метод конечных разностей во временной области добавляет к ограничениям метода конечных элементов ещё и требование явного дискретного шага по времени, что при частотах, исчисляемых десятками гигагерц, ещё более усиливает рост вычислительных затрат. Таким образом, ни одна из массовых парадигм численной электродинамики в её текущей реализации не решает задачу быстрого расчёта объёмных многослойных диэлектрических структур; этот *методологический тупик* и составляет содержание сформулированной выше крупной научной

проблемы. Отсутствие универсального быстрого решателя именно для класса многослойных радиально-неоднородных сферических структур, в свою очередь, удерживает в области теоретических предположений целый ряд практически значимых конструктивных гипотез — модифицированные конфигурации линзы Люнеберга, магнетодиэлектрические линзы, линзы-дефлекторы с произвольным углом отклонения, сферические метаматериальные структуры, — так как каждая такая гипотеза в существующей парадигме требует индивидуальной полномасштабной проверки, что для исследовательской программы из десятков и сотен конфигураций оказывается заведомо неподъёмным.

Предложенный методический ход — переход от аналитического тензорного аппарата к алгоритмизируемому методу. Базовым теоретическим инструментом, исторически развивавшимся для задач рассеяния на сферических и цилиндрических объектах, является аппарат тензорных функций Грина, систематически изложенный в монографической трилогии Б. А. Панченко [18—20] применительно к областям, частично заполненным диэлектриком, и впоследствии обобщённый С. Н. Шабунинным в его докторской диссертации «Электродинамика плоских и цилиндрических магнетодиэлектрических слоистых структур» [24], защищённой в 2006 г. в УГТУ-УПИ под научным консультированием Б. А. Панченко. Этот аппарат, во-первых, опирается на строгое решение уравнений Максвелла, во-вторых, формально допускает произвольное число слоёв; однако в работах школы Б. А. Панченко и в смежных публикациях он применялся преимущественно к *аналитически разрешимым* задачам с ограниченным числом слоёв (одиночные диэлектрические подложки, двух- и трёхслойные цилиндрические покрытия), где сшивка тангенциальных компонент поля на интерфейсах выполнялась символически, а получаемые выражения обеспечивали *аналитическое понимание физики*, но не были доведены до универсального численного инструмента, пригодного для инженерного проектирования. Главным препятствием при этом был не сам аппарат, а накопление символьных выражений: при росте числа слоёв L объём подлежащих аналитической сшивке формул растёт как $\mathcal{O}(L^2)$, что делает аналитическое продолжение схемы за пределы $L = 3 \dots 4$ практически нецелесообразным.

Та же методическая трудность прослеживается и в мировой литературе, независимо развивавшей аналитический аппарат тензорных (диадных) функций Грина — канонически систематизированный в монографиях Ч. Тая [43] и В. Чью [44] — применительно к радиально-многослойным сферам [38; 39] и

анализ стратифицированных линз Люнеберга на основе сферических волновых функций [25; 49]. Строгие замкнутые выражения здесь известны, однако их прямая численная реализация неустойчива: и многослойная теория Ми, и теория сферически-слоистых сред страдают от численных неустойчивостей [50], вследствие чего десятилетиями публиковалась череда работ, посвящённых почти исключительно устойчивому пересчёту рекуррентных соотношений [40—42], а расчёт при больших электрических размерах и высоких порядках сферических функций Бесселя остаётся отдельной трудностью [51]. Наиболее близким зарубежным аналогом развиваемого в настоящей работе подхода является алгоритм G1DMULT [45], сводящий расчёт спектральных функций Грина плоских, цилиндрических и сферических многослойных структур к единой одномерной схеме и применённый, в частности, к анализу сферических линзовых антенн [52]; известны и полноволновые исследования многослойных линз-отражателей Люнеберга [53]. Однако существующие реализации носят преимущественно характер расчёта рассеяния на отдельном теле либо рассматривают каждую структуру в рамках одной координатной симметрии без сшивания подобластей разного типа, тогда как собственно проектирование линзовых антенн по-прежнему опирается на универсальные полноволновые пакеты; единого открытого алгоритмизированного инструмента, замыкающего цепочку «анализ — оптимизация — синтез» для многослойных сферических структур и переносимого в общем виде на плоско-, цилиндрическую и сферослоистую геометрии [54], в литературе по линзам Люнеберга до настоящего времени предложено не было.

В настоящей работе указанный аппарат *доработан до алгоритмизируемого вида* для случая сферически-симметричных радиально-стратифицированных структур (положение 1, выносимое на защиту) и реализован в виде открытой программной библиотеки *GreenTensor* (положение 2). Конкретно: рекуррентная схема пересчёта направленных импедансов и адмитансов по слоям, ранее построенная С.Н. Шабуниним для плоских и цилиндрических магнитодиэлектрических структур [22—24], последовательно перенесена на сферически-симметричный случай в форме, обеспечивающей численную устойчивость при произвольном числе слоёв L и произвольном электрическом размере $k_0 a$ в практически значимом диапазоне; алгоритм построен таким образом, что добавление каждого нового слоя сводится к одному рекуррентному шагу и не влечёт пересчёта внутренних состояний предыдущих слоёв. Тем

самым устраняется указанное выше сверхлинейное накопление символьных выражений, а сложность всей схемы становится *линейной по числу слоёв*, что и обеспечивает заявленную масштабируемость на условно произвольное число слоёв без потери точности. На канонической тестовой серии (металлическая сфера, многослойная линза Люнеберга, металлическая сфера с диэлектрическим укрытием) сокращение машинного времени расчёта по сравнению с эталонным конечно-элементным решением в Ansys HFSS составляет от двух до четырёх десятичных порядков при сохранении расхождения по основным диаграммообразующим характеристикам в пределах $0,6^\circ$ по ширине главного лепестка и 1 дБ по уровню первого бокового лепестка; количественные данные сведены в положении 1, выносимом на защиту, и подробно обоснованы в главе 3 и главе 10.

Принципиальный характер методического перехода. Следует подчеркнуть, что предложенный методический ход не сводится к локальной оптимизации существующих расчётных схем — ускорению цикла полномасштабного решателя, более рациональной дискретизации, замене линейной алгебры или применению аппаратного ускорения. Принципиальный характер перехода состоит в *смене расчётной парадигмы*: задача рассеяния на многослойной радиально-неоднородной сфере решается не как краевая задача в трёхмерной области, требующая объёмной дискретизации сеточным методом, а как сшитая последовательность одномерных рекуррентных импедансных пересчётов вдоль радиальной координаты, эквивалентная по физическому содержанию строгому решению уравнений Максвелла. Эта смена парадигмы открывает три самостоятельных, ранее не реализуемых класса задач, каждый из которых имеет собственное прикладное значение.

Первый класс — полная параметрическая оптимизация многослойных линз Люнеберга и их модификаций с использованием многокритериальных эволюционных алгоритмов (положение 5). Типовая задача оптимизации требует от 10^3 до 10^4 обращений к электродинамическому решателю на одну оптимизационную задачу; при затрате нескольких секунд процессорного времени на одну конфигурацию указанный объём вычислений становится выполнимым на одной рабочей станции за рабочий день, тогда как при использовании метода конечных элементов он недостижим в принципе. Именно этим обстоятельством обусловлена возможность согласования расчётной модели линзы с технологическими ограничениями FDM-3D-печати (диапазон реализуемых диэлектрических проницаемостей полимеров, доступный ряд степеней заполнения

слайсера), реализованная в настоящей работе впервые.

Второй класс — серийная проверка конструктивных гипотез о новых разновидностях линзовых конструкций (положения 3 и 4): полусферическая линза на проводящем экране, тороидная линза для панорамного азимутального обзора, сферическая линза с центральным металлическим ядром, магнетоди-электрическая линза с равенством профилей $\varepsilon(r) = \mu(r)$, линзы-дефлекторы с произвольным углом отклонения $\alpha \in (0; \pi)$, сферические метаматериальные структуры с отрицательным коэффициентом преломления, сферические рассеиватели с радиопоглощающими покрытиями. Каждая из этих конструкций до настоящего времени оставалась в области теоретических предположений именно из-за неподъёмной стоимости индивидуальной полноволновой проверки; при предложенном методическом переходе серийная проверка десятков и сотен таких гипотез выполняется в рамках единого расчётного цикла, что позволило одновременно проанализировать перечисленные конфигурации, выявить нетривиальные эффекты (сферический аналог суперлинзирующего эффекта Пендри для метаматериальной структуры $\varepsilon = \mu = -3$, подавление обратного сечения рассеяния до $\sigma_r \leq 10^{-25} \pi a^2$ в импедансно-согласованных конфигурациях) и сформулировать инженерные критерии их применимости.

Третий класс — генерация обучающих выборок для нейросетевых суррогатных моделей в задачах инверсного дизайна градиентных диэлектрических сред. Скорость расчёта одной конфигурации в единицы секунд делает офлайн-генерацию выборки в $10^3 \dots 10^4$ образцов выполнимой за несколько часов на одной рабочей станции, тогда как при использовании метода конечных элементов такой объём данных был бы недостижим даже на крупных вычислительных кластерах. Это создаёт прямой путь к интеграции аппарата тензорных функций Грина с современными методами машинного обучения и открывает самостоятельное направление прикладного развития полученного методического результата.

Доказательная база и независимая верифицируемость. Подтверждением заявленной скорости и точности служит *публичная программная библиотека GreenTensor*, реализующая разработанный метод и доступная в открытом доступе: исходный код — на GitHub [46], документация — на платформе *Read the Docs* [48], официальный сайт проекта — по адресу greentensor.ru [47]. Любой исследователь и любой инженер, имеющий доступ к Ansys HFSS или иному эталонному полноволновому решателю, могут независимо повторить

вычисления, сравнить их с собственными конечно-элементными расчётами и убедиться в воспроизводимости заявленных характеристик; именно эта *публичная верифицируемость* отличает методологический результат настоящей работы от закрытых корпоративных решений и составляет дополнительный аргумент в пользу её докторского уровня. Подробное описание архитектуры библиотеки, её программного интерфейса, регрессионных тестов и сравнения с альтернативными методами электродинамического анализа приведено в главе 10.

Соответствие критерию пункта 9 Положения о присуждении учёных степеней. Совокупность перечисленных результатов квалифицирует настоящую работу как *решение крупной научной проблемы развития теории и техники антенн* в части электродинамики и проектирования сферических градиентных линзовых структур. Тема и результаты диссертации соответствуют пункту 9 паспорта научной специальности 2.2.14 «Антенны, СВЧ-устройства и их технологии». В работе разработан универсальный полуаналитический метод электродинамического анализа многослойных радиально-неоднородных сферических диэлектрических структур, замыкающий многолетнюю методологическую программу школы Б.А. Панченко в части сферической геометрии и распространяющий её через метод декомпозиции на произвольные кусочно-координатные структуры, ранее доступные только методам объёмной дискретизации (положение 1), с программной реализацией в виде открытой библиотеки *GreenTensor* (положение 2). Пять положений, выносимых на защиту, объединяют методический (положения 1, 2), синтетический (положения 3, 4) и технологический (положение 5, включающий также систематическое исследование поляризационных характеристик многослойных линз) аспекты; каждое из положений имеет самостоятельное научное значение, а в совокупности они образуют законченную методологическую и инженерную программу развития теории сферических градиентных линзовых антенн нового поколения. Конкретные инженерные конструкции (модифицированные конфигурации, линзы-дефлекторы, магнетодиэлектрические линзы, конфигурации с центральным металлическим ядром, многослойные линзы Люнеберга с косекансной и панорамной диаграммой направленности), технология их изготовления методом FDM-3D-печати с управляемой пористостью и непосредственная применимость в перспективных отечественных системах радиосвязи пятого и шестого поколений, в средствах радиолокации беспилотного транс-

порта и в системах управления радиозаметностью относятся к *практической значимости* работы и раскрываются в соответствующей рубрике общей характеристики работы.

Тем самым по своему методологическому масштабу, классу решаемых задач, степени независимой верифицируемости и широте прикладных приложений настоящая работа предъясняется не как набор частных алгоритмов или локальных улучшений существующих расчётных схем, а как *методологический прорыв* в электродинамическом расчёте многослойных диэлектрических структур — переход от аналитического тензорного аппарата к алгоритмизируемому методу, открывающему для практического решения новый класс инженерных и научных задач, ранее остававшихся в области теоретических предположений из-за неподъёмной вычислительной стоимости полноволновой проверки каждой отдельной конфигурации.

Актуальность темы исследования определяется сочетанием двух независимых тенденций в развитии радиотехники, совпавших во времени и взаимно усиливающих друг друга.

С одной стороны, переход систем подвижной и спутниковой связи, радиолокации и беспилотного транспорта в миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны формирует устойчивый запрос на широкополосные, компактные и высоконаправленные антенны, способные формировать несколько одновременно существующих лучей без электромеханических поворотных устройств. Традиционные фазированные антенные решётки при числе элементов от 64 и выше становятся чрезмерно энергоёмкими и дорогостоящими [55], а классические зеркальные антенны не обеспечивают требуемой скорости переключения лучей и ограничены фиксированной геометрией раскрыва. В этих условиях сферически-симметричные градиентные линзы — в первую очередь линза Люнеберга — оказываются естественным пассивным формирователем многолучевой диаграммы направленности, обеспечивающим независимо от электрического размера апертуры полный 4π -стерадиан обзор при смещении облучателя по фокальной поверхности.

С другой стороны, развитие аддитивных технологий производства — 3D-печати полимерами с управляемой пористостью, а также появление композитных и метаматериальных сред с расширенным диапазоном реализуемых значений диэлектрической проницаемости [1; 2] — устранило одно из ключевых исторических препятствий к практическому применению линз Люнеберга:

трудность получения материала с непрерывно изменяющимся показателем преломления. Переход от непрерывного профиля к многослойной аппроксимации с управляемой пористостью сделал линзу Люнеберга технологически реализуемой конструкцией и перевёл задачу её синтеза из теоретической плоскости в инженерную.

Однако имеющийся инструментарий электродинамического анализа ещё не адаптирован к возникающим задачам. Универсальные полноволновые решатели — метод конечных элементов (FEM, Ansys HFSS), метод конечных разностей во временной области (FDTD, CST Microwave Studio), метод моментов (MoM) — обеспечивают высокоточное решение при однократном расчёте, однако их применение к параметрической оптимизации многослойных сферических структур и тем более к генерации обучающих выборок для методов машинного обучения неприемлемо по затратам машинного времени: полный прогон по геометрическим параметрам занимает десятки и сотни часов. Лучевые методы (SBR) при многократных переотражениях в многослойной линзе дают накопительную ошибку, а специализированные аналитические приближения теории Ми применимы лишь к однородным сферам. Полуаналитический аппарат тензорных функций Грина (ТФГ), развитый в работах Б. А. Панченко [17–20] и адаптированный С. Н. Шабуниним к многослойным цилиндрическим структурам [22; 23], способен устранить это противоречие: он сводит задачу к рекуррентному пересчёту направленных импедансов и адмитансов по слоям и даёт ускорение на несколько порядков при сопоставимой точности, однако до настоящего времени не доведён до универсального программного инструмента, пригодного для инженерного проектирования линзовых антенн.

Таким образом, актуальным является развитие аппарата ТФГ применительно к многослойным сферическим и тороидным линзам Люнеберга в сочетании с аддитивными технологиями 3D-печати и современными методами оптимизации, а также создание открытого программного инструмента, замыкающего цепочку «теория — синтез — изготовление — верификация». Высокий интерес научного сообщества к этому направлению подтверждается лавинообразным ростом публикаций и патентов на ведущих порталах-агрегаторах (IEEE Xplore, Google Patents, Google Scholar, Scopus), а также систематическим появлением работ по применению линз Люнеберга в сетях 5G/6G, радиолокации беспилотного транспорта и системах управления радиозаметностью.

Объект исследования. Объектом исследования является класс пассивных сферически-симметричных радиально-неоднородных диэлектрических структур, объединяющий классическую сферическую линзу Люнеберга с непрерывным профилем $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$, её модифицированные конфигурации (полусферическую линзу на проводящем экране, тороидную линзу для панорамного азимутального обзора, сферическую линзу с центральным металлическим ядром, обобщённый класс линз-дефлекторов с произвольным углом отклонения $\alpha \in (0; \pi)$, включая частный случай линзы Итона при $\alpha \rightarrow \pi$), а также построенные на их основе многолучевые антенные системы и пассивные рассеиватели для управления радиозаметностью, функционирующие в радио- и СВЧ-диапазоне частот от 1 до 80 ГГц. Объект ограничен сферической и сферически-симметричной (включая тороидную с азимутальной симметрией) геометриями; плоские и цилиндрические линзовые структуры в работу не входят и относятся к ранее изученным разделам единой методологической программы школы Б. А. Панченко.

Под *управлением электромагнитным полем* в настоящей работе понимается *пассивное* управление — целенаправленное преобразование пространственной структуры поля (фокусировка, коллимация, многолучевое формирование и отклонение диаграммы направленности, а также управление рассеянием и радиозаметностью) за счёт пространственного распределения диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r)$ в неизменной градиентной структуре, без электронной перестройки её параметров. Активное (реконфигурируемое) управление полем средствами перестраиваемых или управляемых сред в настоящей работе не рассматривается и отнесено к перспективам развития.

Цель настоящей работы состоит в развитии методов электродинамического анализа, синтеза и реализации линзовых антенн Люнеберга на основе аппарата тензорных функций Грина и численного моделирования, а также в расширении областей их применения в современных радиотехнических системах, в том числе с учётом возможностей изготовления при помощи аддитивных технологий 3D-печати.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Систематизировать современное состояние теории и практики применения сферических градиентных линз (Люнеберга, Максвелла, Итона, модифицированных конфигураций) в антенных, радиолокационных

- и беспилотных радиотехнических системах, обосновать выбор многослойной аппроксимации с управляемой пористостью в качестве основной конструктивной модели и выявить остаточные методические, технологические и прикладные пробелы существующего инструментария электродинамического анализа.
2. Развить математический аппарат тензорных функций Грина в сферической системе координат для радиально-неоднородных и радиально-анизотропных слоистых структур; построить рекуррентную схему пересчёта направленных импедансов и адмитансов по слоям, единообразно описывающую сферическую геометрию при произвольном числе слоёв, профилях проницаемости и типах возбуждения.
 3. Исследовать дифракционные характеристики (диаграммы рассеяния, бистатистическую эффективную площадь рассеяния, коэффициенты основной и кросс-поляризации) многослойной линзы Люнеберга при облучении волнами линейной и круговой поляризации и установить количественную связь между числом слоёв, электрическим размером линзы и её рассеивающими свойствами.
 4. Разработать методику оптимизированной многослойной аппроксимации непрерывного профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$, согласованную с технологическими ограничениями FDM-3D-печати по диапазону реализуемых проницаемостей и степеней заполнения.
 5. Синтезировать класс сферических градиентных структур с наперёд заданным постоянным углом отклонения луча: свести обратную задачу к интегральному уравнению Абеля, получить замкнутое соотношение для профиля показателя преломления и верифицировать синтезированные профили полноволновым электродинамическим расчётом.
 6. Получить замкнутые расчётные соотношения для антенных характеристик линз Люнеберга — коэффициента направленного действия, коэффициента усиления, диаграмм направленности по основной и кросс-поляризационной составляющим, коэффициента поляризационных потерь — с использованием развитого аппарата тензорных функций Грина.
 7. Исследовать характеристики линейных и моноимпульсных антенных решёток, построенных на основе многослойных линз Люнеберга, и

- установить ограничения по периодам и фазовому распределению, при которых обеспечивается заданная развязка каналов и подавление дифракционных максимумов.
8. Получить расчётные характеристики нестандартных конфигураций линз Люнеберга — полусферической линзы на проводящем экране, тороидной линзы для панорамного азимутального обзора, сферической линзы с центральным металлическим ядром — и обосновать их применимость для формирования диаграмм направленности специального вида (косекансных, многолучевых, с управляемой обратной составляющей).
 9. Разработать технологию изготовления многослойных линз Люнеберга методом FDM-3D-печати с управляемой пористостью полимерных материалов (HIPS, PLA, PETG, пенопласт), включая методику расчёта пустот по логарифмической модели Лихтенекера и контроля диэлектрической проницаемости методом NRW в волноводном тракте; верифицировать предложенную технологию на серии макетов диаметром 50, 73 и 130 мм.
 10. Разработать метод декомпозиции произвольной кусочно-координатной электродинамической структуры на плоско-, цилиндрико- и сферически-слоистые подобласти: получить ядра преобразования модальных базисов на интерфейсах разной координатной симметрии, привести все типы сшивания к единой алгебраической форме и реализовать метод программно.
 11. Создать открытую программную библиотеку *GreenTensor*, реализующую разработанный аппарат тензорных функций Грина в виде классового API и интегрированную со средой Ansys Electronics Desktop через IronPython-скрипты автоматического синтеза HFSS-моделей; верифицировать библиотеку на канонических задачах (металлические сферы, многослойные линзы Люнеберга) и обосновать возможность её применения для генерации обучающих выборок при построении нейросетевых суррогатных моделей.

Методология и методы исследования. Методологическая основа исследования представляет собой сочетание аналитических и численных методов расчёта электромагнитных полей в многослойных структурах. Основное внимание уделено моделированию и оптимизации линзовых антенн, включая

сферические линзы Люнеберга и их модификации (полусферические, тороидальные, со специальным распределением показателя преломления), на базе аппарата тензорных функций Грина и численного моделирования в *Ansys HFSS*.

В работе использованы следующие методы исследования:

- аналитические методы, основанные на разложении по тензорным функциям Грина, позволяющие строго описывать рассеяние и распространение электромагнитных волн в сферических неоднородных средах;
- методы решения прямых и обратных задач геометрической оптики для радиально-неоднородных сред (инвариант Бугера, преобразования Абеля-типа);
- численное моделирование в программных комплексах *Ansys HFSS*, *CST Microwave Studio* и *FEKO*, применяемое для верификации аналитических моделей, оптимизации геометрии антенн и анализа их электродинамических характеристик;
- разработка и тестирование программных инструментов — в частности, библиотеки *GreenTensor* для эффективного расчёта электромагнитных характеристик многослойных сред;
- сравнительный анализ полученных результатов с данными других авторов и экспериментальными измерениями, обеспечивающий достоверность предложенных моделей.

Комплексный подход, объединяющий аналитические, вычислительные и экспериментальные методы, позволил детально проанализировать поведение электромагнитного поля в исследуемых структурах и сформировать рекомендации по их практическому применению в современных радиотехнических системах.

Предмет исследования. Предметом исследования являются электродинамические характеристики указанных в объекте структур (диаграммы направленности по основной и кросс-поляризационной составляющим, диаграммы рассеяния, бистатическая и моностатическая эффективная площадь рассеяния, коэффициент направленного действия, коэффициент усиления, коэффициент поляризационных потерь α и сопряжённая с ним поляризационная эффективность $\mu = 1 - \alpha$), рассчитываемые методом тензорных функций Грина в сферической системе координат, а также методики синтеза радиально-неоднородного профиля показателя преломления $n(r)$ и многослойной

аппроксимации профиля $\varepsilon(r)$, согласованной с технологическими ограничениями FDM-3D-печати по диапазону реализуемых проницаемостей и степеней заполнения полимерных материалов (HIPS, PLA, PETG, пенопласт). Поскольку именно методология (метод ТФГ + многокритериальная оптимизация + FDM-стратификация) формирует расчётную модель объекта, изменение методологии — например, переход к полностью численному FEM-анализу или к лучевому приближению — порождает иной предмет исследования, что отражает классический принцип Аникина-Пойзнера-Усанова «один объект порождает множество предметов».

Положения, выносимые на защиту:

1. Электродинамический аппарат анализа кусочно-координатной структуры, декомпозируемой на плоско-, цилиндрические и сферически-слоистые подобласти, сводящийся к системе линейных уравнений с блочной матрицей, диагональные блоки которой — импедансные матрицы локальных ТФГ, а недиагональные — матрицы перевязи модальных базисов. Для радиально-стратифицированных структур аппарат позволяет получать диаграммы рассеяния и направленности с расхождением с МКЭ не более $0,6^\circ$ по ширине главного лепестка и 1 дБ по ПБЛ. *Соответствует п. 1 паспорта научной специальности 2.2.14.*
2. Программная реализация аппарата в виде открытой Python-библиотеки *GreenTensor*, объединяющей в едином интерфейсе одночастотный расчёт диаграмм рассеяния и параметрический свип по электрическому размеру. Библиотека обеспечивает расчёт бистатистического и моностатистического сечений рассеяния $\sigma_s(k_0a)$, $\sigma_r(k_0a)$ за время на 2–4 порядка меньшее, чем МКЭ. На выборке из тысяч конфигураций многослойной ЛЛ, сгенерированной этими средствами, построен нейросетевой суррогат характеристик рассеяния, воспроизводящий полное сечение с коэффициентом детерминации $R^2 \approx 0,99$ на отложенной выборке. *Соответствует п. 9 паспорта научной специальности 2.2.14.*
3. Класс линз-дефлекторов — сферических радиально-неоднородных структур радиуса a в свободном пространстве, отклоняющих все падающие параллельные лучи на заданный угол $\alpha \in (0; \pi)$ независимо от прицельного параметра, — задаётся замкнутым соотношением для показателя преломления $n^{1+\nu} + n^{1-\nu} = 2a/r$, $\nu = \pi/\alpha$, полученным обращением интегрального уравнения Абеля. Класс построен на том

же аппарате, что и классические решения Люнеберга и Итона (различие — только в виде угловой функции отклонения), и содержит линзу Итона $n = \sqrt{2a/r - 1}$ как предельный случай $\alpha \rightarrow \pi$; подтверждено электродинамическим расчётом: отклонение главного максимума от заданного направления не более $\pm 2^\circ$. *Соответствует п. 8 паспорта научной специальности 2.2.14.*

4. Модифицированные сферические конфигурации ЛЛ — полусферическая на проводящем экране, с центральным металлическим ядром, магнетодиэлектрическая и метаматериальная — обеспечивают управление переизлучённым полем: формирование косекансной диаграммы направленности с шириной косекансного сектора $76,1^\circ$ и ПБЛ не выше $-25,4$ дБ при диаметре экрана вдвое больше диаметра линзы ($d = 8\lambda$), на котором ширина сектора выходит на насыщение (при $d = 10\lambda$ прироста нет); управление уровнем обратного излучения металлическим ядром не менее чем в пределах ± 10 дБ; обращение обратного рассеяния в нуль (на уровне машинной точности расчёта) импедансным согласованием слоёв магнетодиэлектрической конфигурации ($\varepsilon(r) = \mu(r)$). *Соответствует п. 3 паспорта научной специальности 2.2.14.*
5. Совместный выбор параметров многослойного профиля ЛЛ по двум критериям — минимизации RMSE ступенчатой аппроксимации методом многокритериальной генетической оптимизации при технологических ограничениях FDM-печати и выбору числа слоёв L в спектральных «окнах» минимума коэффициента поляризационных потерь, осциллирующего по электрическому размеру, — обеспечивает изготавливаемый профиль с $\text{RMSE}(\varepsilon) = 0,032$ при восьми слоях (на 13% ниже оптимизированной аппроксимации Фукса) и кросс-поляризацией на 5,65 дБ ниже, чем у однородной сферы того же электрического размера; электродинамический выигрыш восьмислойной MOGA-стратификации показан расчётно, а технология изготовления и аппарат анализа подтверждены экспериментально на трёхслойном макете $D = 73$ мм (равношаговая схема). *Соответствует пп. 2 и 6 паспорта научной специальности 2.2.14.*

Каждое положение сформулировано в форме открытого тезиса «при условиях A обеспечивается следствие B », отражает существенные признаки новизны и снабжено количественными характеристиками с указанием единиц

измерения. Дополнительные обоснования новизны, научной и практической значимости, а также достоверности приведены в соответствующих рубриках ниже — по принципу «три опоры» (новизна → значимость → достоверность) для каждого положения.

Соответствие паспорту научной специальности. Положения, выносимые на защиту, соответствуют направлениям исследований паспорта научной специальности 2.2.14 «Антенны, СВЧ-устройства и их технологии» (пп. 1, 2, 3, 6, 8, 9); адресное соответствие приведено в таблице 1. Отнесение положения 3 к пункту 8 опирается на прямо поименованные в нём *радио-оптические антенные системы*: синтезированная линза-дефлектор является радио-оптическим элементом, в котором управление направлением излучения достигается профилем показателя преломления, а не фазовым распределением на апертуре. Дополнительным основанием служит формулировка «*антенны с уникальными характеристиками*»: способность отклонять весь падающий пучок на наперёд заданный угол независимо от прицельного параметра не воспроизводится ни зеркальными, ни фазированными антенными системами. К тому же пункту примыкает полусферическая конфигурация с косекансной диаграммой направленности (см. подраздел 7.2), формирующая диаграмму специального вида пассивными средствами.

Научная новизна: раскрывается отдельно для каждого положения, выносимого на защиту.

1. *К положению 1.* Впервые единый аппарат тензорных функций Грина доведён от рекуррентной схемы пересчёта направленных импедансов и адмитансов, ранее построенной для плоских и цилиндрических магнитодиэлектрических слоистых структур в работах школы Б. А. Панченко [22—24], до сферически-симметричного случая и далее до метода декомпозиции произвольной кусочно-координатной структуры на канонические подобласти трёх типов (плоско-, цилиндрические и сферо-слоистые) с замкнутым аппаратом сшивания модальных базисов на интерфейсах разной координатной симметрии, что замыкает триаду «плоскость — цилиндр — сфера» в единой методологии. Достижимое сокращение машинного времени на 2–4 порядка относительно универсальных конечно-элементных пакетов при сохранении точности по основным характеристикам ранее в литературе не сообщалось.
2. *К положению 2.* Предложена и реализована открытая Python-библио-

Таблица 1 — Соответствие положений, выносимых на защиту, паспорту научной специальности 2.2.14

Положение	Пункт	Направление исследований по паспорту специальности	Публикации автора
1	1	Решение внешних и внутренних дифракционных задач электродинамики для анализа и синтеза высокоэффективных антенн и микроволновых устройств, определения их предельно-достижимых характеристик, возможных путей построения	[56—63]
2	9	Разработка методов автоматизированного проектирования и оптимизации антенных систем и микроволновых устройств широкого применения	[46; 64—66]
3	8	Исследование и разработка адаптивных и малопомехящих антенных систем, больших антенн с высоким усилением, активных фазированных антенных решёток со сверхбольшими мощностями излучения, радио-оптических антенных систем и антенн с уникальными характеристиками	[56; 67]
4	3	Исследование и разработка новых антенных систем, активных и пассивных микроволновых устройств, в том числе управляющих, фазирующих, экранирующих и других, с существенно улучшенными параметрами	[37; 67—74]
5	2	Исследование характеристик антенн и микроволновых устройств для их оптимизации и модернизации, что позволяет осваивать новые частотные диапазоны, обеспечивать электромагнитную совместимость, создавать высокоэффективную технологию	[29; 75—80]
	6	Разработка и исследование новых технологий производства, настройки и эксплуатации антенных систем	

тека *GreenTensor* с классовым программным интерфейсом, объединяющая в едином API одночастотный анализ и параметрический свип по электрическому размеру, что в отличие от существующих узкоспециализированных скриптов позволяет в типовых задачах оптимизации выполнять до 10^4 обращений за приемлемое офлайн-время; на сгенерированной этими средствами выборке построен нейросетевой суррогат характеристик рассеяния ($R^2 \approx 0,99$ по полному сечению, 10.4.5), подтверждающий пригодность библиотеки для инверсного дизайна. Реализация обеспечивает независимую проверку и развитие метода сторонними исследователями.

3. К положению 3. Развитием аппарата анализа радиально-неоднород-

ных сферических структур на обратную задачу синтеза получено замкнутое аналитическое решение для профиля показателя преломления, обеспечивающего постоянное отклонение параллельного пучка на произвольный наперёд заданный угол $\alpha \in (0; \pi)$. Класс «линзовых дефлекторов» сформулирован как аналитическое обобщение классической линзы Итона ($\alpha \rightarrow \pi$) и однородной среды ($\alpha \rightarrow 0$, отсутствие отклонения); намечены приложения в управлении радиозаметностью объектов и в пассивных элементах многолучевой связи.

4. *К положению 4.* В рамках единого аналитического аппарата описано формирование диаграмм специального вида (косекансных $\cos \sec^2(\theta)$, многолучевых, с управляемой обратной составляющей) модифицированными конфигурациями сферической линзы — полусферической на проводящем экране, с центральным металлическим ядром, магнетодиэлектрической и метаматериальной. Получены оригинальные количественные характеристики (УБЛ $\leq -25,4$ дБ, ширина косекансного сектора $76,1^\circ$ для $d = 8\lambda$; $\sigma_r \leq 10^{-25} \pi a^2$ для магнетодиэлектрической ЛЛ с $\varepsilon(r) = \mu(r)$), не имеющие прямых аналогов в опубликованных работах по линзовым антеннам.
5. *К положению 5.* Предложена и численно обоснована методика многокритериальной генетической оптимизации многослойной аппроксимации профиля линзы Люнеберга с явным учётом ограничений FDM-3D-печати, обеспечивающая среднеквадратичное отклонение ступенчатой аппроксимации $\text{RMSE}(\varepsilon) = 0,032$ при $L = 8$ слоях — на 13% ниже оптимизированной аппроксимации Фукса (0,0368) и на 23% ниже равношаговой (0,0416) — и закрывающая технологический разрыв между расчётной моделью и реализуемым изделием. В дополнение к геометрическому критерию введён и систематически исследован коэффициент поляризационных потерь α и сопряжённая поляризационная эффективность $\mu = 1 - \alpha$ при облучении волнами круговой поляризации: установлен осциллирующий характер $\alpha(k_0 a)$, образующий спектральные «окна» минимальных потерь и дающий ранее не предлагавшийся количественный критерий совместного выбора числа слоёв и рабочей полосы при проектировании пассивных отражателей кругополяризованного излучения.

Практическая значимость раскрывается в теоретической и приклад-

ной плоскостях и привязывается к каждому из пяти положений, выносимых на защиту.

Теоретическая значимость работы состоит в следующем. *Во-первых*, аппарат тензорных функций Грина школы Б. А. Панченко [17—19] обобщён на сферически-симметричный случай и объединён с плоским и цилиндрическим аппаратами в единый декомпозиционный метод для произвольных кусочно-координатных структур, что замыкает методологическую триаду «плоскость — цилиндр — сфера» и распространяет область применимости ТФГ за рамки канонических задач — на комбинированные структуры, ранее доступные только методам объёмной дискретизации (FEM, FDTD) (положение 1). *Во-вторых*, получено замкнутое аналитическое решение обратной задачи Абелевского типа для синтеза радиально-неоднородного профиля под произвольный наперёд заданный угол отклонения, расширяющее класс аналитически решаемых градиентных линз (положение 3). *В-третьих*, введён и аналитически описан количественный спектральный инвариант — коэффициент поляризационных потерь $\alpha(k_0a)$, ранее не вводившийся для сферической градиентной линзы (положение 5). *В-четвёртых*, аппарат переведён из аналитической формы в открытый программный инструмент *GreenTensor* (положение 2), что делает метод независимо проверяемым и развиваемым сторонними исследователями и создаёт теоретическую основу для построения нейросетевых суррогатных моделей в задачах инверсного дизайна градиентных диэлектрических сред.

Практическая значимость. Положения 2 и 5 непосредственно применимы при проектировании линзовых антенн миллиметрового диапазона для сетей подвижной связи пятого поколения (5G/6G): сокращение машинного времени расчёта на 2...4 порядка по сравнению с конечно-элементным эталоном (Ansys HFSS) и количественная оценка ускорения параметрической оптимизации в $10^2 \dots 10^4$ раз переводят задачу синтеза многослойной линзы из категории трудоёмкой в инженерно-практическую. В практическом отношении это означает, что разработанная библиотека *GreenTensor* работает на стандартной инженерной рабочей станции уровня Intel Core i7 без обращения к высокопроизводительным вычислительным кластерам и суперкомпьютерам: полный расчёт зависимостей $\sigma_s(k_0a)$, $\sigma_r(k_0a)$ на сетке из 100 узлов в диапазоне $k_0a \in [\pi; 10\pi]$ выполняется за время не более 5 секунд, а офлайн-генерация обучающей выборки 10^4 конфигураций укладывается в несколько часов вместо недель машинного времени; тем самым сокращаются капитальные и

операционные расходы проектных подразделений и снижается порог входа в задачи многокритериальной оптимизации и нейросетевого суррогатного моделирования. Положение 4 (модифицированные конфигурации) обеспечивает методическую базу для антенн обзорной радиолокации с диаграммой $\cos \varepsilon^2(\theta)$, для панорамных систем без механического сканирования, для пассивных ЭПР-маркеров; положение 3 (линзы-дефлекторы) применимо в задачах управления радиозаметностью беспилотных летательных аппаратов и в пассивных элементах многолучевой связи. Положение 5 (методика стратификации) обеспечивает воспроизводимое изготовление линз стандартными FDM-слайсерами без аппаратных модификаций, что критично для серийного производства и сокращает удельный расход полимерного сырья и электроэнергии за счёт оптимизированной пористости слоёв.

Перспективы внедрения. Разработанная программная библиотека *GreenTensor* (положение 2) пригодна для автоматизированного синтеза радиочастотных и оптических устройств, для генерации обучающих выборок при построении нейросетевых суррогатных моделей в задачах инверсного дизайна, а также в качестве вычислительной подпрограммы расчётных комплексов электродинамического моделирования. В частности, открытая архитектура с компактным Python-интерфейсом обеспечивает совместимость с отечественным пакетом *ЛОГОС ЭМИ* (РФЯЦ-ВНИИЭФ) и зарубежными САПР Ansys Electronics Desktop, Altair FEKO, CST Microwave Studio, что позволяет использовать библиотеку как «плагинную» аналитическую подсистему внутри существующих экосистем электродинамического моделирования (см. главу 10, раздел 10.21). Исходный код размещён на GitHub [46], документация — на платформе *Read the Docs* [48], а официальный сайт проекта — по адресу greentensor.ru [47]; сертификат о владении доменом, подтверждающий принадлежность интернет-ресурса автору, приведён в приложении (см. Д.6). Совокупность полученных в работе результатов применима как в фундаментальных научно-исследовательских работах, так и при разработке перспективных радиотехнических систем — многолучевых базовых станций 5G, беспилотного транспорта, систем радиолокации и спутниковой связи.

Личный вклад. Автором разработаны методические и численные подходы к анализу электродинамических характеристик многослойных сферических структур, проведены их теоретические и экспериментальные исследования, а также предложены новые методы оптимизации параметров линзовых антенн

Люнеберга. Ряд практических решений, связанных с применением разработанных подходов в прикладных радиолокационных задачах, защищён патентами [81; 82]. Автором лично разработан метод расчёта электродинамических характеристик линзовых антенн Люнеберга на основе тензорных функций Грина, учитывающий неоднородность материалов и градиентное распределение показателя преломления по слоям. Выполнено численное моделирование линзовых антенн в *Ansys HFSS*, проведено исследование их направленных характеристик и оптимизация структуры многослойного диэлектрика с точки зрения коэффициента усиления. Разработана и введена в эксплуатацию программная библиотека *GreenTensor*, предназначенная для численного анализа рассеяния электромагнитных волн на многослойных сферических структурах; её применение позволило существенно сократить вычислительное время при сохранении контролируемой точности моделирования. Разработан алгоритм оптимизации геометрических параметров многослойных сферических структур для их применения в радиолокации и спутниковой связи. Личный вклад автора подтверждается публикациями, докладами на международных конференциях и практической реализацией разработанных методов в виде программного обеспечения. Параллельно с академической работой автор вёл систематическую научно-популярную деятельность: в период 2019–2026 годов на профильном русскоязычном портале «Клуб пользователей САЕ» опубликовано 48 обзорных материалов и видеокейсов по методам прикладной электродинамики (линзы Люнеберга, ФАР, ЭПР, ЭМС, SBR+, PyAEDT, оптимизация антенн), полный перечень и тематическая классификация которых приведены в приложении Г.

Достоверность полученных результатов и положений, выносимых на защиту, обеспечивается тремя независимыми направлениями верификации, применёнными к каждому из пяти положений.

Первое направление — математическая строгость аппарата. Развитый метод тензорных функций Грина для сферически-симметричных структур (положения 1, 2, 5) опирается на строгие теоремы существования и единственности решения уравнений Максвелла в областях, частично заполненных диэлектриком [18–20], и наследует апробированный в работах школы Б. А. Панченко [24] формализм; обратная задача синтеза профиля (положение 3) сведена к уравнению Абелевского типа, для которого условия разрешимости и единственности доказаны в классической литературе. Для декомпозиционной части аппарата (положение 1) теоретическим основанием служат теорема единственности реше-

ния уравнений Максвелла в каждой канонической подобласти [83; 84], принцип эквивалентности Шелкунова–Шуберта для замены входящих волн поверхностными токами на интерфейсах [85] и условие излучения Зоммерфельда [86], обеспечивающее однозначность выбора уходящих волн в открытых направлениях.

Второе направление — сопоставление с эталонным полноволновым решателем. Для всех численных результатов диссертации проведена систематическая верификация в Ansys Electronics Desktop (FEM с адаптивной тетраэдральной сеткой, абсорбирующее граничное условие Radiation, источник — плоская волна Incident Wave). На канонической серии задач (металлическая сфера 2 и 5 слоёв при $k_0a = 4\pi$, четырёхслойная линза Люнеберга при $k_0a = 6\pi$, металлическая сфера с диэлектрическим укрытием) расхождение метода ТФГ и FEM-решения не превышает $0,6^\circ$ по ширине главного лепестка и 1 дБ по уровню первого бокового лепестка — что и составляет количественное содержание положения 1. HFSS-проект и экспортированные диаграммы хранятся в открытом репозитории *GreenTensor* (`examples/Example 2`) и доступны для независимой проверки.

Третье направление — независимая программная реализация и эксперимент. Для положения 2 проведено перекрёстное сопоставление Python-реализации в *GreenTensor* с независимым Matlab-скриптом `lin_polar_TFG-HFSS_compare.m`: расхождение нормированной компоненты E_θ не превышает 10^{-4} . Для положения 5 экспериментальная верификация выполнена на серии 3D-печатных макетов из HIPS, PLA, PETG и пенопласта диаметром 50, 73 и 130 мм; отклонение реализованного профиля $\varepsilon(r)$ от расчётного в диапазоне $1 \leq \varepsilon \leq 2$ не превышает 2...3%, что подтверждено методом NRW в волноводном тракте. Осциллирующий характер $\alpha(k_0a)$ (положение 5) воспроизведён двумя независимыми численными реализациями (Python и Matlab) и подтверждён аналитически — через поведение сумм $\sum_n (2n+1)(|M_n|^2 \pm |N_n|^2)$ при $|M_n| \rightarrow |N_n|$. Для положения 1 корректность программной реализации Python-модуля `decomposition` (приложение A.2) подтверждена тремя независимыми верификационными тестами, соответствующими трём базовым каноническим строительным блокам декомпозиционного аппарата: воспроизведение формул Френеля одиночной границы с точностью $3,9 \cdot 10^{-16}$ (плоский ТФГ-блок), классического ряда Ми однородной диэлектрической сферы с экспоненциальным затуханием хвоста до $\sim 10^{-18}$ (сферический блок) и много-

слоистой аппроксимации профиля линзы Люнеберга со сходимостью до $\sim 10^{-22}$ (рекуррентный пересчёт направленных импедансов в сферической геометрии). Дополнительные сертификационные проверки цилиндрической части аппарата (Wronskian-тождество и двухслойная коаксиальная структура) подтверждают пригодность алгоритмической базы для дальнейшего расширения на комбинированные сферо-цилиндрические задачи.

Дополнительные опоры достоверности — анализ чувствительности к параметрам слоёв и к выбору эталонных значений, показавший устойчивость предложенных методов к технологически реализуемым вариациям входных данных, а также соответствие полученных результатов опубликованным данным других авторов [87; 88] в пределах их применимости.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских научных конференциях:

- 25-я Международная конференция молодых специалистов по электронным приборам и материалам (IEEE EDM), Эрлагол, 2024 г. [65];
- IEEE Ural-Siberian Conference on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (USBREIT), Екатеринбург, 2024 г. [66], 2022 г. [78] и 2019 г. [55];
- 28-й Международный форум по телекоммуникациям (IEEE TELFOR), Белград, Сербия, 2020 г. [37];
- 12-я Европейская конференция по антеннам и распространению радиоволн (EuCAP), Лондон, Великобритания, 2018 г. [68];
- 12-я Европейская конференция по радиолокации (EuRAD) и 45-я Европейская конференция по микроволнам (EuMC), Париж, Франция, 2015 г. [60];
- Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (APEIE), Новосибирск, 2021 г. [34; 89], 2022 г. [35; 90];
- 7-я Всероссийская научно-техническая конференция «Системы связи и радионавигации», Красноярск, 25–27 октября 2023 г. [64; 91];
- Семинары кафедры «Радиоэлектроники и телекоммуникаций» ИРИТ-РТФ УрФУ, Екатеринбург, 2018–2024 гг. Семинары кафедры «Мультимедиа и мобильных систем» УрТИСИ СибГУТИ, Екатеринбург, 2012–2020 гг.

Результаты работы прошли апробацию на научных семинарах кафедры радиоэлектроники и телекоммуникаций ИРИТ-РТФ Уральского федерального университета, проводимых заведующим кафедрой доктором технических наук, профессором С. Н. Шабуниним; основные положения и результаты исследования прорабатывались автором в ходе регулярных рабочих встреч и обсуждений с научным консультантом доктором технических наук, профессором В. Я. Носковым, а также с представителями научной школы прикладной электродинамики, основанной доктором технических наук, заслуженным деятелем науки Российской Федерации, почётным профессором УГТУ-УПИ Б. А. Панченко.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 52 печатных изданиях, 18 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 8 — в изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus, 26 — в монографии и других изданиях и материалах конференций. Зарегистрированы 2 патента и 3 программы для ЭВМ.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, 10 глав, заключения и 5 приложений. Полный объём диссертации составляет 500 страниц, включая 130 рисунков и 93 таблицы. Список литературы содержит 231 наименование.

Глава 1. Линзы Люнеберга. Свойства и потенциал применения на радиочастотах

1.1 Введение

Настоящая глава открывает содержательную часть диссертации и выполняет четыре функции:

- (а) исторический обзор линз Люнеберга от оптических истоков (задача Максвелла в Кембриджском математическом журнале, 1853 г.) до современного состояния, включая модификации Brown–Gutman, Morgan, Stettler и работы отечественной школы Г. Т. Маркова (раздел 1.2);
- (б) оценка вычислительных ресурсов FEM-моделирования линз большого электрического радиуса в Ansys HFSS и CST Microwave Studio как обоснование перехода от объёмной дискретизации к аппарату тензорных функций Грина (раздел 1.4);
- (в) сравнительный анализ способов многослойной аппроксимации профиля $\varepsilon(r)$ под 3D-печать и оценка влияния числа слоёв на характеристики линзы (раздел 1.5);
- (г) обобщённая постановка задач управления электромагнитным полем в радиально-стратифицированных сферических структурах в виде иерархии уровней L0–L4 (раздел 1.7), формирующая единый методологический контекст для линзовых, синтезирующих и метаматериальных структур, рассматриваемых в последующих главах.

Глава носит обзорно-методический характер: разделы (а)–(в) консолидируют известный материал, необходимый для понимания дальнейших оригинальных результатов, а раздел (г) формирует новый методологический контекст, к которому в главах 4, 7 и 9 будут привязаны положения 1, 3, 4 и 5, выносимые на защиту.

1.2 Историческая справка и этапы развития линз Люнеберга

Сферические линзы с переменным коэффициентом преломления вдоль радиуса $n(r)$ изначально были описаны в теоретической оптике, но не нашли в ней широкого применения из-за трудности получения оптически прозрачных сред с непрерывно изменяющимся коэффициентом преломления. Первой сфе-

рической линзой с меняющимся по радиусу $n(r)$ является *линза Максвелла*. Её свойства впервые описаны в математическом журнале Кембриджского и Дублинского университетов в 1853 г.: требовалось найти показатель преломления как функцию радиуса при условии кругового хода луча и доказать фокусирующие свойства такой линзы.

Решение описанной задачи было опубликовано в 1854 году в том же журнале анонимно. Позже решение этой проблемы было включено в «Научные статьи Джеймса Клерка Максвелла» [92], опубликованные через 11 лет после смерти учёного. Таким образом, принято считать, что именно Максвелл описал способность сферической линзы собирать лучи, выходящие на противоположной стороне. Сканирование луча такой линзой возможно лишь в ограниченной угловой области, что ограничило её практическое применение, однако заложило основу теории линзовых антенн.

Задачу широкоугольного сканирования сферической линзы решил немецкий математик Р.К. Люнеберг в 1944 году [5]. Эти теоретические работы, которые первоначально были направлены на оптические устройства, быстро получили широкое применение в радиоэлектронных системах. В своей работе Люнеберг показал, что неоднородная сфера с показателем преломления $n(r) = \sqrt{2 - r^2}$, ($0 \leq r \leq 1$), помещённая в однородную среду с $n = 1$, собирает падающий пучок параллельных лучей в резкий фокус: профиль убывает от центра к поверхности и создаёт два сопряжённых фокуса за пределами линзы. Из бесконечного семейства профилей, удовлетворяющих этому условию, наиболее простой и явный вид соответствует случаю, когда одна точка фокусировки находится на бесконечности, а вторая — на противоположной поверхности линзы.

Позднее J. Brown и A. S. Gutman предложили решения, которые создают одну внутреннюю и одну внешнюю фокусные точки [93]. Полученные решения выражаются через определённые интегралы, допускающие численное вычисление, что показал S.P. Morgan в 1958 году [8].

В отечественной литературе линию общего решения задачи синтеза градиентных линз последовательно развивает школа ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. В.А. Калошин и В.Я. Щербенков ещё в 1973 г. обобщили задачу Люнеберга на анизотропную среду [11]; в дальнейшем исследованы широкополосные планарные линзы Люнебурга [94], развита теория распределения эйконала на поверхности градиентной осесимметричной линзы [95], получены решения задач синтеза трёхфокальных градиентных линз [12], общее решение задачи

синтеза градиентной линзы с центральной симметрией [13], описывающее весь класс профилей $n(r)$ с заданными фокусирующими свойствами (и включающее решение Моргана, а через него — решения Люнеберга и Гутмана как частные случаи), а также решение задачи синтеза анизотропных линз Люнеберга [14]. Перечисленные работы выполнены в геометрикооптическом приближении и отвечают на вопрос о законе $n(r)$; настоящая диссертация продолжает эту линию на следующем шаге проектной цепочки — при переходе от непрерывного закона к слоистой реализации и её строгому полноволновому анализу методом тензорных функций Грина, включая область конечных электрических размеров $k_0 a$, где лучевое приближение неприменимо.

Обобщение теории линзы Люнеберга провёл Штеттлер (Stettler) в статье [6], опубликованной в 1955 году, в которой указывается, что подобная линза, благодаря своей возможности работать в широком диапазоне углов, нашла широкое применение при конструировании антенн сантиметрового диапазона [10; 96; 97]. В 1959 году Morgan выпустил статью в журнале IEEE, в которой обобщил теорию сферических симметричных линз [9]. После этого в 1960 году сферические линзы с законом преломления $n(r) = \sqrt{2 - r^2}$ стали называть в честь описавшего закон математика. Отечественными авторами линзы Люнеберга, применительно к задачам радиотехники, впервые описаны в учебнике Г. Т. Маркова [7] в 1960 году, а с 1961 года в журналах IEEE начинают появляться статьи, в названиях которых отмечается общепринятое на сегодняшний день название линзы *Luneburg Lens*.

В учебнике для высших учебных заведений Г. Т. Маркова [98] приведено описание работы линзы Люнеберга в радиодиапазоне и подчёркнуто главное её достоинство — возможность «качать диаграмму направленности в очень широком диапазоне углов». Автор указывает на способ изготовления линзы в виде сферы из неоднородного диэлектрика. Квазиоптическое решение задачи возбуждения линзы Люнеберга получено в исходной работе Р. К. Люнеберга [5]; она, вместе с классическими руководствами по возбуждению электромагнитных волн в ограниченных областях [85; 86], предоставляет фундаментальные методы анализа, пригодные для широкого круга излучающих структур.

Классическая **линза Люнеберга (ЛЛ)** является сферически симметричной конструкцией, показатель преломления материала которой меняется по закону (1.1) [5]:

$$n(r) = \sqrt{\varepsilon'(r)} = \sqrt{2 - (r/a)^2} = \sqrt{2 - \tilde{r}^2} \quad (1.1)$$

где: ε' — относительная диэлектрическая проницаемость материала линзы в точке r ;

r — радиальная координата в сферической системе координат;

a — внешний радиус линзы, и $\tilde{r}$ — нормированный радиус линзы.

Траектория лучей в линзе Лüneберга показана на рисунке 1.1. Для наглядности изображены лучи только в верхней полусфере.

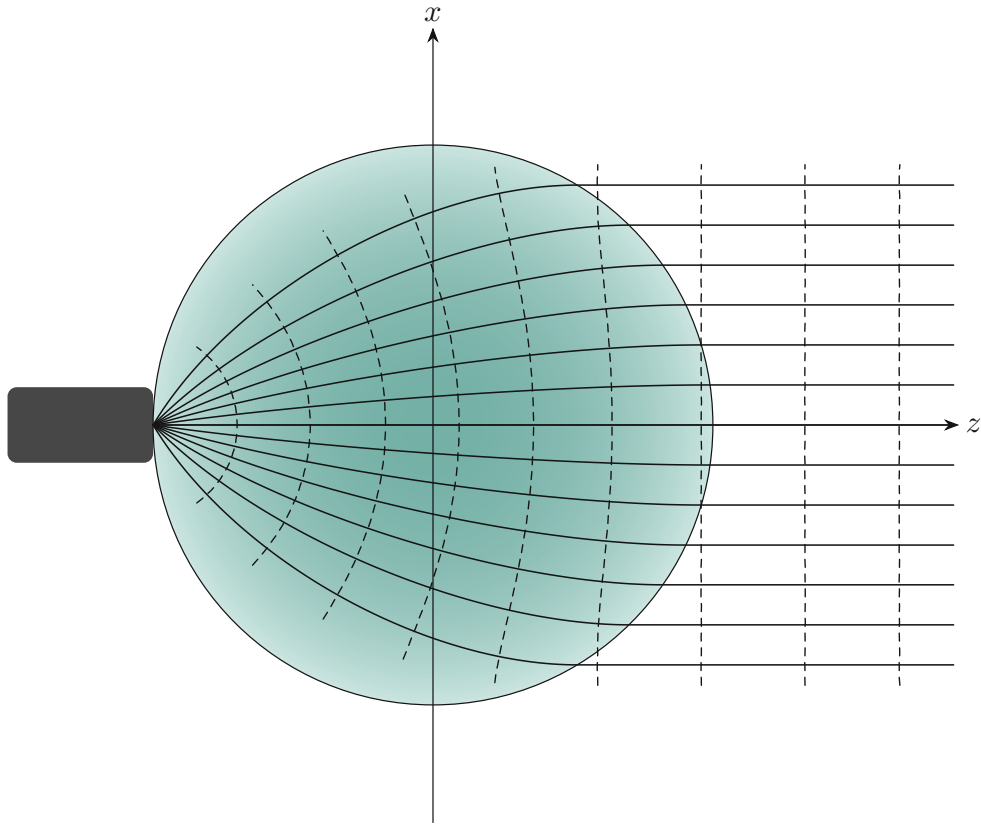


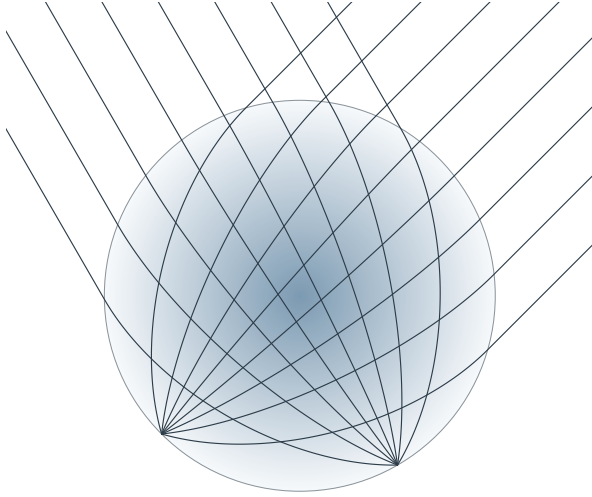
Рисунок 1.1 — Траектория лучей в линзе Лüneберга

Также в [7] было отмечено, что, если линзу выполнить по закону (1.1) в виде цилиндра, то она будет фокусировать параллельный набор лучей в линию, расположенную по образующей цилиндра. В оптическом диапазоне цилиндрические линзы Лüneберга используются для коллимации света лазерных диодов.

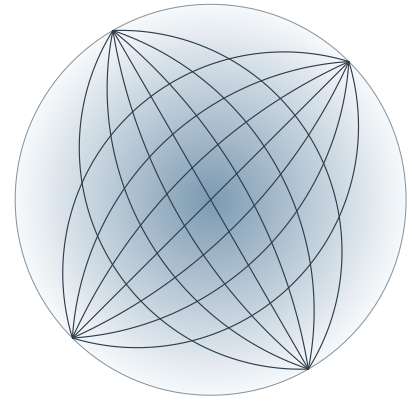
Можно отметить, что линза Лüneберга является частным случаем линзы Максвелла, показатель преломления которой меняется по закону (1.2) и позволяет фокусировать каждую точку на сферической поверхности радиуса R в противоположную точку на той же поверхности. Пути лучей внутри линзы при этом представляют собой дуги окружностей.

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + (r/R)^2} \quad (1.2)$$

Для наглядности имеет смысл привести изображения хода лучей (см. рисунок 1.2) в линзах Люнеберга и Максвелла. Цветовым градиентом на рисунках показано изменение коэффициента преломления (для ЛЛ $n(r)$ меняется от $\sqrt{2}$ в центре до 1 на поверхности).



а) линза Люнеберга



б) линза Максвелла

Рисунок 1.2 — Изображение хода лучей в линзах Люнеберга и Максвелла

Задача электромагнитного возбуждения сферических тел имеет более чем вековую историю, предшествующую появлению линз Люнеберга. Совокупность этих работ естественно разделяется на несколько этапов.

На первом этапе появились работы по дифракции волн как частного случая электромагнитного возбуждения. Эти работы преимущественно связаны с именами Релея [99] и Ми [100]. Учёными решалась задача дифракции плоской электромагнитной волны линейной поляризации на проводящей сфере электрического радиуса $k_0 a = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a$, где a — радиус сферы. Были отмечены основные особенности явления дифракции, а именно — эквивалентность поля рассеяния для малых сфер излучению мультидиполей. Для больших сфер — формирование излучения *вперёд*, в область тени, из-за токов, текущих по поверхности сферы. В дальнейшем в технической литературе за этими коэффициентами закрепилось название коэффициентов Ми. Вычитание падающего поля, разложенного по сферическим гармоникам, позволило выделить только рассеянную составляющую.

На втором этапе более общие решения были изложены в монографиях [101—103]. Сделана попытка решения задачи дифракции на сферах с конечной проводимостью. Появились работы по техническому применению дифракции на сферических телах и практическому применению результатов. Для малых сфер это связано с учётом влияния капель дождя и тумана на прохождение и распространение электромагнитных волн. Для больших радиусов получены некоторые применения к проблеме распространения волн вдоль земной поверхности. Результаты расчётов дифракции электромагнитных волн на малых сферах из редкоземельных элементов были использованы для извлечения минералов из растворов и смесей.

На третьем этапе модификациям подверглись рассеивающие тела: проводящая сфера с покрытием [104], дифракция на диэлектрической оболочке, дифракция на сферических телах, содержащих метаматериалы [105] и др. Расширились области применения сферических структур в технике: приближение к выпуклым телам летательных аппаратов, диэлектрические обтекатели, регулирование коэффициентов рассеяния от тел с укрытиями. Антенные задачи получили развитие в связи с использованием выпуклых, сферообразных тел в качестве летательных аппаратов [106].

Дополнительное развитие использования сферических тел началось после первых публикаций Р.К. Люнеберга об электромагнитном возбуждении неоднородной по коэффициенту преломления диэлектрической сферы [5]. При решении задачи возбуждения в квазиоптическом приближении были определены две фокальные точки линзы Люнеберга, что позволило решить задачу преобразования сферического фронта волны источника (фокальная точка на поверхности неоднородной сферы) в плоский фронт волны на теневой стороне линзы. Эти преобразования хода лучей в линзе позволили строить новый тип направленных антенн наряду с зеркальными антеннами.

Технически получить непрерывное распределение коэффициента преломления внутри линзы Люнеберга достаточно сложно, что привело к её многослойной диэлектрической реализации: электрофизические параметры слоёв подбираются так, чтобы обеспечить хорошее приближение к требуемому закону (1.1). В теоретическом плане было отмечено появление исследовательских работ и публикаций по определению антенных и дифракционных характеристик в сантиметровом, миллиметровом и дециметровом диапазонах волн. При этом использовались различные методы решения электродинамиче-

ских задач: метод сшивания тангенциальных составляющих полей на границах слоёв [104], метод сшивания типов волн [25], также широко используются пакеты программ электродинамического моделирования. Появились работы по оптимизации разделения сферы на разновеликие слои с различными электрофизическими параметрами [26; 107].

В последние годы интерес к линзовым антеннам резко возрос: освоение миллиметрового диапазона (до 100 ГГц) сетями пятого поколения, появление материалов с заданной диэлектрической проницаемостью и распространение аддитивных технологий 3D-печати создали условия для массового применения многослойных градиентно-диэлектрических структур. Это делает разработку новых точных и вычислительно эффективных методов расчёта линз Люнеберга актуальной задачей; примером работ, в которых тема развивается ведущими научными коллективами в нашей стране и за рубежом, могут служить [25; 26; 107–112].

Темпы развития тематики наглядно отражает библиометрическая статистика. В базе *IEEE Xplore* за 1944–2024 гг. зарегистрировано свыше 2100 публикаций по ключевым словам *Luneburg/Luneberg Lens*, причём более половины из них приходится на пятилетие 2020–2024 (десятикратный рост относительно 2010–2014 гг.). Число патентов на конструкции ЛЛ и устройства на их основе в базах *patents.google.com* и *worldwide.espacenet.com* превысило 3300 и 2500 записей соответственно; основные патентообладатели — США, ФРГ, Япония, Франция, Великобритания, Российская Федерация и Китай. Полные распределения публикаций и патентов по годам, а также карта распределения патентов по странам приведены в приложении Б.5; они подтверждают переход тематики от стадии теоретических исследований к стадии массовых инженерных решений и обосновывают практическую значимость развиваемых в настоящей диссертации методов синтеза и анализа.

1.3 Линзы Люнеберга. Основные свойства

ЛЛ преобразует падающий фронт электромагнитной (ЭМ) волны в плоский, работая как высоконаправленная антенна. Впервые свойства такой линзы были описаны немецким математиком Р. К. Люнебергом применительно к оптике. Согласно полученному им закону [5], который можно упрощённо записать как $\varepsilon(r) = 2 - r^2$, материал сферы линзы должен менять показатель преломле-

ния от $\varepsilon(r) = 2$ в центре до $\varepsilon(r) = 1$ на поверхности. Большинство пластиков, используемых при 3D-печати, имеют диэлектрическую проницаемость, несколько превышающую $\varepsilon = 2$. Например, для ABS-пластика $\varepsilon = 2,45$, что позволяет синтезировать линзу из этих материалов с различной степенью перфорации [113].

Практическая реализация антенн на базе ЛЛ производится в виде многослойной сферической структуры, показатель преломления слоёв при этом приближается к закону (1.1). Главное преимущество — широкоугольное сканирование при неподвижном корпусе линзы. Сканирование луча может производиться путём перемещения слабонаправленных облучателей по внешней поверхности линзы.

Интерес к таким антеннам постоянно растёт. Он обусловлен возможностью создания многолучевых антенных систем, обладающих высокими значениями коэффициента направленного действия и низким уровнем боковых лепестков, а также простотой получения большого числа независимо сканирующих лучей в широком секторе обзора. В настоящее время благодаря прогрессу в области материаловедения разработаны различные типы ЛЛ (сферические, полусферические, цилиндрические, плоские, трёхмерно-трансформированные), а также способы и средства их технической реализации [114]. В связи с низкой стоимостью и широкой распространённостью технологий 3D-печати изготовление антенн на базе ЛЛ перестаёт быть сложной задачей. Такие антенны в ближайшие несколько лет найдут широкое применение не только в специализированных и экспериментальных системах, но и в устройствах гражданского и военного назначения в самых разных областях: системах связи, радиолокации, навигации, системах управления беспилотного транспорта и т. д. [115].

1.4 Электродинамическое моделирование линзы Люнеберга при равношаговой аппроксимации

Моделирование линзы Люнеберга в HFSS (High Frequency Structure Simulation) или CST Microwave Studio — стандартный подход, применяемый во многих лабораториях [116; 117]. В настоящем разделе рассмотрены граничные условия и приёмы снижения расхода оперативной памяти при FEM-моделировании, а также смоделирована задача дифракции на многослойной сфере переменного диаметра. Высокие требования к вычислительным ресурсам, вы-

явленные ниже, служат обоснованием перехода к аналитическим методам анализа. При этом плоская электромагнитная волна падает на сферическое тело из дальней зоны в направлении оси Oz . Геометрия задачи изображена на рисунке 1.3 с фрагментом окна 3D-моделера Ansys Electronics Desktop (HFSS Design).

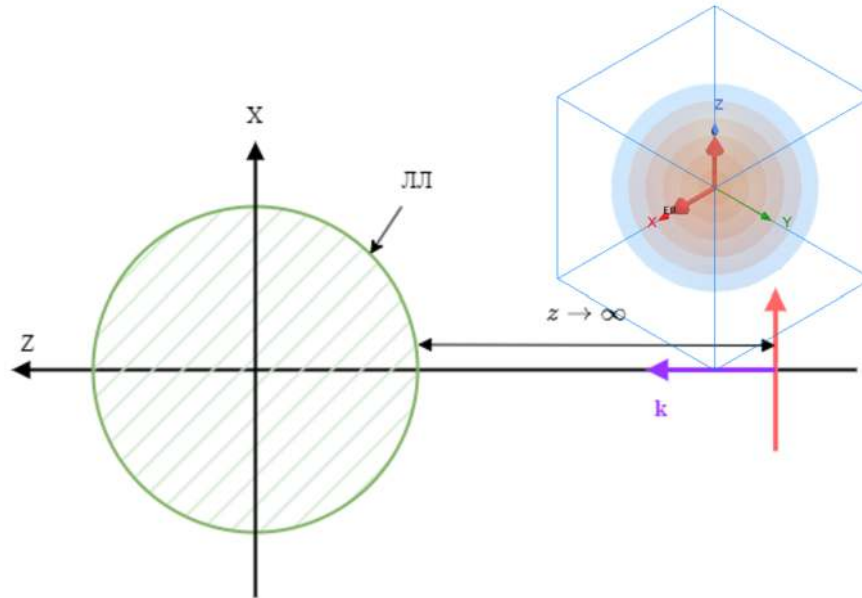


Рисунок 1.3 — Геометрия задачи с падением плоской электромагнитной волны на ЛЛ

Для анализа влияния диаметра ЛЛ на расходы памяти применяется шестислойная модель линзы, где шестой слой — воздух. Значения диэлектрической проницаемости линзы изменяются ступенчато от слоя к слою, аппроксимируя закон Люнеберга: $\epsilon_1 = 1,972$; $\epsilon_2 = 1,889$; $\epsilon_3 = 1,75$; $\epsilon_4 = 1,556$; $\epsilon_5 = 1,306$; $\epsilon_6 = 1,06$ (воздушный слой). Указанным слоям с заданной диэлектрической проницаемостью соответствуют следующие нормированные радиусы: $R_1 = 0,167$; $R_2 = 0,333$; $R_3 = 0,5$; $R_4 = 0,667$; $R_5 = 0,833$; $R_6 = 1$. Таким образом, параметры линзы получены из закона Люнеберга путём равномерного разбиения по радиусу; в дальнейшем такой способ разделения линзы на слои будем называть равношаговой аппроксимацией.

В проекте HFSS Design геометрия ЛЛ окружена кубической областью с граничным условием ($\Gamma У$) на излучение Radiation¹. Так как последний воздушный слой также участвует в фокусировке, следует учитывать его размеры

¹Граничные условия на излучение (Radiation Boundary Conditions) в Ansys HFSS выполняют роль определения того, как электромагнитные волны распространяются вне геометрической области модели. При стандартной постановке задачи в HFSS, геометрические объекты окружает идеальный проводник (белая область вокруг геометрии). Помещение объекта моделирования в область Radiation позволяет создать вокруг него эффект бесконечного пространства с параметрами материалов вакуума, воздуха и т. д. Материал области Radiation может быть выбран как и для любого

при создании граничного условия Radiation. Для получения корректных результатов поверхности куба с граничным условием должны отступать от шестого воздушного слоя не менее чем на четверть длины волны. Источником излучения является плоская электромагнитная волна, ориентированная в соответствии с рисунком 1.3.

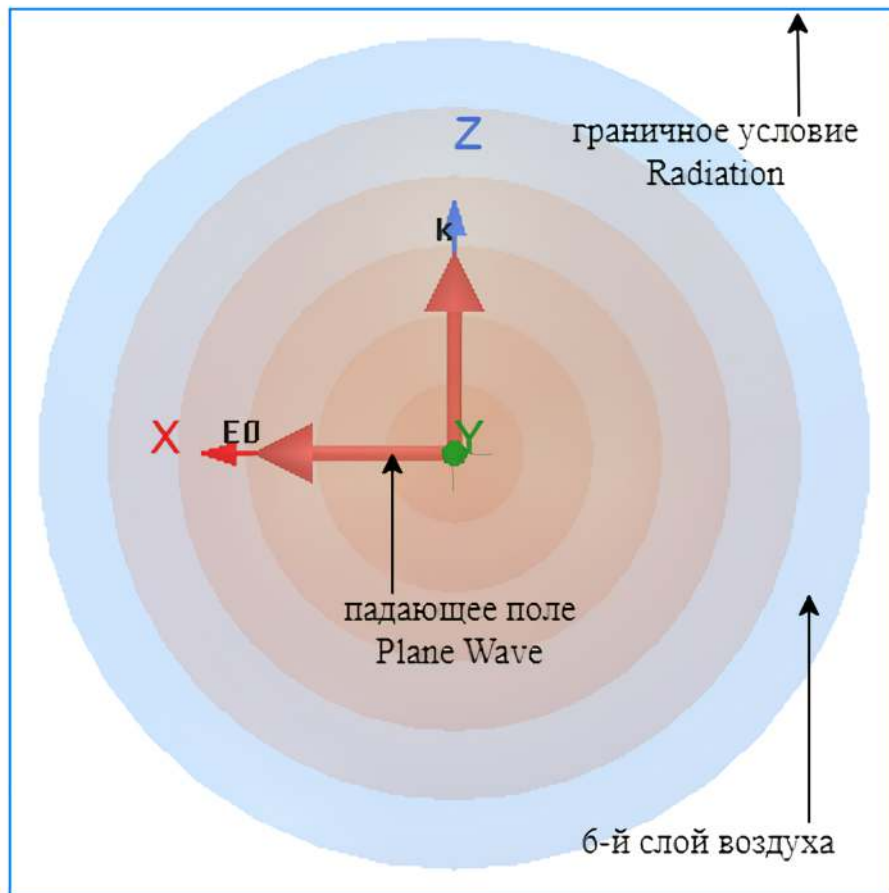
В примере из этого раздела 1.4 моделирование проводилось на компьютере 12th Gen Intel(R) Core (TM) i7-12700K 3.60 GHz, Kingston KF552C40BBK2-64 DDR5 — 2×32 Gb 5200. Расчёты в HFSS критичны к объёму оперативной памяти. Если ресурсов оперативной памяти будет недостаточно для построения сеточной модели, возникнет ошибка *SYSTEM_OUT_OF_MEMORY*. При решении задачи моделирования многослойной ЛЛ подобная ошибка возникала на линзах диаметра $D > 12\lambda$ (для области Radiation в виде куба) и $D > 16\lambda$ (для области Radiation в виде сферы), где λ — длина волны. В этом случае приходилось прибегать к некоторому упрощению модели, а именно применять граничные условия симметрирования и задавать менее ресурсозатратную область Radiation с точки зрения геометрии.

Для наглядности на рисунке 1.4 приведена геометрия задачи в окне 3D-моделера HFSS Design, соответствующая трём постановкам задачи: в классической постановке (геометрия, окружённая кубической областью Radiation) (1.4a); с применением граничного условия симметрирования (1.4б); с граничным условием симметрирования и сферической областью Radiation (1.4в).

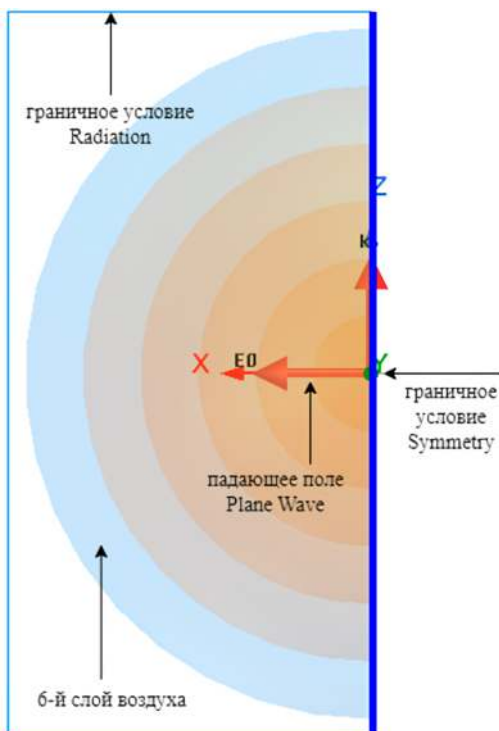
В таблице 2 указаны настройки проекта с учётом области симметрирования и без неё, приведены значения возрастающей вычислительной сложности, соответствующие росту диаметра D ЛЛ. Линза диаметром менее 12 длин волн рассчитывается методом конечных элементов в едином объёме. Для $D = 14\lambda, 16\lambda$ применяется граничное условие с симметрированием, а для линз $D = 18\lambda, 20\lambda$ используется граничное условие Radiation в виде полусферы.

Примечание: D — диаметр линзы в длинах волн λ ; Memory — максимальные затраты оперативной памяти на процесс, MB; Solved Tets — максимальное количество элементов сетки, участвовавших в расчёте, при анализе методом конечных элементов; Matrix Size — размер рассчитываемой матрицы; Real Time — время расчёта задачи.

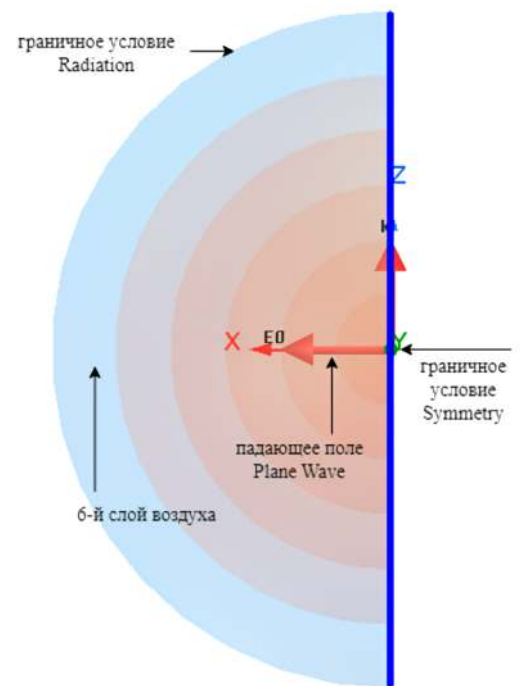
другого объекта. Область Radiation в HFSS не описывается эквивалентной формулой, она является математически сложным граничным условием, в котором применяются специальные численные методы и алгоритмы для обработки электромагнитных полей, описывающие выход излучения за пределы моделируемой области.



а) объёмная модель, окружённая кубическим ГУ Radiation



б) симметричное ГУ Radiation на кубе



в) симметричное ГУ Radiation на сфере

Рисунок 1.4 — Модель линзы Люнеберга в HFSS

Таблица 2 — Зависимость затрат вычислительных ресурсов от D ЛЛ

D, λ	Memory, Mb	Solved Tets	Matrix Size	Real Time
Классическая постановка задачи				
0,25	806	13 016	83 450	00:00:07
0,5	895	13 555	87 414	00:00:08
1	953	14 720	94 900	00:00:09
2	1 020	15 655	101 302	00:00:15
4	2 680	31 420	204 552	00:00:16
6	8 030	78 537	508 690	00:03:39
8	24 200	187 501	1 206 964	00:14:20
10	48 200	328 144	2 107 636	00:31:49
12	50 900	534 505	3 427 348	00:50:51
Расчет с применением ГУ симметрирования				
14	47 900	489 674	3 116 070	00:24:43
16	53 800	655 541	4 172 044	00:57:34
Расчет с применением ГУ симметрирования и сферической областью Radiation				
18	51 000	507 715	3 226 986	00:53:08
20	49 500	799 933	5 076 930	01:35:29

Рассмотрим параметры ЛЛ в режиме дифракции, что позволяет оценить предельные электродинамические свойства сферической структуры без каких-либо мешающих конструкций. В такой постановке задачи полезно оценить линзы малого диаметра. На рисунке 1.5 приведены картины поля и диаграммы рассеяния для ЛЛ диаметров $D = 0,25\lambda$ (1.5а); $D = 0,5\lambda$ (1.5б) и $D = 1\lambda$ (1.5в). При малом диаметре, соизмеримом с длиной волны, влияние анизотропии слоёв на падающее электромагнитное поле незначительно. Полученные поля во многом схожи с результатами дифракции электромагнитных полей на однородных сферах.

На рисунке 1.6 приведены картины поля и диаграммы рассеяния для ЛЛ диаметров $D = 2\lambda$ (1.6а); $D = 4\lambda$ (1.6б); $D = 6\lambda$ (1.6в) и $D = 12\lambda$ (1.6г). Для указанных размеров наблюдается равномерное формирование фокуса в двух плоскостях. Полученные картины поля представлены для визуальной оценки степени влияния диаметра ЛЛ на возможности фокусировки электромагнитного поля. Для количественной оценки результатов на рисунке 1.7 показан график усиления поля E в направлении $\theta = 0$ для задачи рассеяния. Кривыми на графике показаны линзы с различным количеством слоёв, параметры которых приводятся в таблице 3.

Таблица 3 — Параметры слоёв ЛЛ при равношаговой аппроксимации

Количество слоёв — L	Нормированные радиусы слоёв — a	Диэлектрическая проницаемость — ϵ
2	0,5, 1	2, 1
3	0,333, 0,667, 1	1,889, 1,556, 1
4	0,25, 0,5, 0,75, 1	1,94, 1,75, 1,44, 1
5	0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1	1,96, 1,84, 1,64, 1,36, 1
6	0,167, 0,333, 0,5, 0,667, 0,833, 1	1,972, 1,889, 1,75, 1,556, 1,306, 1
7	0,143, 0,286, 0,429, 0,571, 0,714, 0,857, 1	1,98, 1,918, 1,816, 1,673, 1,49, 1,265, 1
8	0,125, 0,25, 0,375, 0,5, 0,625, 0,75, 0,875, 1	1,98, 1,94, 1,86, 1,75, 1,61, 1,44, 1,23, 1
9	0,111, 0,222, 0,333, 0,444, 0,556, 0,667, 0,778, 0,889, 1	1,988, 1,951, 1,889, 1,802, 1,691, 1,556, 1,395, 1,21, 1
10	0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1	2, 1,96, 1,91, 1,84, 1,75, 1,64, 1,51, 1,36, 1,19, 1
11	0,09, 0,18, 0,27, 0,36, 0,45, 0,54, 0,63, 0,72, 0,81, 0,9, 1	1,99, 1,97, 1,93, 1,87, 1,8, 1,71, 1,6, 1,48, 1,34, 1,19, 1
12	0,083, 0,166, 0,249, 0,332, 0,415, 0,498, 0,581, 0,664, 0,747, 0,83, 0,913, 1	1,99, 1,97, 1,94, 1,89, 1,83, 1,75, 1,66, 1,56, 1,44, 1,31, 1,17, 1
16	0,062, 0,124, 0,186, 0,248, 0,31, 0,372, 0,434, 0,496, 0,558, 0,62, 0,682, 0,744, 0,806, 0,868, 0,93, 1	2, 1,98, 1,97, 1,94, 1,9, 1,86, 1,81, 1,75, 1,69, 1,62, 1,53, 1,45, 1,35, 1,25, 1,14, 1
20	0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,25, 0,3, 0,35, 0,4, 0,45, 0,5, 0,55, 0,6, 0,65, 0,7, 0,75, 0,8, 0,85, 0,9, 0,95, 1	2, 1,99, 1,98, 1,96, 1,94, 1,91, 1,88, 1,84, 1,8, 1,75, 1,7, 1,64, 1,58, 1,51, 1,44, 1,36, 1,28, 1,19, 1,1, 1
<i>Примечание:</i> *в качестве последнего слоя указан воздух; **цветом выделены слои, для которых построены графики на рисунке 1.7		

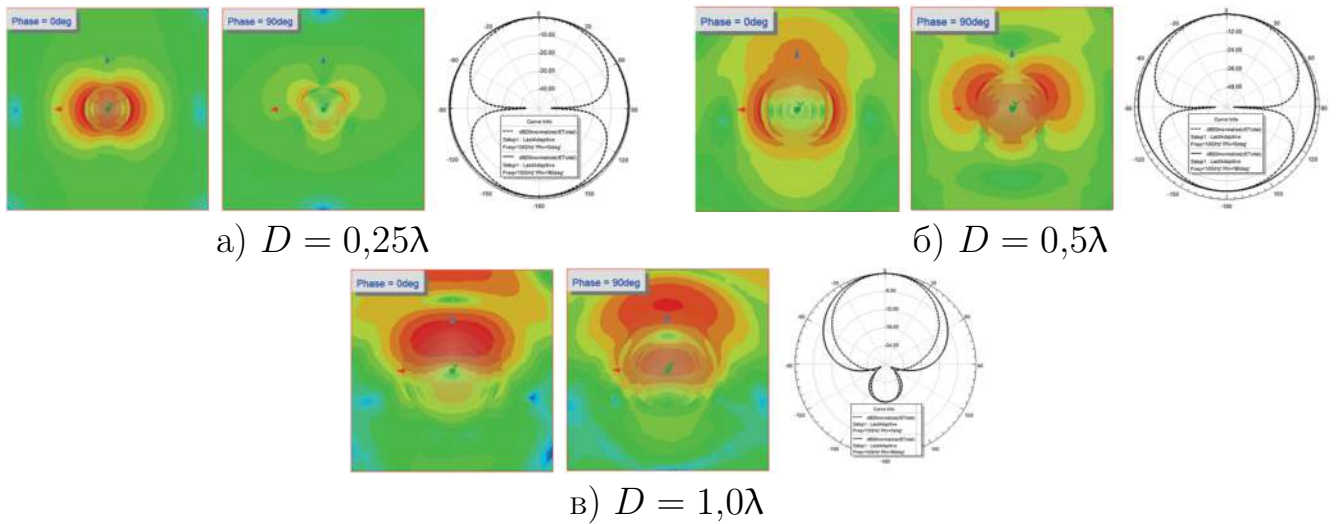


Рисунок 1.5 — Поля и диаграммы рассеяния для ЛЛ диаметром до 1λ

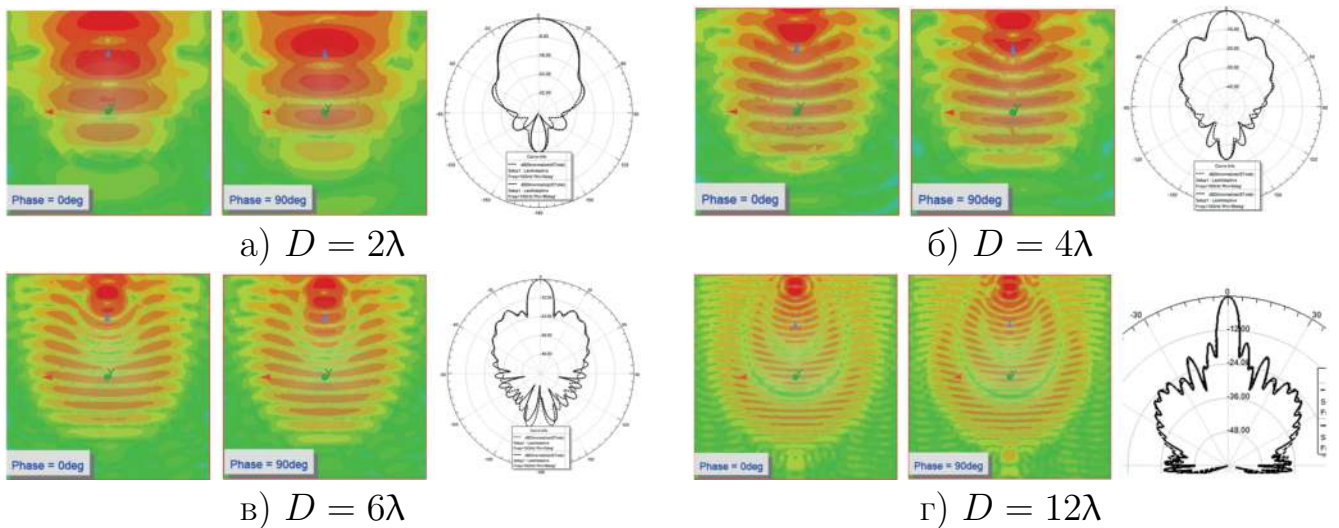


Рисунок 1.6 — Поля и диаграммы рассеяния ЛЛ для $D = 2\lambda, 4\lambda, 6\lambda, 12\lambda$

На примере серии графиков на рисунке 1.7 выделим некоторые моменты, которые важно учитывать при изготовлении линз:

- ЛЛ переходит в режим усиления падающего электромагнитного излучения, начиная с диаметра $D \approx 7,5\lambda$.

- Биения на графике объясняются переотражением волн на границах раздела диэлектрика, из которого собраны слои. Для линз с небольшим количеством слоёв неравномерность поля в структуре линзы оказывает более сильное влияние, что хорошо заметно на примере трёхслойной линзы.

- Разбиение линзы на количество слоёв свыше 20 практически не влияет на электромагнитные свойства ЛЛ. На рисунке 1.7 показан пример, при котором разница в количестве 12–20 слоёв приводит к отличиям в мощности излучения не более чем на 2–3 % во всем рассматриваемом диапазоне длин волн.

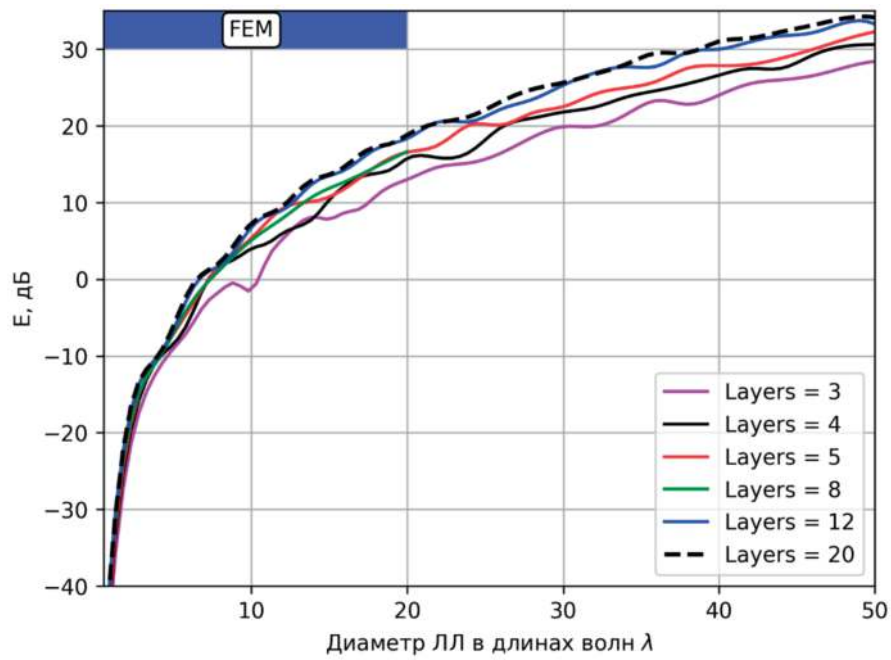


Рисунок 1.7 — Усиление ЭМ поля линзой в направлении $E_0 = 0$ для различного электрического диаметра и количества слоёв ЛЛ

Таблица 2 позволяет оценить расходы памяти при проектировании ЛЛ и выбрать конфигурацию вычислительной системы для конкретной задачи.

1.5 Способы аппроксимации линзы Люнеберга

Основным недостатком линзы являются технические трудности в реализации требуемого непрерывного распределения коэффициента рефракции в соответствии с выражением (1.1). Для того чтобы удовлетворять условиям этого закона, линза должна быть изготовлена из неоднородного материала, плотность которого увеличивается от внешнего радиуса сферы к центру. Для этих целей могут использоваться естественные диэлектрики или искусственные замедляющие среды. Например, при изготовлении линзы может использоваться пенополистирол с переменной плотностью.

Профиль линзы определяют геометрико-оптическим подходом (раздел 2.2). Численно вычисленная зависимость $n(r)$ представлена на рисунке 2.4 в виде семейства кривых.

На практике линзы Люнеберга обычно представляют собой слоистые структуры из дискретных концентрических слоёв, каждый из которых имеет свой показатель преломления. Эти слои образуют ступенчатый профиль показателя преломления, который несколько отличается от идеального решения

Люнеберга. Выбор числа слоёв существен для практической реализации, так как с ростом числа слоёв увеличиваются технические трудности и стоимость. Возможны равношаговая и оптимизированная аппроксимации, представленные в таблицах 4, 5 [26].

Таблица 4 — Параметры слоёв при равношаговой аппроксимации профиля ЛЛ

L	Радиусы слоёв	Диэлектрическая проницаемость слоёв ϵ'_l
1	0,5	1,75
2	0,333; 0,667	1,889; 1,556
3	0,25; 0,5; 0,75	1,938; 1,75; 1,438
4	0,2; 0,4; 0,6; 0,8	1,96; 1,84; 1,64; 1,36
5	0,167; 0,333; 0,5; 0,667; 0,833	1,972; 1,889; 1,75; 1,556; 1,306
6	0,143; 0,286; 0,429; 0,571; 0,714; 0,857	1,98; 1,918; 1,816; 1,673; 1,49; 1,265
7	0,125; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875	1,984; 1,938; 1,859; 1,75; 1,609; 1,438; 1,234
8	0,111; 0,222; 0,333; 0,444; 0,556; 0,667; 0,778; 0,889	1,988; 1,951; 1,889; 1,802; 1,691; 1,556; 1,395; 1,21

Таблица 5 — Параметры слоёв при оптимизированной аппроксимации профиля линзы Люнеберга

L	Радиусы слоёв	Диэлектрическая проницаемость слоёв ϵ'_l
1	0,82	1,67
2	0,63, 0,89	1,8, 1,4
3	0,53, 0,75, 0,93	1,86, 1,57, 1,28
4	0,47, 0,67, 0,82, 0,94	1,88, 1,67, 1,44, 1,22
5	0,43, 0,60, 0,74, 0,85, 0,95	1,91, 1,73, 1,55, 1,36, 1,18
6	0,39, 0,56, 0,68, 0,78, 0,88, 0,96	1,93, 1,77, 1,61, 1,46, 1,31, 1,16
7	0,37, 0,52, 0,63, 0,73, 0,82, 0,89, 0,97	1,93, 1,80, 1,67, 1,53, 1,40, 1,27, 1,13
8	0,34, 0,49, 0,59, 0,69, 0,77, 0,84, 0,91, 0,97	1,94, 1,82, 1,71, 1,59, 1,47, 1,35, 1,24, 1,12

1.6 Применение линз Люнеберга в радиотехнических приложениях

Линзы Люнеберга используются в антенных и радарных системах для фокусировки, усиления и управления электромагнитными волнами. Рассмотрим

примеры практического применения.

1.6.1 Применение в системах сотовой связи

Показательным примером коммерческой реализации ЛЛ в сотовой связи служит компания *MatSing* (Сингапур, осн. 2005 г.) [118], специализирующаяся на радиочастотных линзах из запатентованного метаматериала. Флагманский продукт — сферические многолучевые антенны для операторов сотовой связи с выдающимися характеристиками ёмкости сети (рисунок 1.8).

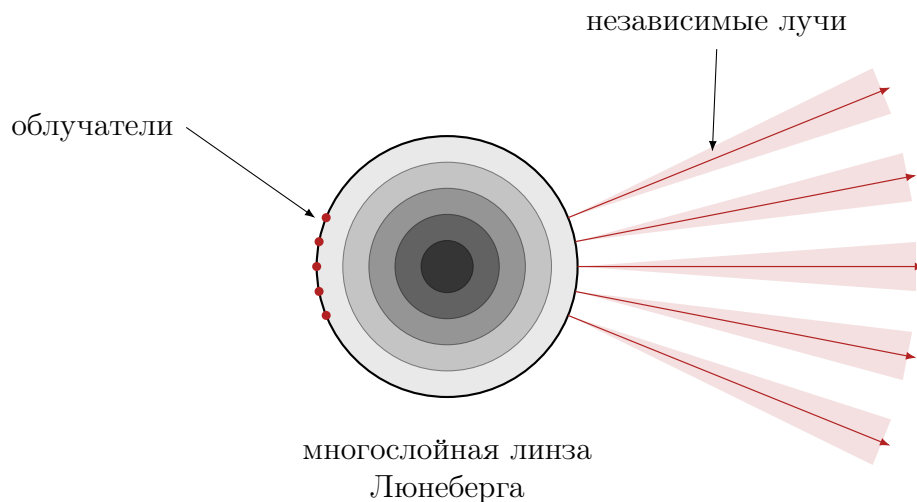


Рисунок 1.8 — Многолучевая базовая станция с линзой Люнеберга

Продукция компании *MatSing* уже широко применяется на различных мероприятиях (концертах, фестивалях), в жилых районах с уплотнительной застройкой, на стадионах и в прочих местах массового скопления людей в США и Европе. Результаты использования таких антенн: 10-кратная ёмкость сети по сравнению с классическими антенными решениями, десятки терабайт данных, переданные по сотовой сети за сутки. Антенны *MatSing* на базе линз Люнеберга интегрированы в беспроводные сети ведущих мировых сотовых операторов: AT&T, Verizon, Vodafone и др. [118].

Антенны на базе ЛЛ лишены частотной дисперсии диаграммы направленности — недостатка, присущего широкополосным панельным антеннам. Ниже показаны характеристики и описание некоторых моделей антенн базовых станций с линзой Люнеберга фирмы *MatSing* (см. таблицу 6).

Таблица 6 — Модели антенн сотовой связи на базе ЛЛ и их характеристики

Диаметр ЛЛ, см	Модель	Описание
120	MS-8H120	8 лучей верхнего диапазона 1,8 ГГц
120	MS-8.4DB120	8 лучей верхнего диапазона 1,8 ГГц, 4 луча нижнего диапазона 0,85 ГГц
180	MS-12H180	12 лучей верхнего диапазона 1,8 ГГц
180	MS-12.6DB180	12 лучей верхнего диапазона 1,8 ГГц, 6 лучей нижнего диапазона 0,85 ГГц
60	MS-4H60	4 луча верхнего диапазона 1,8 ГГц
60	MS-4.2DB60	4 луча верхнего диапазона 1,8 ГГц, 2 луча нижнего диапазона 0,85 ГГц
90	MS-6.3DB90	6 лучей верхнего диапазона 1,8 ГГц, 3 луча нижнего диапазона 0,85 ГГц, удалённое регулирование угла наклона
90	MS-6H90	6 лучей верхнего диапазона 1,8 ГГц
90	MS-9H90-FWB2.3	9 лучей верхнего диапазона 2,3–2,4 ГГц
35	MS-MBA-8	4 сферы в общем корпусе-стойке, 3 луча верхнего диапазона 1,8 ГГц
35	MS-MBA-2	1 сфера в корпусе, 3 луча верхнего диапазона 1,8 ГГц

1.6.2 Применение в системах подвижной связи

ЛЛ применяются в радиолокации, наземной и космической связи наравне с параболическими зеркальными антеннами; основное их преимущество — широкоугольное сканирование и одновременное формирование нескольких лучей диаграммы направленности.

В настоящее время наиболее перспективным направлением применения линз Люнеберга является организация связи по произвольным направлениям в пространстве. Таким образом, возможен вариант применения ЛЛ при работе в многоканальных системах связи [31].

В отличие от параболических систем, где каждый спутник требует отдельной антенны с механическим приводом, ЛЛ обслуживает весь угловой сектор при перемещении лишь слабонаправленного облучателя по её поверхности — одна линза заменяет парк параболических антенн.

Помимо этого, ЛЛ эффективно могут быть использованы в подвижных терминалах связи, когда взаимное расположение передатчика и приёмника со временем меняется, и необходимо организовать систему сопровождения абонента. Полноповоротная параболическая антенна терминала спутниковой связи, установленная на автомобиле, может быть заменена линзовой полусферой.

ЛЛ при этом остаётся неподвижной: управление диаграммой направленности осуществляется перемещением первичного облучателя по её поверхности, тогда как параболическая антенна требует дорогостоящего механизма поворота крупного зеркала.

В настоящее время на мировом рынке представлены варианты гражданского применения линз Люнеберга, устанавливаемых на крышах автомобилей для организации стабильного телевизионного сигнала по спутниковому радиоканалу.

На практике линзы Люнеберга используют в качестве спутниковых антенн на поездах. При высокой скорости движения линза обеспечивает плавное сопровождение передающей станции и стабильную передачу сигнала.

Таким образом, благодаря возможности широкоугольного сканирования и способности формировать многолучевые диаграммы направленности ЛЛ может быть использована в различных областях техники, таких как системы радиосвязи, радары, астрономия и так далее. Спутниковые системы с использованием ЛЛ могут размещаться на суше, на борту корабля и фюзеляже самолёта. Та-

кие антенны должны обеспечивать широкоугольное сканирование и сохранять высокий коэффициент усиления во всём рабочем диапазоне углов — этим условиям антенны на базе ЛЛ удовлетворяют в полной мере.

1.6.3 Применение на летательных аппаратах

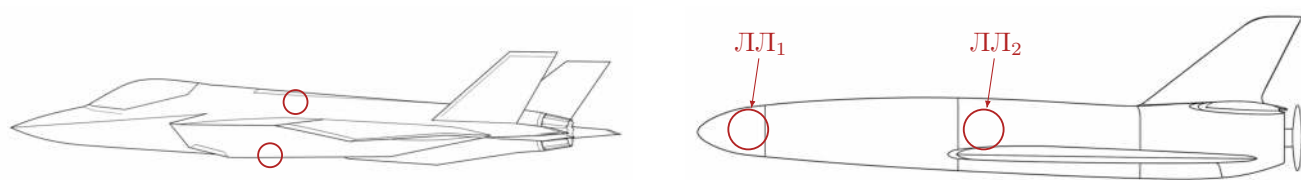
ЛЛ может применяться в качестве многолучевой антенны в СВЧ-системах картографирования — на борту спутников для дистанционного зондирования подстилающей поверхности, в задачах прогнозирования ледовой обстановки в Арктике, оценки влажности почвы и мониторинга лесных пожаров. Линза успешно используется и в системах спутникового слежения, где взаимное расположение спутника и пользователя непрерывно меняется.

Благодаря сферически-симметричной конструкции ЛЛ пригодна для размещения на наземных объектах, на борту корабля, в фюзеляже самолёта и т. д. Такие антенны обеспечивают широкоугольное сканирование с сохранением высокого коэффициента усиления во всём рабочем диапазоне углов; они обладают малым аэродинамическим сопротивлением и отвечают эргономическим требованиям. Также известны разработки по применению ЛЛ в системах измерения скорости и направления ветра.

1.6.4 Применение в качестве радиолокационных отражателей

Часть поверхности линзы может быть покрыта токопроводящим материалом, например путём металлизации отдельных частей поверхности сферы. В этом случае ЛЛ может быть использована как переизлучатель или мишень. Радиолокационные отражатели на базе линз Люнеберга устанавливают на военные самолеты или ракеты-мишени, чтобы сделать их более заметными на время учений, или модифицировать истинную радиолокационную сигнатуру летательных аппаратов. Преимущество отражателей на базе линзы Люнеберга в отличие от отражателей других типов заключается в том, что сферическая форма линзы обладает умеренными аэродинамическими характеристиками и может быть смонтирована в фюзеляж самолёта (рисунок 1.9а). Второй характерный пример — линза в ракете-мишени (рисунок 1.9б).

Практика применения ЛЛ в качестве радиолокационных отражателей на воздушных мишенях показывает высокую эффективность увеличения ЭПР.



а) ЛЛ на истребителе F-35

б) Размещение ЛЛ в ракете-мишени Banshee

Рисунок 1.9 — Линза Люнеберга как радиолокационный отражатель на летательных аппаратах

Например, ЛЛ устанавливается на комплекс E95, который предназначен для обеспечения боевой подготовки войск и отработки (испытаний) средств ПВО. Мишень E95М является имитатором маневренных целей типа ДПЛА, планирующих управляемых авиабомб, крылатых ракет и частично самолётов и вертолетов тактической и армейской авиации. Линза Люнеберга в составе мишени E95М используется как полезная нагрузка, увеличивающая эффективную поверхность рассеивания (ЭПР) объекта на полтора–два порядка: собственная ЭПР малоразмерной мишени составляет десятые доли квадратного метра, тогда как с установленным линзовым отражателем достигает единиц квадратных метров. Эффективность работы таких систем обсуждалась автором представленной диссертационной работы на форуме Армия 2019 [119].

К этому же классу изделий относится отечественная разработка — комплекс воздушных мишеней, создаваемый по ОКР «Соната» в ОАО «Лётные испытания и производство имени В.С. Гризодубовой» (г. Жуковский). Профиль предприятия — разработка, изготовление и применение средств полигонных измерений и радиоуправления для отработки, доводки и испытаний высокоманевренных, высокоскоростных и высокодинамичных объектов [120]. Мишень комплекса выполнена как многоразовая крылатая ракета-мишень с турбореактивным двигателем и имитирует дозвуковые аэродинамические цели — беспилотные летательные аппараты различных классов, крылатые ракеты и дозвуковые самолёты — в характерном для целей этих классов диапазоне высот и дозвуковых скоростей полёта.

Конструктивно линзовый отражатель размещают в носовой части изделия (рисунок 1.10). Носовой обтекатель радиопрозрачен и свободен от силовых элементов конструкции, а такое положение даёт линзе наибольший неэкранированный телесный угол переизлучения в передней полусфере — именно

там, где мишень наблюдается радиолокатором на встречном курсе. Отражатель при этом остаётся полностью пассивным: требуемый уровень ЭПР обеспечивается без затрат энергии на борту и без активных ретрансляторов, что принципиально для малогабаритного изделия одноразового применения.

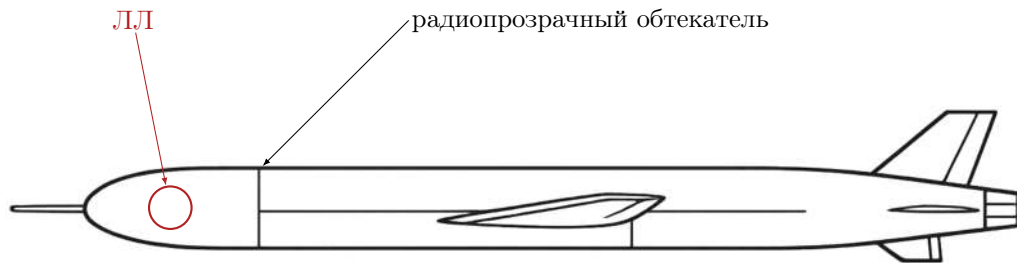


Рисунок 1.10 — Размещение линзы Лунеберга в носовой части ракеты-мишени: линза работает пассивным ЭПР-маркером, увеличивая эффективную площадь рассеяния изделия без затрат энергии на борту

Помимо имитации воздушных целей, линзовые отражатели применяются и в сугубо измерительных приложениях гражданского характера. Благодаря стабильной и слабо зависящей от ракурса эффективной площади рассеяния линза Лунеберга с металлизированным сегментом служит *эталонным отражателем* при калибровке радиолокационных измерителей: по ней выставляют и контролируют погрешность измерения ЭПР как в наземных, так и в воздушных сценариях калибровки [121]. Это делает линзовые отражатели штатным инструментом полигонных измерений — при аттестации измерительных трасс, юстировке радиолокационных станций и отработке методик измерения ЭПР, а также при калибровке радиолокационных средств дистанционного зондирования.

Интерес к ЛЛ как радиолокационному отражателю возник в 1950-х годах и сохраняется по настоящее время. Для работы в этом режиме линза частично покрывается отражающим слоем: падающая волна фокусируется на покрытии и переизлучается обратно в направлении источника, при этом ЭПР линзы многократно превышает её физическое поперечное сечение — свойство, обеспечивающее управляемое увеличение радиолокационной заметности объектов.

Схема прохождения лучей через линзу Лунеберга с отражающей поверхностью показана ниже (рисунок 1.11). Особенность ЛЛ заключается в том, что все падающие лучи собираются на теневой стороне и могут быть отражены обратно точно в направлении источника, в отличие от уголковых отражателей, в которых большая часть лучей отражается в произвольных направлениях.

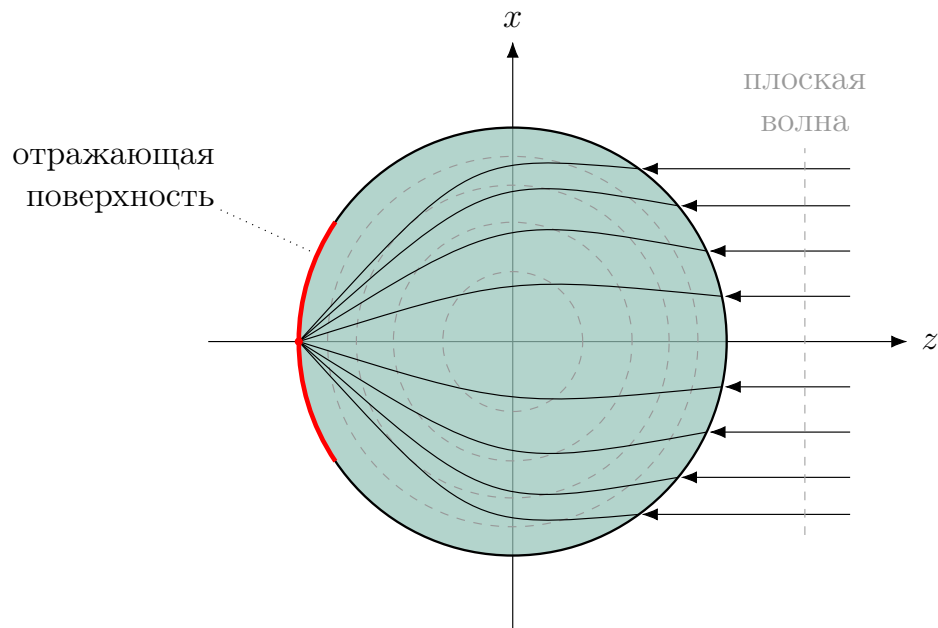


Рисунок 1.11 — Схема прохождения лучей через линзу Люнеберга с отражающей поверхностью в фокальной точке

Линзы Люнеберга по сравнению с угловыми отражателями меньше и легче, имеют меньшее сопротивление и не влияют на аэродинамику. Они также дают лучшие характеристики диаграммы, боковых и задних лепестков. Линзы Люнеберга на самолётах-невидимках обеспечивают мониторинг воздушными и наземными радарами в необходимых случаях — например, при полёте над дружественной территорией или при посадке.

Линза Люнеберга применяется в ракете-мишени *Banshee* как пассивное (не требующее дополнительных затрат энергии) устройство увеличения радиолокационной отражающей способности [122]; её размещение показано на рисунке 1.9б (приведён выше совместно с F-35).

В ракету-мишень *Banshee* устанавливаются линзы Люнеберга с различными техническими характеристиками (для различных требований к заметности и частотам). Обычно устанавливаемые линзы имеют диаметр ≈ 19 см; типовой диапазон изменения диаметра составляет от 10 до 23 см.

Для дальнейшей технической оценки параметров линз имеет смысл привести характеристики ЛЛ, производимых фирмой QinetiQ [122], и устанавливаемых в ракеты-мишени *Banshee* (см. таблицу 7).

Таблица 7 — Характеристики линз Люнеберга QinetiQ для ракеты-мишени Vanshee

Режим работы	Моностатический, лин. полар.	Моностатический, круг. полар.	Бистатический, лин. полар.
Диаметр, см	19	19	22
Вес, кг	1,7	1,7	2,1
Углы обзора, град.	$\pm 50^\circ$ от оси		
ЭПР на оси, м ² , (ГГц)	7 (10 ГГц); 11 (14 ГГц)	6 (9,375 ГГц); 1 (9,375 ГГц)	6 (9,375 ГГц); 1 (9,375 ГГц)

1.6.5 Применение в системах радиопротиводействия

При удалении первичного источника от поверхности ЛЛ переизлучает плоскую электромагнитную волну в заданном направлении, выступая средством радиопротиводействия; благодаря сферической симметрии направление подавления помехи выбирается произвольно. Вспомогательный маломощный облучатель, размещённый на теневой стороне линзы, формирует дополнительный луч для подавления местной или организованной помехи, не совпадающей с направлением штатной диаграммы направленности.

1.6.6 Применение в качестве высоконаправленной антенны

Линза Люнеберга также может быть использована в качестве остроунаправленной антенны. Для этого облучатель с квазиоднаправленным излучением размещается вблизи поверхности линзы с максимумом, ориентированным в её сторону, что обеспечивает высокий коэффициент направленного действия.

Поскольку ЛЛ обладает сферической симметрией, при любом положении облучателя формируется одинаковая диаграмма направленности, которая определяется диаметром ЛЛ и коэффициентом усиления. Используя несколько облучателей по освещённой стороне линзы, можно формировать лучи и осуществлять формирование нескольких диаграмм направленности в разном диапазоне частот. В этом смысле ЛЛ может служить аналогом целого комплекса полноповоротных зеркальных антенн.

Одинаковые по размерам ЛЛ могут объединяться в антенные решётки, поэтому линзу Люнеберга можно рассматривать как альтернативу дорогостоя-

ящим фазированным антенным решёткам. Новые технологии производства, использующие композитные диэлектрические материалы с низкими потерями, в совокупности с современными технологиями проектирования позволяют построить остронаправленные линзовые антенны с высоким коэффициентом усиления. Наиболее амбициозным в этом плане был проект австралийского консорциума для радиотелескопа «The Square Kilometre Array» (SKA): в качестве первичного элемента решётки прорабатывалась сферическая линза Люнеберга, выполняющая функцию широкополосного оптического формирователя луча с возможностью одновременного приёма по многим направлениям [123]. В окончательную конфигурацию SKA этот вариант не вошёл, однако сама проработка показывает масштаб, на который рассчитывался линзовый подход.

В параболических антеннах фидер и поддерживающая его конструкция частично перекрывают раскрыв — возникает так называемая блокировка апертуры. Линзовая антенна Люнеберга, как и другие преломляющие системы, свободна от этого недостатка: излучение проходит через тело линзы, и на пути лучей не размещаются элементы крепления и перемещения облучателя.

Одно из основных преимуществ высоконаправленных антенн на базе ЛЛ заключается в их компактности. Для получения схожих диаграмм с параболической антенной может быть использована ЛЛ с меньшими габаритными размерами. За счет перемещения малого облучателя вдоль поверхности без необходимости вращать конструкцию целиком высоконаправленные антенны на базе линз Люнеберга особенно привлекательны для стационарных радиолокационных систем (РЛС) кругового и секторного обзора.

Показательным отечественным примером служит РЛС *Неман-П*, созданная на полигоне Сары-Шаган и по-прежнему уникальная по своим техническим решениям [124].

Станция предназначалась для обнаружения и сопровождения баллистических целей на дальних рубежах и рассматривалась как вариант стрельбового лоатора ПРО Москвы. Разработка велась в Яузском радиотехническом институте под руководством Ю.Г. Бурлакова (затем — Б.М. Пантелеева); предприятие-разработчик — НИИРП, антенная часть — КБРП им. акад. А.А. Расплетина. Передающая антенна выполнена в виде АФАР из 960 рупоров с усилителями (диаметр апертуры около 5 м); приёмная многолучевая антенна — на основе двух ЛЛ диаметром 7,5 м с матрицами по 512 рупоров, формирующими систему 1024 «вложенных» лучей. Линзы изготовлены из ди-

электрических кирпичей (пенокерамика и пенополистирол) с разным значением ε' , собранных в виде полушарий на общем стальном экране.

Строительство началось на Балхашском полигоне в 1971 году, государственные испытания успешно пройдены в 1980 году. Конкурс на стрельбовый локатор ПРО выиграла станция «Дон», а *Неман-П* стала измерительным полигонным средством: с 1981 по 1991 год она участвовала в сопровождении более 300 пусков баллистических ракет при испытаниях комплексов «Пионер», «Тополь» и системы ПРО А-135. До 2016 года на полигоне Сары-Шаган проводилась модернизация станции с расширением её информационных возможностей.

1.6.7 Применение линз Люнеберга в системах роботизированного зрения

Несмотря на растущее применение антенн на базе ЛЛ в системах 5G и миллиметрового диапазона, их изготовление и интеграция остаются дорогостоящими, что повышает значимость быстрых и достоверных методов расчёта. Сферическая симметрия ЛЛ облегчает её применение в режиме приёма и излучения волн круговой поляризации — с известными преимуществами перед линейной при работе в условиях осадков и при обнаружении нестабилизированных объектов. ЛЛ используются также в доплеровских системах измерения скорости ветра, обеспечивая широкоугольный сбор рассеянного частицами сигнала.

В работе [125] описана система технического зрения для роботов на основе плоской линзы Люнеберга волноводного типа.

Разработка Lunewave (Университет Аризоны) развивает применение ЛЛ в автомобильных системах ADAS/AV и робототехнике [126].

В основе запатентованной технологии Lunewave лежит автомобильный радар на базе ЛЛ, обеспечивающий сплошной обзор в секторе 360° при высоком угловом разрешении — характеристиках, востребованных в системах ADAS и в автономных транспортных средствах. Радар сохраняет детализацию изображения независимо от погодных условий, что повышает устойчивость принимаемых решений при изменении дорожной обстановки. Кроме того, использование одной сферической линзы вместо набора плоских антенных модулей уменьшает количество датчиков, необходимых для кругового обзора, и упрощает компо-

новку на борту транспортного средства.

1.7 Управление электромагнитным полем в объёмных сферически-симметричных структурах: обобщённая постановка

1.7.1 От частного к общему: линза Люнеберга как один из представителей класса градиентных сферических структур

Классическое решение Р.К. Люнеберга [5] было получено для частной оптической задачи: собрать параллельный пучок лучей в точку на противоположной поверхности сферы. За прошедшие восемь десятилетий стало очевидно, что это решение — лишь один из представителей более широкого множества градиентных сферически-симметричных структур. Каждая такая структура реализует свой закон управления волновым фронтом.

К наиболее известным представителям этого класса относятся:

- **линза Максвелла (рыбий глаз)** с профилем $n(r) = n_0/(1 + (r/a)^2)$. Отображает точечный источник, расположенный на поверхности сферы, в сопряжённую ему точку на противоположной поверхности;
- **линза Итона** [127] с профилем $n(r) = \sqrt{2a/r - 1}$. Разворачивает падающий луч строго в обратном направлении и работает как ретро-рефлектор;
- **обобщённые решения Brown и Gutman** [8; 9; 93]. Переносят фокус с поверхности линзы на произвольное расстояние от её центра;
- **полусферические и усечённые варианты** (7). Формируют диаграммы направленности специального вида;
- **классическая линза Люнеберга** отвечает частному случаю фокуса, вынесенного на бесконечность.

Общим для всех перечисленных устройств свойством является сферическая симметрия диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r)$. Требуемое преобразование волнового фронта полностью определяется одной скалярной функцией радиальной координаты. Эта симметрия обеспечивает как аналитическую разрешимость обратной задачи, так и технологическую реализуемость через многослойную аппроксимацию (4) либо градиентную 3D-печать.

Такое рассмотрение позволяет трактовать настоящую работу не как работу, ограниченную линзой Люнеберга, а как систематическое изложение методов

управления электромагнитным полем в объёмных сферически-симметричных структурах. Линза Люнеберга при этом играет роль исторически сложившегося опорного примера. Такая постановка согласуется с современными работами по *градиентной электродинамике* и *трансформационной оптике* [128–130] и позволяет единообразно трактовать все перечисленные устройства как решения *обратной* задачи для сферически-симметричного уравнения эйконала.

1.7.2 Уравнения поля в радиально-неоднородной сфере

Пусть среда характеризуется скалярной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r) = n^2(r)$ и единичной магнитной проницаемостью $\mu = 1$. В гармоническом приближении $e^{j\omega t}$ уравнения Максвелла сводятся к волновому уравнению вида

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \varepsilon(r) \mathbf{E} + \nabla[\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon(r)] = 0, \quad (1.3)$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме. Последний член в (1.3) — поправка, возникающая только в неоднородной среде и связанная с конечностью градиента $\nabla \varepsilon$. В пределе $k_0 a \rightarrow \infty$, соответствующем квазиоптическому приближению (здесь a — характерный радиус линзы), этот член обращается в ноль, и задача сводится к уравнению эйконала. В противоположном пределе — при $k_0 a \sim 1$ — векторная связь компонент поля через $\nabla \ln \varepsilon$ становится существенной, и для анализа используется метод тензорных функций Грина (2).

Таким образом, сферически-симметричная задача распадается на два асимптотических режима, и каждый из них даёт свой инструмент управления полем:

1. *Лучевой* (геометрооптический) режим. Позволяет ставить и решать *обратную задачу синтеза*: по заданному отображению входа в выход для лучевой картины восстановить $\varepsilon(r)$;
2. *Волновой* (электродинамический) режим. Позволяет *верифицировать* синтезированный профиль с учётом дифракционных эффектов, конечного числа слоёв, потерь и кросс-поляризации (главы 2–3).

Лучевой режим формализуется далее в настоящем разделе; волновому посвящены главы 2–3.

1.7.3 Уравнение эйконала и инвариант Буше

В квазиоптическом приближении поле ищется в виде $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-jk_0 S(\mathbf{r}))$, где $S(\mathbf{r})$ — эйконал (оптический путь). Подстановка в (1.3) в пределе $k_0 \rightarrow \infty$ даёт уравнение эйконала

$$(\nabla S)^2 = n^2(r), \quad (1.4)$$

а уравнения лучей — систему Гамильтона

$$\frac{d}{d\tau} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \nabla n(r), \quad (1.5)$$

где τ — натуральный параметр вдоль луча.

Сферическая симметрия профиля $n(r)$ обеспечивает *плоскостность* всякой лучевой траектории: любой луч целиком лежит в плоскости, проходящей через центр сферы и начальный волновой вектор. Это сводит трёхмерную задачу к двумерной и приводит к интегралу движения, известному как **инвариант Буше** [103]:

$$\boxed{n(r) r \sin \vartheta(r) = b = \text{const}}, \quad (1.6)$$

где $\vartheta(r)$ — угол между лучом и локальным радиус-вектором, а b — *прицельный параметр* луча (аналог момента импульса в центрально-симметричной механической задаче). Инвариант (1.6) обобщает закон Снеллиуса на случай непрерывно изменяющегося показателя преломления и составляет математическую основу всех дальнейших построений.

Из (1.6) следует явное выражение для полного угла отклонения луча. Пусть луч падает из бесконечности с прицельным параметром b и проникает в сферу до точки наименьшего приближения $r_{\min}(b)$, которая определяется уравнением

$$n(r_{\min}) r_{\min} = b. \quad (1.7)$$

Тогда полный угол отклонения луча от первоначального направления при выходе из сферы равен

$$\chi(b) = 2b \int_{r_{\min}(b)}^a \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - b^2}} - 2 \arccos \frac{b}{a}, \quad (1.8)$$

где a — радиус сферы. Первое слагаемое — угол, на который поворачивается радиус-вектор луча внутри сферы; второе ($2 \arccos(b/a) = \pi - 2 \arcsin(b/a)$) вычитает поворот, отвечающий прямолинейной хорде, и учитывает преломление на входе и выходе через поверхность. Контрольная проверка: для ретрорефлектора Итона $n = \sqrt{2a/r - 1}$ интеграл (1.8) даёт $\chi(b) \equiv \pi$ при любом b , что соответствует строгому развороту луча. Формула (1.8) является *ключевой связкой* между профилем $n(r)$ и наблюдаемой лучевой картиной: знание $n(r)$ прямо даёт $\chi(b)$, а обратный путь — восстановление $n(r)$ по $\chi(b)$ — составляет обобщённую постановку задачи синтеза, рассматриваемую в 4.4.

1.7.4 Класс отображений «вход–выход» и тождество Лüneберга

Всякая сферически-симметричная градиентная линза задаёт отображение $\chi(b)$. Традиционные конструкции отвечают следующим частным случаям этого отображения:

Сводка классических градиентных структур, рассматриваемых как частные случаи отображения $\chi(b)$, приведена в таблице 8.

Таблица 8 — Классические градиентные сферические структуры как частные случаи отображения $\chi(b)$

Структура	Отображение $\chi(b)$	Профиль $n(r)$
Однородная среда	$\chi(b) = 0$	$n(r) = 1$
Линза-дефлектор	$\chi(b) = \alpha = \text{const}, 0 < \alpha < \pi$	синтезируется (4.4)
Линза Итона	$\chi(b) = \pi$, ретрорефлектор	$n(r) = \sqrt{2a/r - 1}$
Линза Лüneберга	фокусировка в точку, $\chi(b)$ переменна	$n(r) = \sqrt{2 - (r/a)^2}$
Линза Максвелла	сопряжённые фокусы на поверхности	$n(r) = n_0/(1 + (r/a)^2)$

Требованию постоянного отклонения каждого падающего луча на один и тот же угол $\chi(b) \equiv \pi$, независимо от прицельного параметра b , отвечает *ретрорефлектор* — линза Итона. Подставляя $\chi = \pi$ в (1.8) и разрешая интегральное уравнение относительно $n(r)$, приходим к её профилю $n(r) = \sqrt{2a/r - 1}$ (вывод приведён в 4.4 как предельный случай $\alpha = \pi$ обобщённой линзы-дефлектора). Линза Лüneберга, в отличие от ретрорефлектора, реализует не постоянное отклонение, а *фокусировку*: все лучи сходятся в одну точку на противоположной поверхности сферы, и угол отклонения $\chi(b)$ при этом монотонно зависит от b . Соответствующая обратная задача (с условием фокусировки вместо постоянства χ) решается тем же аппаратом уравнения Абеля и даёт классический

профиль $n^2(r) = 2 - (r/a)^2$; аналогично получается и профиль Максвелла.

В то же время никакого принципиального ограничения на вид функции $\chi(b)$ нет. Можно потребовать, чтобы все лучи отклонялись на произвольный заданный угол α , чтобы $\chi(b)$ менялось по наперёд заданному закону (например, для формирования косекансной диаграммы), либо чтобы в одном диапазоне значений b отклонение было одной величины, а вне него — другой (двухрежимная линза). Каждое такое требование задаёт свою обратную задачу для уравнения Абеля, получаемого из (1.8). Практическое решение этой обратной задачи для случая постоянного отклонения на угол α вынесено в 4.4 главы 4.

1.7.5 Связь с трансформационной оптикой

Изложенный подход имеет прямую связь с современной теорией *трансформационной оптики* (transformation optics) [128; 129]. В этой теории управление волновым фронтом интерпретируется как преобразование координат в вакууме: отображение $\mathbf{r}' = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ «растягивает» пространство так, чтобы распространяющаяся в нём прямолинейная волна приобретала требуемую траекторию в исходных координатах, а тензор проницаемости $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ задаётся якобианом преобразования [128].

Для сферически-симметричного преобразования $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ тензор проницаемости вырождается в изотропную скалярную функцию $\varepsilon(r) = [r/f(r)]^2 [df/dr]^{-1}$, и задача синтеза возвращается к рассматриваемому здесь классу. Отсюда следуют два вывода. Во-первых, линзы Люнеберга, Максвелла и Итона получаются как результат специально подобранных радиальных преобразований координат. Во-вторых, обратная задача синтеза $\chi(b) \rightarrow n(r)$ геометрически эквивалентна поиску такого $f(r)$, при котором лучи вакуума, преломлённые обратным отображением, дают требуемую лучевую картину.

Таким образом, **линза Люнеберга является частным случаем более широкого класса устройств, синтезируемых методами трансформационной оптики для управления электромагнитным полем в объёмных сферически-симметричных средах.** На этом положении построено дальнейшее изложение. Главы 2–3 посвящены волновому аппарату, позволяющему верифицировать любые синтезированные профили. Главы 4–7 демонстрируют обратную задачу синтеза на конкретных примерах, включая новый класс *линз-дефлекторов* с управляемым углом преломления (4.4 и 7.11).

1.7.6 Иерархия задач управления электромагнитным полем

Введённый формализм инварианта Буше (1.6) и отображения «вход–выход» $\chi(b)$ описывает только базовый уровень управления — управление траекторией одиночного луча. В общем случае задача управления электромагнитным полем в объёмной радиально-неоднородной среде допускает иерархическое разложение на пять качественно различных уровней, каждый из которых имеет свой набор управляющих воздействий $u(\cdot)$, функционал качества $J[u]$ и ограничения на реализуемость. Эта иерархия систематически прослеживается по главам диссертации и определяет внутреннюю логику её построения.

Уровень L_0 — управление траекторией одиночного луча. Управляющая функция: профиль показателя преломления $n(r)$. Функционал качества: уклонение реализованного отображения $\chi_{\text{real}}(b)$ от целевого $\chi_{\text{target}}(b)$ в норме L^2 . Этот уровень формализуется инвариантом Буше и уравнением Абеля (1.8) и обоснован в настоящем разделе и в разделе 4.4. Положение 3, выносимое на защиту, относится к этому уровню в частных конфигурациях линзы-дефлектора и линзы Итона.

Уровень L_1 — управление волновым фронтом. Управляющая функция: профиль $\varepsilon(r)$ или $\hat{\varepsilon}(r)$ плюс положение и ориентация облучателя. Функционал качества: норма отклонения фазы $S(\theta, \varphi)$ выходящего поля от заданной целевой фазы при фиксированной апертуре. Этот уровень соответствует классической задаче коллимации (фокусировки) и разрабатывается в главе 5 с использованием рекуррентного аппарата ТФГ из главы 2.

Уровень L_2 — управление диаграммой направленности. Управляющая функция: профиль слоёв $\{\varepsilon_l, r_l\}_{l=1}^L$ плюс система облучателей $\{(r_f, \theta_f, \varphi_f)\}$ с весовыми коэффициентами. Функционал качества: близость нормированной мощности $|F(\theta, \varphi)|^2$ к целевой форме (косеканс $\text{cosec}^2(\theta)$, многолучевая решётка, диаграмма с поднятым боковым лепестком). Этот уровень обоснован в положении 4 на защиту и разрабатывается в главах 5–6 и 7.

Уровень L_3 — управление поляризационными характеристиками. Управляющая функция: то же, что на L_2 , плюс выбор поляризации возбуждающей волны. Функционал качества: коэффициент поляризации

онных потерь $\alpha = \sigma_{s, \text{кп}} / (\sigma_{s, \text{оп}} + \sigma_{s, \text{кп}})$ и поляризационная эффективность $\mu = 1 - \alpha$ при облучении волной круговой поляризации (положение 5 на защиту). Уровень разрабатывается в главах 3 и 5.

Уровень L_4 — управление эффективной площадью рассеяния (ЭПР). Управляющая функция: совокупность профиля $\varepsilon(r)$, формы (полусфера, тороид) и наличия металлического ядра. Функционал качества: бистатистическая или моностатистическая ЭПР $\sigma(\theta_r, \varphi_r)$ в заданном угловом секторе и в заданном частотном диапазоне. Этот уровень охватывает задачи пассивной радиолокационной маркировки и управляемой радиозаметности; разрабатывается в главах 3 и 7 и технологически замыкается в главе 8.

Иерархия $L_0 \rightarrow L_4$ имеет важное методологическое следствие: *переход с уровня k на уровень $k + 1$ требует более полного электродинамического описания*. Уровни L_0 и L_1 доступны квазиоптическому формализму уравнения эйконала (1.4); уровни L_2 и L_3 требуют полноволнового аппарата ТФГ (глава 2); уровень L_4 дополнительно требует учёта взаимодействия с окружающим объектом (рассеиватель, фон). Отсюда возникает естественная пара ограничений на метод расчёта — быстрота (для оптимизации) и общность (для корректности), — разрешаемая в настоящей работе сочетанием ТФГ как основного инструмента L_2 – L_4 и геометрической оптики как опорного приближения L_0 – L_1 .

1.7.7 Прямая и обратная задачи: формальная постановка

Введённый формализм допускает разделение задач управления на четыре формально различных типа, каждому из которых отвечает своя математическая структура и свой набор инженерных требований.

Прямая задача. По заданному профилю $\varepsilon(r)$ (или $\hat{\varepsilon}(r)$) и заданному внешнему возбуждению $\mathbf{E}^{\text{inc}}$ найти отклик $\Phi[\varepsilon] \rightarrow \{\chi(b), \sigma(\theta, \varphi), F(\theta, \varphi), \alpha\}$. Корректно поставлена в смысле Адамара (существование, единственность, непрерывность по входным данным); решается прямым применением ТФГ (2) или полноволновым FEM (Ansys HFSS).

Обратная задача синтеза. По заданному отображению $\chi_{\text{target}}(b)$, форме диаграммы направленности $F_{\text{target}}(\theta, \varphi)$ или распределению ЭПР $\sigma_{\text{target}}(\theta, \varphi)$

восстановить $\varepsilon(r)$. В сферически-симметричном случае при $\chi(b) = \alpha = \text{const}$ задача сводится к интегральному уравнению Абеля (1.8), имеющему замкнутое решение через обратное преобразование Абеля. Данный путь синтеза обоснован в разделе 4.4 и составляет содержание положения 3, выносимого на защиту. Классическое решение Люнеберга [5] для фокусировки в точку (переменное $\chi(b)$), решение Итона [127] для $\chi \equiv \pi$ (ретрорефлексия) и обобщения Гутмана и Моргана [8; 9; 93] для смещённого фокуса — отдельные точки одного и того же класса обратных задач. Наиболее общее решение этого класса в геометрикооптическом приближении получено А.С. Венецким, В.А. Калошиным и соавторами тем же аппаратом — сведением лучевого интеграла к уравнению Абеля с явным обращением — как для изотропной градиентной линзы с центральной симметрией и произвольным выходным фронтом [13], так и для анизотропной среды [11; 14]; относительно этих результатов положение 3 настоящей работы решает смежную задачу — восстановление не непрерывного закона $n(r)$, а конечного набора параметров слоистой структуры непосредственно в полноволновой постановке, с контролем дифракционных эффектов при конечных $k_0 a$.

Обратная задача оптимизации. По заданному функционалу $J[\varepsilon] \rightarrow \min$ при ограничениях $\varepsilon \in \mathcal{F}_{\text{realizable}}$, где $\mathcal{F}_{\text{realizable}}$ задаётся технологическими ограничениями FDM-3D-печати ($\varepsilon_l \in [\varepsilon_{\min}; \varepsilon_{\max}]$, $\alpha_l \in [12\%; 79\%]$, дискретность L слоёв), найти оптимальный дискретизованный профиль $\{\varepsilon_l\}$. Задача в общем случае невыпуклая и многоэкстремальная; решается многокритериальным генетическим алгоритмом MOGA, разработанным и численно обоснованным в главе 4 (положение 5 на защиту). Принципиальное отличие от классической обратной задачи синтеза — учёт реализуемости в явном виде, что устраняет технологический разрыв между расчётной моделью и производимым образцом.

Обратная задача идентификации. По измеренному набору характеристик $\{\chi^{\text{meas}}(b), F^{\text{meas}}(\theta, \varphi)\}$, полученному от готовой линзы (например, отпечатанной на 3D-принтере), восстановить фактический профиль $\varepsilon^{\text{real}}(r)$ для целей контроля качества и повторного цикла оптимизации. Задача некорректна по Адамару (малые ошибки измерений ведут к большим ошибкам восстановления) и требует регуляризации [131]. В настоящей работе эта задача отдельно не рассматривается, однако необходимый для неё измерительный

аппарат — метод NRW в волноводном тракте — развивается в главе 8 и используется для прямой верификации профиля изготовленных макетов с погрешностью 2...3%.

Существенно, что все четыре типа задач допускают единое программное представление в рамках библиотеки *GreenTensor* (положение 2 на защиту, глава 10): прямая задача реализуется методом *RCSCalculator*, параметрический свип для оптимизации — методом *ScatteringCalculator*, обратное преобразование Абеля программируется по общим формулам раздела 4.4, а алгоритм MOGA встраивается в цикл вызовов через стандартный API. Тем самым теоретическая иерархия задач Φ^{-1} напрямую отображается на архитектуру открытого программного инструмента, что обеспечивает воспроизводимость и независимую проверку всех результатов диссертации.

1.7.8 Согласование лучевого и волнового подходов

Применимость геометрикооптического (лучевого) аппарата (1.4) и (1.5) к сферической градиентной линзе ограничена двумя условиями. Первое — общее условие квазиоптического приближения [103]:

$$\frac{|\nabla \varepsilon|}{k_0 \varepsilon} \ll 1 \iff k_0 \ell_\nabla \gg 1, \quad (1.9)$$

где $\ell_\nabla = \varepsilon/|\nabla \varepsilon|$ — характерный масштаб неоднородности. Второе — отсутствие точек поворота (каустики), вблизи которых амплитуда лучевого решения $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ сингулярна.

Для классической линзы Люнеберга с профилем $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ имеем $|\nabla \varepsilon|/\varepsilon = 2(r/a^2)/[2 - (r/a)^2]$, откуда

$$\ell_\nabla(r) = \frac{a^2(2 - (r/a)^2)}{2r}, \quad \left. \frac{|\nabla \varepsilon|}{k_0 \varepsilon} \right|_{r=a} = \frac{2}{k_0 a}. \quad (1.10)$$

Условие (1.9) выполняется лишь при $k_0 a \gg 2$, то есть при электрических размерах от нескольких длин волн и выше. На границе линзы $r = a$ отношение (1.10) обращается в $2/(k_0 a)$, и для $k_0 a \leq 5$ погрешность лучевого расчёта первого бокового лепестка превышает 1 дБ, а для $k_0 a \leq 2$ лучевая картина полностью теряет физический смысл (линза уже не является дифракционно различимой). Сопоставление лучевого расчёта с ТФГ-решением, выполненное в главе 2 на серии электрических размеров $k_0 a = 2\pi, 4\pi, 8\pi$, количественно подтверждает эту

оценку и определяет границу применимости приближений.

Согласование двух режимов проводится по стандартной WKВ-схеме [103, §3.1]: вне точки поворота поле представляется лучевым решением $\mathbf{A} e^{jk_0 S}$, в окрестности точки поворота — решением через функции Эйри, а условия сшивки задают амплитуду $\mathbf{A}$ на входе и выходе из неоднородной области. В многослойной аппроксимации, рассматриваемой в главе 4, этой процедуре отвечает сшивка через рекуррентные импедансы $Z_n^{\leftarrow(l)}$, выводимые из ТФГ. Тем самым лучевой и волновой подходы связываются единым формализмом, и переход между ними определяется не физикой, а выбором вычислительного инструмента, наиболее эффективного в данном диапазоне электрических размеров.

1.7.9 Связь с потенциалами Дебая, Герца и единый формализм школы Б. А. Панченко

Аппарат тензорных функций Грина, развиваемый в главе 2, технически опирается на представление электромагнитного поля через два скалярных потенциала, традиционно называемых потенциалами Дебая или Герца [132, гл. 7], [133]. Для среды с радиально-симметричной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r)$ и единичной магнитной проницаемостью $\mu = 1$ электрическое и магнитное поля представимы в виде

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times (\Pi_e \mathbf{r}) - jk_0 \nabla \times (\Pi_m \mathbf{r}), \quad \mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times (\Pi_m \mathbf{r}) + jk_0 \varepsilon(r) \nabla \times (\Pi_e \mathbf{r}), \quad (1.11)$$

где $\Pi_e(r, \theta, \varphi)$ и $\Pi_m(r, \theta, \varphi)$ — скалярные потенциалы Дебая для E -волн (ТМ по $\mathbf{r}$) и H -волн (ТЕ по $\mathbf{r}$) соответственно. Сферическая симметрия среды обеспечивает разделение переменных в уравнениях для Π_e и Π_m и приводит каждый из них к скалярному уравнению Гельмгольца с радиально-зависимым показателем

$$\left[\Delta + k_0^2 \varepsilon(r) \right] \Pi_{e,m} = 0. \quad (1.12)$$

Решение этого уравнения в многослойной среде даётся произведением сферических функций Бесселя — Риккати $\hat{j}_n(k_0 r), \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r)$ по радиусу, ассоциированных функций Лежандра $P_n^m(\cos \theta)$ по углу склонения и гармоник $e^{jm\varphi}$

по азимуту. Дальнейшее построение направленных импедансов $Z_n^{\leftarrow(l)}$ и адмитансов $Y_n^{\leftarrow(l)}$ как отношений Π_e, Π_m на границах раздела слоёв $r = r_l$, излагаемое в главе 2, представляет собой техническую формализацию рекуррентного решения (1.12).

Это представление встраивает настоящую работу в непрерывную методологическую линию, развиваемую в ведущей научной школе прикладной электродинамики при УГТУ-УПИ — УрФУ. Школа основана академиком РАН Б. А. Панченко [18–20], систематически развившим аппарат тензорных функций Грина для уравнений Максвелла в областях, частично заполненных диэлектриком (трёхтомник 1979–1981); его непосредственный ученик С. Н. Шабунин в докторской диссертации [24] обобщил аппарат на цилиндрические магнитодиэлектрические слоистые структуры (включая случай метаматериальных оболочек с отрицательным показателем преломления) и явно зафиксировал двухкоординатную программу «плоскость — цилиндр». Настоящая работа замыкает эту программу на сферически-симметричный случай и распространяет её, с учётом раздела 2.11, на радиально-анизотропные структуры. Тем самым в рамках единого аппарата потенциалов Дебая — Герца становится возможным сквозной анализ всех трёх канонических координатных систем — декартовой, цилиндрической и сферической, — что является методологическим итогом развития школы за почти полвека её существования.

1.7.10 Анизотропное обобщение и пределы изотропного класса

Изложенный формализм корректен в предположении скалярной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r)$. Однако современные задачи трансформационной оптики [128; 129], синтез маскирующих оболочек, искусственных магнитодиэлектрических структур [134] и композитных линз с ферритовыми вставками выходят за рамки изотропного класса и требуют тензорной формы

$$\hat{\varepsilon}(r) = \text{diag}(\varepsilon_{rr}(r), \varepsilon_{\theta\theta}(r), \varepsilon_{\varphi\varphi}(r)), \quad \hat{\mu}(r) = \text{diag}(\mu_{rr}(r), \mu_{\theta\theta}(r), \mu_{\varphi\varphi}(r)), \quad (1.13)$$

причём для ряда канонических задач (например, классическая маскирующая оболочка Pendry для сферической геометрии) тензор $\hat{\varepsilon}(r)$ существенно

не сводится к скалярной проницаемости никаким радиальным преобразованием координат. Развёрнутое обобщение рекуррентной схемы пересчёта направленных импедансов и адмитансов на такой класс структур, включая модифицированные угловые порядки ν_E, ν_H для уравнения (1.12) и условия сохранения свойства разделения переменных, выполнено в разделе 2.11 в рамках главы 2. Тем самым изложенная в настоящем разделе теоретическая программа управления электромагнитным полем имеет естественное расширение, замыкающее триаду «плоскость — цилиндр — сфера» школы Б. А. Панченко на анизотропный случай и открывающее путь к сферическим аналогам метаматериальных оболочек, ферромагнитных линз и устройств трансформационной оптики.

1.7.11 Энергетические ограничения и пределы управления

Управление электромагнитным полем в пассивной (без активных источников и усилителей) сферически-симметричной среде ограничено фундаментальными законами сохранения энергии и взаимности. Эти ограничения определяют верхнюю границу достижимых характеристик и позволяют количественно оценивать «запас» разработанных методов синтеза до их физических пределов.

Принцип взаимности. Для среды с действительной (без потерь) скалярной проницаемостью $\varepsilon(r) \in \mathbb{R}_{>0}$ и единичной магнитной проницаемостью применима теорема взаимности Лоренца [132, §8.14], [135]: характеристика «источник в точке $\mathbf{r}_1$ — приёмник в точке $\mathbf{r}_2$ » совпадает с характеристикой «источник в $\mathbf{r}_2$ — приёмник в $\mathbf{r}_1$ ». Применительно к антенной задаче это означает совпадение диаграмм направленности по приёму и по передаче, что служит самостоятельным критерием корректности численных и аналитических расчётов настоящей работы.

Предел Харрингтона для направленности. Минимальная сфера, охватывающая антенну радиуса a при рабочем волновом числе k_0 , имеет максимально достижимый без перехода в сверхнаправленный режим коэффициент направленного действия («нормальное усиление» по Харрингтону), ограниченный сверху выражением [136; 137]

$$D_{\max}(k_0a) = (k_0a)^2 + 2k_0a; \quad (1.14)$$

превышение этой границы возможно лишь ценой резкого роста запасённой реактивной энергии и добротности Q , то есть катастрофического сужения рабочей полосы, — энергетическая природа этого ограничения для электрически малых антенн установлена Л. Дж. Чу [138]. Для линзы Люнеберга радиуса a при $k_0a = 8\pi$ (что соответствует радиусу $a = 4\lambda$ и диаметру $2a = 8\lambda$) предел (1.14) даёт $D_{\max} \approx 681$ ($\approx 28,3$ дБ) для излучения в полный телесный угол 4π . Полусферическая конфигурация главы 7 расположена на проводящем экране, который запирает излучение в верхнюю полусферу: при том же размере минимальной охватывающей сферы мощность распределяется по телесному углу 2π , что поднимает достижимую границу примерно на 3 дБ — до $\approx 31,3$ дБ. Существенно, что эта граница относится к *максимально сфокусированному* карандашному лучу. Косекансное формирование диаграммы $\cos^2(\theta)$ перераспределяет энергию по сектору углов и пиковую направленность *снижает*: оно решает задачу равномерного облучения подстилающей поверхности, а не повышения направленности. Поэтому реализуемая направленность полусферической конфигурации заведомо лежит ниже указанного предела, и сам предел служит здесь верхней оценкой сверху, а не ориентиром для проектирования.

Парадокс элементного усиления. Для антенной решётки на основе линзы Люнеберга, рассматриваемой в главе 6, применим парадокс Хэннана [139]: коэффициент усиления решётки при равномерном амплитудно-фазовом распределении на фокальной сфере не превышает $D_{\max}(k_0a) \cdot N_{\text{облуч}}$, где $N_{\text{облуч}}$ — число активных облучателей. Этот предел задаёт верхнюю оценку для многолучевых базовых станций 5G на основе ЛЛ и определяет минимально необходимое число облучателей для заданного покрытия сектора.

Граница модуляции ЭПР. Для пассивного рассеивателя радиуса a при оптической геометрической площади πa^2 моностатическая ЭПР ограничена сверху

$$\sigma_{\max}(k_0a) \leq \frac{4\pi A^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi (\pi a^2)^2}{\lambda^2} = \pi a^2 (k_0a)^2, \quad (1.15)$$

что достигается при идеальном отражателе с направленным переизлучением. Для линзы Люнеберга с отражателем (раздел 7) эмпирическое значение составляет $\sim 0,3 \dots 0,6$ от классического предела (1.15), причём отклонение фиксируется поляризационным коэффициентом α , исследованным в положении 5 на защиту. Эта количественная связка «коэффициент α как мера отклонения от теоретического предела ЭПР» — одно из следствий развиваемой иерархии управления.

1.7.12 Связь с задачами обратного дизайна и нейросетевыми суррогатами

Сформулированная иерархия задач управления (раздел 1.7.6) и обратная задача оптимизации (раздел 1.7.7) допускают принципиальное обобщение в рамках современного класса методов обратного дизайна (inverse design) на основе глубоких нейронных сетей. Замысел метода состоит в следующем: вместо повторных вызовов дорогостоящего полноволнового расчёта $\Phi[\varepsilon] \rightarrow \{\sigma, F, \alpha\}$ в цикле оптимизации обучается нейросетевая суррогатная модель $\tilde{\Phi} : \varepsilon \mapsto \text{ML}(\varepsilon)$, аппроксимирующая прямой оператор Φ на представительной выборке $\{\varepsilon^{(k)}, \Phi[\varepsilon^{(k)}]\}_{k=1}^N$, после чего обратная задача решается градиентным спуском через $\tilde{\Phi}$ с помощью автоматического дифференцирования. Особенно показателен пример [140], где нейросеть, обученная на Mie-расчётах сферически-симметричных многослойных рассеивателей, демонстрирует ускорение прямой задачи на 3–5 порядков и позволяет за приемлемое время решать задачу инверсного синтеза — т. е. непосредственно ту постановку, которая в классической формулировке (раздел 1.7.7) сводится к обращению уравнения Абеля. Применительно к линзовым антеннам и многослойным сферическим рассеивателям СВЧ-диапазона этот класс методов в настоящее время активно развивается; его развёрнутое сопоставление с классическими градиентными методами оптимизации (включая MOGA-методику настоящей работы, глава 4) выходит за рамки данной диссертации и является предметом отдельных публикаций автора и коллектива школы Б. А. Панченко.

Применительно к сферическим линзовым структурам узким местом такого подхода является получение обучающей выборки достаточного объёма — порядка 10^4 конфигураций при корректном статистическом покрытии пространства параметров. Полноволновой FEM-расчёт каждой конфигурации требует

от единиц до нескольких часов машинного времени, что делает прямую генерацию выборки практически нереализуемой. Разработанная в настоящей работе библиотека *GreenTensor* (положение 2 на защиту, глава 10) с быстрой работой не хуже 5 секунд на ~ 100 узлов сетки одночастотного свипа делает генерацию таких выборок инженерно-практической задачей: построение типовой выборки из 10^4 конфигураций сокращается с оценочных 10^3 часов FEM-расчёта до ~ 14 часов GreenTensor-расчёта на однопоточном процессоре уровня Intel Core i7-12700K. Тем самым **разработанный программный инструмент непосредственно открывает доступ к современному классу методов обратного дизайна для сферических градиентных структур**, что составляет одну из перспектив развития положений 2 и 5 на защиту, выходящую за рамки настоящей диссертации.

В текущем изложении методы нейросетевых суррогатов специально не разрабатываются, однако структура развитого аппарата (формальная таксономия задач Φ/Φ^{-1} , классовое API библиотеки, процедура верификации на эталонных задачах) обеспечивает прямую совместимость с такими методами и является методологическим заделом для их применения в последующих работах автора и независимых исследовательских группах.

1.8 Выводы по главе

В настоящей главе проведён обзор современного состояния и потенциала линз Люнеберга как класса градиентных антенных структур. Основные результаты сводятся к следующему.

Во-первых, систематизированы ключевые свойства классической сферической линзы Люнеберга с профилем $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$, обеспечивающим преобразование сферической волны точечного источника на поверхности линзы в плоскую волну на противоположной стороне. Показано, что сферическая симметрия профиля — принципиальное отличие линзы Люнеберга от параболических зеркал и плоских фазированных антенных решёток — даёт ей два эксплуатационных преимущества, не воспроизводимых в других антенных системах: возможность одновременного формирования нескольких независимых лучей и механическое сканирование при неподвижном теле линзы.

Во-вторых, рассмотрены практические реализации линз Люнеберга в современных радиосистемах — в базовых станциях сетей пятого поколения (5G) и

миллиметрового диапазона, на беспилотных транспортных средствах и в системах голографического ММО, в многолучевых радиолокационных антеннах, в системах пассивной маркировки объектов, а также в коммерчески реализованных автомобильных радарах (в частности, в серии Lunewave для систем ADAS). Установлено, что во всех этих приложениях рабочие электрические размеры линзы составляют от единиц до десятков длин волн, а для задач формирования диаграмм направленности специальной формы и для расчётов в сложной электромагнитной обстановке размер вычислительной области может достигать десятков тысяч длин волн.

В-третьих, обоснована актуальность разработки *быстрых* методов электродинамического анализа многослойных сферических структур. Стандартные численные методы — конечных элементов (FEM) и интегральных уравнений — применительно к объёмным линзам при указанных электрических размерах требуют значительных вычислительных ресурсов, что существенно ограничивает их применимость в задачах параметрической оптимизации и анализа чувствительности. Требуются методы, которые обеспечивают замкнутое аналитическое представление характеристик многослойной сферы, легко распараллеливаются и минимально расходуют оперативную память.

Перечисленные требования удовлетворяются методом тензорных функций Грина сферической области, изложение которого и составляет предмет главы 2.

Настоящая глава носит обзорно-постановочный характер и не содержит самостоятельного положения, выносимого на защиту: систематизированные сведения о современном состоянии теории и практики применения сферических градиентных линз, выявленные методические, технологические и прикладные пробелы существующего инструментария электродинамического моделирования и сформулированная обобщённая постановка задачи управления электромагнитным полем в объёмных сферически-симметричных структурах задают рамку, в которой развёрнуты основные методические и научные результаты диссертации (главы 2–9).

Глава 2. Расчёт многослойных сфер методом тензорных функций Грина

2.1 Введение

Настоящая глава посвящена изложению метода тензорных функций Грина (ТФГ) применительно к электродинамическим задачам в сферической системе координат. Приводятся примеры расчёта электромагнитного поля при облучении слоистой сферической структуры элементарными источниками, положение которых изменяется вдоль меридиональной линии.

Метод функций Грина является универсальным методом решения электродинамических задач для областей, частично или полностью совпадающих с координатными поверхностями ортогональных систем координат, в которых переменные разделяются. Систематический аппарат ТФГ для уравнений Максвелла в областях, частично заполненных диэлектриком, изложен Б. А. Панченко в серии работ [18–20], а математические основы возбуждения электромагнитных волн и метод собственных функций — в классических трудах Маркова и Чаплина [86], Маркова и Васильева [83], Васильева [85]. В зарубежной литературе канонической основой аппарата диадных функций Грина служат монографии Ч. Тая [43] и, применительно к слоистым и неоднородным средам, В. Чью [44]; развитая в них техника принципиально эквивалентна используемому здесь тензорному формализму, однако не доведена в указанных источниках до рекуррентных схем произвольной слоистости, составляющих специфику школы Б. А. Панченко и настоящей работы. В общем случае для описания скалярных компонент напряжённостей электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ от произвольной комбинации электрических и магнитных сторонних токов требуются четыре тензора Грина, каждый из которых содержит девять скалярных компонент [17; 58].

Во многих частных случаях число используемых компонент может быть существенно сокращено. Так, для расчёта поперечных составляющих электромагнитного поля в дальней зоне от многослойной сферической структуры оказывается достаточно компонент $\vec{E}_\theta$, $\vec{E}_\varphi$, $\vec{H}_\theta$, $\vec{H}_\varphi$ в сферической системе координат (r, θ, φ) при условии, что границы частичных областей совпадают с координатными поверхностями $r = \text{const}$. Интерес к таким задачам обусловлен их широким применением в электродинамике: это задачи численного расчёта

параметров дифракции на телах простой геометрической формы (позволяющие оценивать эффективность укрытий и материалов для них), анализ эталонных калибровочных сферических структур, анализ фокусирующих систем на основе линзовых антенн, а также задачи снижения радиолокационных отражений от выпуклых тел, покрытых радиопоглощающими и теплозащитными материалами. Двумерный аналог — электродинамическая теория цилиндрической линзы Люнеберга; вопросы её проектирования рассмотрены в магистерской работе [141].

Одна из поставленных в настоящей работе задач состоит в разработке универсального аппарата электродинамического анализа, пригодного для реализации в виде открытого программного пакета и последующей интеграции в среды электродинамического моделирования. Метод ТФГ обладает высоким быстродействием, однако требует аналитического представления структуры. В настоящей главе описаны решения, позволяющие единообразно рассчитывать широкий класс задач; полученные далее выражения хорошо поддаются алгоритмизации и включены в разработанную на языке Python открытую библиотеку электродинамического анализа *GreenTensor*.

Публикации автора по материалам главы 2: [56; 57]

2.2 Аппараты анализа объёмных сферических линз

Р. К. Люнеберг получил частное решение, выбрав закон изменения показателя преломления, при котором линза имеет две фокальные точки вне сферы; решение принимает наиболее простой вид, когда одна точка расположена на поверхности линзы, а другая — на бесконечности с противоположной стороны. В работе [93] найдены решения для линз с одной фокальной точкой на бесконечности, а второй — внутри тела линзы. Эти решения не единственны [8; 25; 56; 104; 142]: для различных законов распределения показателя преломления возможны фокусные расстояния произвольной величины [117]; однако в общем случае получаемые профили задаются функциями, содержащими определённые интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях.

Лучевые методы и производные от метода трассировки лучей (SBR) малоэффективны при анализе многослойных структур: для обеспечения приемлемой точности приходится учитывать большое число переотражений (порядка десяти на каждом слое), что приводит к неприемлемо длительным расчётам.

По этой причине практически более оправдано развитие электродинамических методов анализа многослойных диэлектрических структур, опирающихся на координатные поверхности; аппарат тензорных функций Грина показывает здесь высокую вычислительную эффективность. Сводка основных аппаратов электродинамического анализа с указанием их областей применимости и ограничений приведена в таблице 9.

Таблица 9 — Основные аппараты электродинамического анализа

Метод	Преимущества	Ограничения
Метод конечных элементов (FEM)	Высокая точность, хорош для сложных геометрий и неоднородностей	Требователен к вычислительным ресурсам, особенно при высоких частотах и 3D
Метод конечных разностей во времени (FDTD)	Хорош для широкополосных задач, прямое решение во временной области	Требователен к затратам оперативной памяти и ресурсам при больших моделях
Метод моментов (MoM)	Эффективен для открытых задач, хорош при малом объёме неоднородности	Ограничен применимостью к телам в свободном пространстве
Трассировка лучей / геометрическая оптика (GO, GTD)	Быстрое приближённое моделирование линз большого размера	Не учитывает дифракцию и волновые эффекты

Продолжение следует...

Продолжение таблицы 9

Сферическая волновая модель / метод мультипольного разложения (MWD)	Хорош для сферических и квазисферических структур	Сложная реализация и ограниченное ПО, подходит для однородных или послойных сфер, без асимметрий
BOR (Body of Revolution)	2.5D-анализ — быстрый и эффективный для осесимметричных структур	Подходит только для строго осесимметричных задач
SBR (Shooting and Bouncing Rays)	Быстрый для крупных объектов, хорош в ВЧ-диапазоне	Не учитывает дифракцию и интерференцию, не точен для малых объектов
Integral Equation Methods (IE)	Высокая точность для проводников и рассеяния	Неудобны для сложных диэлектриков

Выбор конкретного метода электродинамического моделирования определяется геометрией и масштабом задачи, требуемой точностью и частотным диапазоном. Для расчёта линз Люнеберга — радиально-неоднородных многослойных диэлектрических структур — наиболее эффективны методы, способные аккуратно учитывать внутренние границы и пространственную неоднородность материала. Наибольшее распространение получили метод конечных элементов (FEM) и метод конечных разностей во временной области (FDTD), реализованные в *Ansys HFSS* и *CST Microwave Studio* соответственно. Эти подходы позволяют исследовать как распределение полей, так и характеристики рассеяния и фокусировки, что критично при анализе линзовых антенн; прочие инструменты вычислительной электродинамики ориентированы на более

узкие классы задач.

Специализированные методы — теория Ми и метод тел вращения BOR (Body of Revolution) — позволяют существенно ускорить расчёт при условии строгой симметрии исследуемой структуры и демонстрируют высокую точность при малых вычислительных затратах. Они особенно полезны для параметрических исследований и валидации численных моделей, однако имеют ограниченную применимость: не подходят для линз с нарушенной сферической симметрией и для сложных режимов облучения.

Методы, основанные на геометрической оптике (SBR, GTD/UTD), остаются востребованными для крупномасштабных объектов в высокочастотной области. Несмотря на их приближённый характер, они незаменимы в задачах системного проектирования, где важны скорость и масштабируемость и не требуется высокая точность вблизи границ.

Перспективным направлением представляется гибридизация подходов — построение численных схем, сочетающих точность FEM/FDTD с масштабируемостью SBR/GTD, — а также дальнейшее развитие BOR-решателей, адаптированных под осесимметричные диэлектрические структуры, и расширение аналитических подходов (типа теории Ми) на неоднородные и анизотропные среды. С учётом широкого применения линз Люнеберга в современных системах связи, РЛС и метаповерхностях, развитие этих методов остаётся одной из актуальных задач вычислительной электродинамики.

В этом контексте развитие аппарата тензорных функций Грина сохраняет свою актуальность при анализе рассеяния и распространения электромагнитных волн в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: линзах Люнеберга, метаматериалах, композитных структурах и сложных многослойных покрытиях. Систематическому применению аппарата ТФГ к многослойным цилиндрическим и сферическим структурам посвящены работы школы Панченко и её соавторов [21—23; 49; 143], а общие математические модели электродинамики слоистых сред изложены в учебниках Ильинского, Кравцова и Свешникова [84] и Чебышёва [144]. Универсальные численные методы (FEM, FDTD, MoM) способны дать высокоточное решение, однако требуют значительных вычислительных ресурсов, плохо подходят для параметрических исследований и не всегда обеспечивают аналитическую прозрачность. Тензорные функции Грина служат связующим звеном между аналитическими и численными подходами, позволяя:

- проводить верификацию численных моделей;
- строить асимптотические приближения;
- получать интегральные представления, ускоряющие расчёт;
- развивать многомасштабный и гибридный анализ.

В рамках единой методологической программы школы Б. А. Панченко (см. введение) настоящая глава переносит аппарат ТФГ на *сферически-симметричный* случай: на смену плоскому экрану и цилиндру [23; 24; 143; 145] приходит многослойная сфера, а вместо переменных разделения (ρ, φ, z) используются (r, θ, φ) . На месте метода эквивалентных линий [23] в радиальной координате применяется рекуррентный пересчёт направленных импедансов и адмитансов по слоям сферы (2.5), а вместо разложения по LE/LM-волнам цилиндра — разложение по сферическим векторным гармоникам $\vec{M}_n, \vec{N}_n$.

Ниже приведены классическое решение Люнеберга и общее выражение для показателя преломления линзы, обеспечивающей фокусировку между двумя сопряжёнными точками. Число таких сопряжённых точек бесконечно: одна точка может находиться вне линзы или на её поверхности, вторая — вне, внутри или также на поверхности. Для реализуемости решения диаметр падающего луча должен быть равен или существенно меньше диаметра линзы, то есть апертура линзы должна использоваться целиком.

Чтобы описать принцип работы линзы Люнеберга и возможные её модификации, рассмотрим среду, в которой показатель преломления зависит от расстояния до начала координат — функция $n(r)$. Световые лучи в такой среде удовлетворяют обобщённому закону Снеллиуса [5]:

$$n \cdot r \cdot \sin \varphi = k, \quad (2.1)$$

где φ — угол от положительного направления луча до направления увеличения r ; k — постоянная для каждого конкретного луча. Ход лучей показан на рисунке 2.1, где MPQ — луч, $\mathbf{r}$ — направленное расстояние от центра O к P , $\mathbf{a}_s$ — тангенциальный вектор в точке P .

Из сферической симметрии среды следует, что каждый луч лежит в плоскости, содержащей начало координат, а вдоль луча выполняется инвариант (здесь и далее $K_1 \equiv k$ — та же постоянная луча, обозначение сменено для единообразия с нормировкой):

$$rn(r)|\sin \varphi| = K_1, \quad (2.2)$$

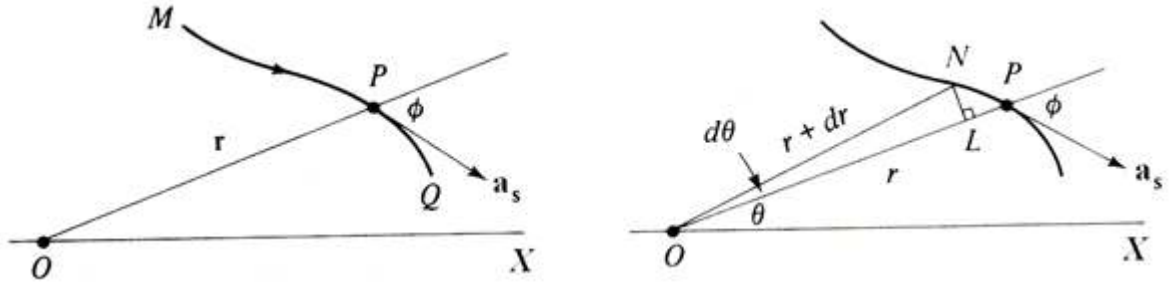


Рисунок 2.1 — Дифференциальная геометрия луча

где φ — угол, определённый на рисунке 2.1, K_1 — константа. Раскрывая $\sin \varphi$ через дифференциальную геометрию луча и интегрируя, получаем уравнение луча в радиально-симметричной среде:

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{K_1 dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - K_1^2}}. \quad (2.3)$$

На рисунке 2.2 представлено поперечное сечение линзы радиуса a с монотонно убывающей функцией $n(r)$. Луч $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ выходит из точки P_1 под углом α к оси OX : вне линзы он прямолинеен, внутри — искривлён, поскольку лучи отклоняются в сторону более высокого показателя преломления.

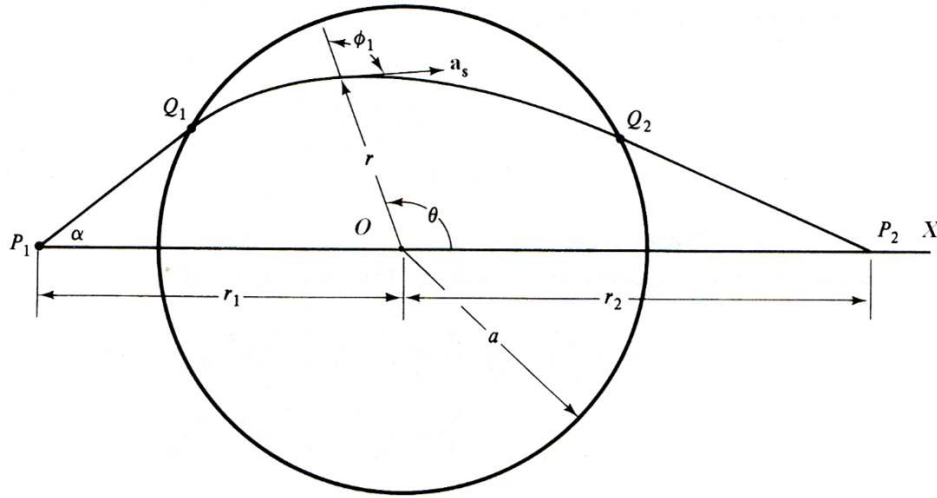


Рисунок 2.2 — Поперечное сечение сферически симметричной линзы

Люнеберг показал [5], что при надлежащем выборе функции $n(r)$ все лучи, покидающие точку P_1 , после прохождения линзы сходятся в единой фокальной точке P_2 . В каноническом случае P_1 лежит на поверхности линзы, а P_2 находится на бесконечности: излучение точечного источника преобразуется в плоскую волну.

Требование фокусировки для всех лучей с $K_1 \in [0, a]$ сводится к интегральному уравнению Абеля. Введя нормированные переменные $r' = r/a$, $K = K_1/a$,

$\rho(r') = r'n(r')$, это уравнение принимает вид:

$$f(K) = \int_{r'_m}^1 \frac{K dr'}{r' \sqrt{\rho^2(r') - K^2}}, \quad (2.4)$$

где $f(K)$ — известная функция угловых условий фокусировки, r'_m — минимальное расстояние луча от центра. Вспомогательная функция $T(\rho) = -\ln r'(\rho)$ и её поведение показаны на рисунке 2.3.

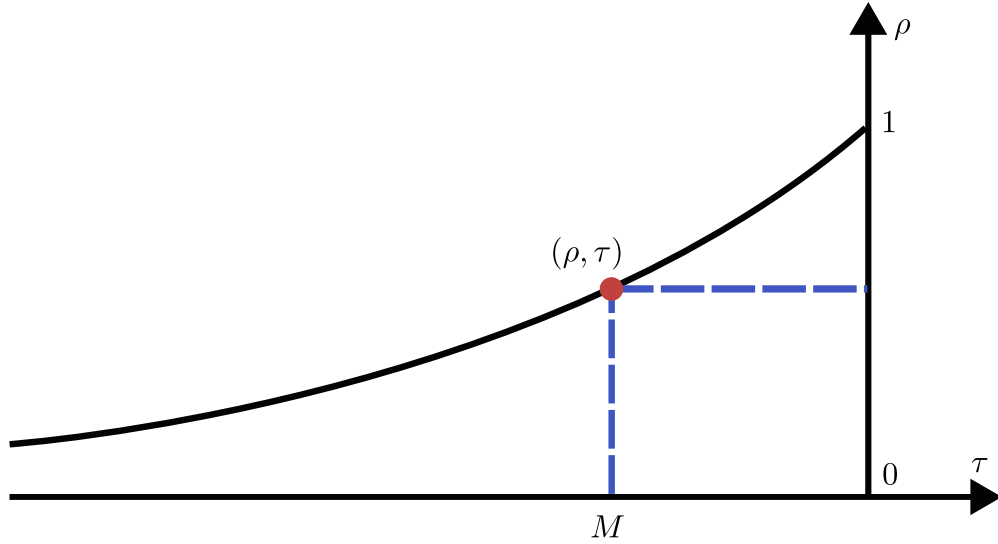


Рисунок 2.3 — Функция $\rho(\tau)$ при $\tau = \ln r' = -T(\rho)$

Стандартная инверсия интегрального уравнения Абеля — умножение подынтегрального выражения на ядро $(K^2 - \rho^2)^{-1/2}$, перестановка порядка интегрирования и замена переменной — даёт [5]:

$$T(\rho) - T(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{\rho}^{\lambda} \frac{f(K)}{\sqrt{K^2 - \rho^2}} dK. \quad (2.5)$$

Применение этого результата к геометрии «источник на поверхности — фокус на бесконечности» ($r_1 = a$, $r_2 \rightarrow \infty$) и обратный переход к $n(r')$ приводит к обобщённому закону Люнеберга:

$$n\left(\frac{r}{a}\right) = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}. \quad (2.6)$$

Это требование может быть удовлетворено средой с проницаемостью равной проницаемости свободного пространства и с диэлектрической постоянной уменьшающейся от 2 при $r = 0$ до границы при $r_1 = a$. На практике это достигается при помощи семейства концентрических слоёв, каждый из которых

обладает постоянным коэффициентом преломления, благодаря чему можно реализовать ступенчатое приближение к (2.6).

На практике фазовый центр облучателя расположен чуть дальше поверхности ЛЛ. Если первая фокальная точка лежит на расстоянии $r_1 > a$, а вторая фокальная точка $r_2 \rightarrow \infty$, обобщённый закон Люнеберга (2.6) обобщается [5]: вспомогательный интеграл $\omega(\rho, r')$ принимает вид (здесь $r'_1 = r_1/a$, $\rho = r'n(r')$, $\Delta = \pi$):

$$\begin{aligned} \ln[n(r')] = \omega(\rho, r') &= \frac{1}{\Delta} \int_{\rho}^{r'_1} \frac{\arcsin\left(\frac{K}{r'_1}\right)}{\sqrt{K^2 - \rho^2}} dK \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \int_1^{r'_1} \frac{\arcsin\left(\frac{K}{r'_1}\right)}{\sqrt{K^2 - \rho^2}} dK \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{r'_1}\right)^2} \right] - \frac{1}{\Delta} \int_1^{r'_1} \frac{\arcsin\left(\frac{K}{r'_1}\right)}{\sqrt{K^2 - \rho^2}} dK, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Множитель $1/\Delta = 1/\pi$ есть константа обращения интегрального уравнения Абеля и от вида профиля не зависит: профильная специфика заключена в подынтегральной угловой функции отклонения. Именно это позволяет единой процедурой получать как классический закон Люнеберга (2.6), так и линзу Итона, и синтезированный класс линз-дефлекторов (4.4). Численное решение (2.7) приводит к $n(r')$. Результаты можно представить в форме ряда кривых 2.4:

Вторичное апертурное распределение антенны на базе ЛЛ может быть выведено с помощью рисунка 2.5. Луч, который покидает точечный источник в точке P_1 и входит в линзу в точке Q_1 , выходит из линзы в точке Q_2 , параллельной оси OX . Координаты точки Q_2 (a, θ).

Из уравнения (2.2) и рисунка 2.5 получаем:

$$r_1 \sin \alpha = a \sin \varphi = a \sin \theta, \quad (2.8)$$

Пусть $I(\alpha, \beta)$ — интенсивность излучения точечного источника, расположенного в точке P_1 . Тогда $I(\alpha, \beta) \sin \alpha d\alpha d\beta$ является потоком мощности через линзу. Если (y, β) — полярные координаты во вторичной апертурной плоскости, $x = \text{constant}$ и $P(y, \beta)$ — плотность потока мощности в этой плоскости, тогда:

$$I(\alpha, \beta) \sin \alpha d\alpha d\beta = P(y, \beta) y dy d\beta, \quad (2.9)$$

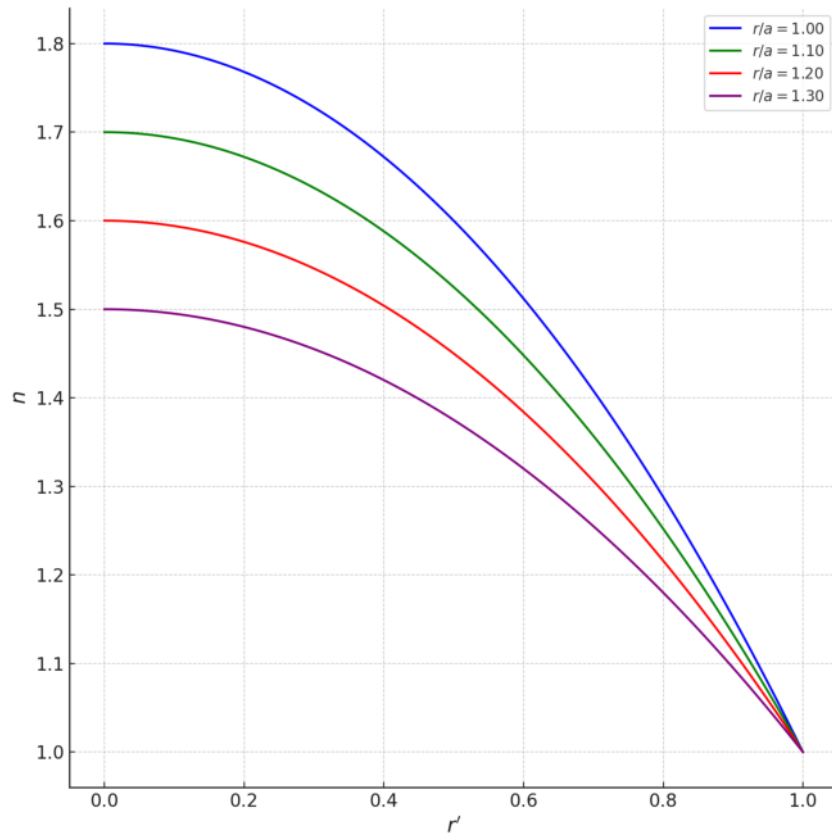


Рисунок 2.4 — Радиальное распределение изменения диэлектрической проницаемости, соответствующее закону (2.6)

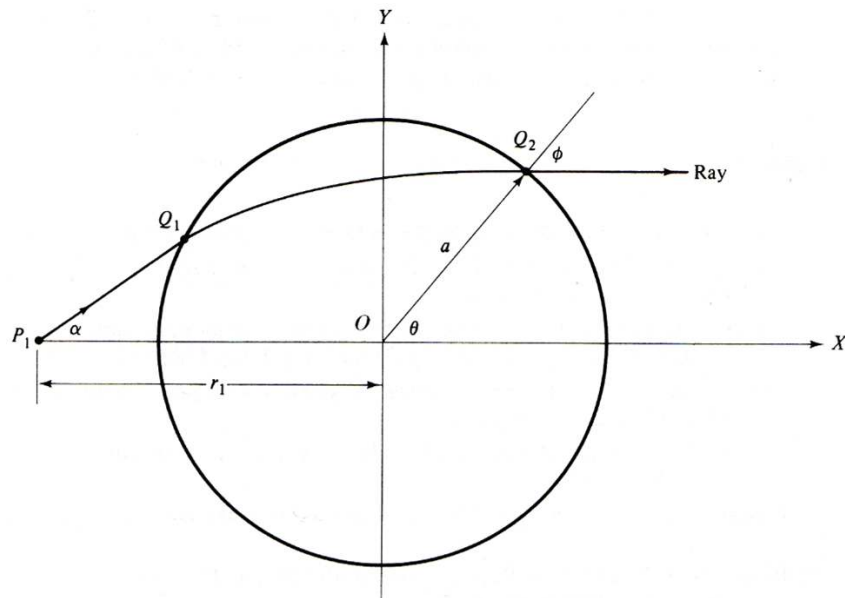


Рисунок 2.5 — Фокусировка в дальней зоне линзы Лунеберга

Поскольку $y = a \sin \theta$, используя (2.8) получаем:

$$y = r_1 \sin \alpha, \quad dy = r_1 \cos \alpha d\alpha, \quad (2.10)$$

Произведя замену в (2.9) получаем отношение:

2.3 Функция Грина в классическом представлении

В классическом представлении функцией Грина называется решение дифференциального уравнения с σ -функцией в «правой части», которое удовлетворяет определённым граничным условиям. Получив функцию Грина, можно найти решение *линейного дифференциального уравнения* при любой «правой части». Например, решение скалярного уравнения Гельмгольца $u(r)$ в бесконечном однородном пространстве при наложении условия излучения, записывается в виде функции Грина следующим образом [83], (2.11):

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk \cdot |r-r'|}}{|r - r'|} \quad (2.11)$$

где: $|r - r'|$ — расстояние между точкой источника r и точкой наблюдения r' . Стоит обратить внимание, что точки источника отмечаются штрихованными координатами и расположены в записи *справа*. Точки наблюдения располагаются *слева*. Этот подход описания точек источника и наблюдения сохранялся по мере развития метода с использованием функций Грина.

В декартовой системе координат расстояние между точками источника и точками наблюдения $|r - r'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны.

Функция Грина (2.11) описывает поле точечного источника. При известной функции Грина нетрудно найти решение для любого заданного распределения источников. Если необходимо найти поле произвольного распределения источников, то оно находится как суперпозиция полей точечных источников. При известном потенциале точечного заряда, описанного функцией $G(r, r')$, потенциал $u(r)$ заданного распределения зарядов плотностью $\rho(r')$ определяется как суперпозиция потенциалов точечных зарядов путём интегрирования по объёму (2.12):

$$u(r) = \int_{V'} \rho(r') \cdot G(r, r') dV' \quad (2.12)$$

Задача определения потенциала (2.12) является скалярной, поэтому функция Грина в данной постановке — скалярная. Если *линейное дифференциальное уравнение* является векторным, то для нахождения функции Грина в правую часть вводится единичный вектор. В этом случае, в качестве решения уравнения

будет получен вектор с тремя компонентами. Большинство задач определения электромагнитных полей — задачи векторного типа, соответственно, функция Грина в таких задачах имеет более сложный вид.

Простейшим источником в электродинамике является точечный заряд (диполь, не имеющий направления). Чтобы описать поле такого источника во всем трёхмерном пространстве в декартовой системе координат, нужно найти по три составляющих поля диполей, ориентированных вдоль осей: x, y, z . Другими словами, найти решение уравнения при трёх ориентациях единичного вектора в правой части. Можно назвать эту постановку — задачей векторного типа. В такой задаче функция Грина определяется девятью скалярными величинами G_{ij} , представляющими собой тензор второго ранга:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

В случае решения задачи в сферической системе координат, тензор второго ранга будет представлять собой комбинацию компонентов, ориентированных вдоль осей этой системы. В (2.14) показан принцип выделения интересующих нас компонентов тензора при решении задачи возбуждения элементарным точечным источником тока $\mathbf{j}$, описываемого компонентами θ, φ, r :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} G_{rr'} & G_{r\theta'} & G_{r\varphi'} \\ G_{\theta r'} & G_{\theta\theta'} & G_{\theta\varphi'} \\ G_{\varphi r'} & G_{\varphi\theta'} & G_{\varphi\varphi'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_{r'} \\ j_{\theta'} \\ j_{\varphi'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{rr'} & 0 & 0 \\ 0 & G_{\theta\theta'} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\varphi\varphi'} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

где: $G_{rr'}, G_{\theta\theta'}, G_{\varphi\varphi'}$ — тензорные или скалярные произведения единичных векторов в сферической системе координат.

Если поля являются векторными, как в случае электромагнитного поля, то функция Грина является тензором:

$$\overline{\mathbf{G}}(r, r') = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} \cdot \overline{\mathbf{E}}, \quad (2.15)$$

где: $\vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{a}_r \vec{a}_{r'} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{a}_\theta \vec{a}_{\theta'} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{a}_\varphi \vec{a}_{\varphi'} \end{pmatrix}$ — в случае использования сферической системы координат;

$\vec{a}_r, \vec{a}_{r'}, \vec{a}_\theta, \vec{a}_{\theta'}, \vec{a}_\varphi, \vec{a}_{\varphi'}$ являются тензорными, или скалярными произведениями единичных векторов в сферической системе координат.

Уравнение (2.15) является фактически уравнением для определения электрического и магнитного векторных потенциалов.

Метод функций Грина является распространённым способом отыскания полей E и H по заданным источникам электрического j^e и магнитного j^m токов. В представлении тензора G_{ij} есть i компонента поля E , порождаемая j -направленным элементом электрического тока. Другими словами, запись тензора описывает поля, обусловленные токами. Определенная таким образом запись функции Грина может быть использована для расчёта электрического поля $\vec{E}$ от произвольного ориентированного и распределённого в объёме V' электрического тока $\vec{j}^e(r')$.

$$\vec{E}(r) = \int_{V'} |\Gamma(r, r')| \vec{j}^e(r') dV' \quad (2.16)$$

При работе с аппаратом ТФГ удобнее использовать не матричное представление функции Γ (2.14), а так называемую *диадную* запись [146]:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \Gamma_{xx} \vec{a}_x \vec{a}_x + \Gamma_{yx} \vec{a}_y \vec{a}_x + \Gamma_{zx} \vec{a}_z \vec{a}_x + \Gamma_{xy} \vec{a}_x \vec{a}_y + \Gamma_{yy} \vec{a}_y \vec{a}_y + \Gamma_{zy} \vec{a}_z \vec{a}_y \\ & + \Gamma_{xz} \vec{a}_x \vec{a}_z + \Gamma_{yz} \vec{a}_y \vec{a}_z + \Gamma_{zz} \vec{a}_z \vec{a}_z \end{aligned} \quad (2.17)$$

где: $\vec{a}_x \vec{a}_z$ — диадное произведение единичных векторов (в отличие от скалярного или векторного произведения точка или крестик между множителями не ставится).

Напряженность электрического и магнитного полей $\vec{E}(r), \vec{H}(r)$ связана с функциями $\bar{\bar{G}}(r, r')$ дифференциальными операторами. Один из важных принципов, заложенных в аппарат тензорных функций Грина заключается в выделении необходимых для анализа компонентов тензора. В общем случае при наличии электрических $\vec{I}^E(r')$ и магнитных $\vec{I}^M(r')$ источников, необходимо ввести четыре тензора Грина для решения общей задачи возбуждения.

$$\vec{E}(r) = \int_V \left[\bar{\Gamma}_{11}(r, r') \cdot \vec{I}^E(r') + \bar{\Gamma}_{12}(r, r') \cdot \vec{I}^M(r') \right] dV, \quad (2.18a)$$

$$\vec{H}(r) = \int_V \left[\bar{\Gamma}_{21}(r, r') \cdot \vec{I}^E(r') + \bar{\Gamma}_{22}(r, r') \cdot \vec{I}^M(r') \right] dV, \quad (2.18б)$$

где: $\bar{\Gamma}_{11}(r, r'), \bar{\Gamma}_{21}(r, r')$ — тензоры Грина электрических токов;
 $\bar{\Gamma}_{12}(r, r'), \bar{\Gamma}_{22}(r, r')$ — тензоры Грина магнитных токов;
 r, r' — радиус-векторы точек наблюдения и точек источников в сферической системе координат: r, θ, φ и r', θ', φ' соответственно.

Каждый из введённых тензоров имеет 9 скалярных компонентов. С учётом принципа двойственности электромагнитного поля и условий симметрии по координатам r, r' число скалярных компонентов может быть существенно сокращено. Физические скалярные компоненты тензоров обозначают скалярные компоненты полей, порождаемых скалярными компонентами сторонних токов. Для обозначения этих компонентов используются следующие идентификаторы: цифровые индексы тензора обозначают поля (первая цифра в обозначении тензора) и токи (вторая цифра); буквенный индекс — составляющие точек наблюдения (r, θ, φ) и точек источника (r', θ', φ'). Причём цифре 1 соответствует электрическая компонента поля или тока, цифре 2 — магнитная.

Так, например, тензора Грина, записанный в виде $\bar{\Gamma}_{12}(\theta', \varphi')$, является оператором, преобразующим φ компоненту магнитного тока в θ компоненту электрического поля.

Тензоры Грина могут быть рассчитаны путём разложения по системе векторных гармоник $\vec{M}, \vec{N}, \vec{L}$. Если разложение ведётся по гармоникам $\vec{M}$ и $\vec{N}$ то такие тензоры Грина называются *поперечными*. Для построения векторных гармоник в соответствующей системе координат используется Фурье-разложение и решение Даламбера. Часть записи, связанная с решением Даламбера, называется *характеристической*.

Второй путь записи тензоров Грина заключается в последовательном решении задачи электромагнитного возбуждения для определения скалярных компонентов напряжённости поля от дельтаобразных сторонних токов. При этом подходе можно воспользоваться, например, решением неоднородных уравнений Максвелла в распространённых системах координат.

2.4 Тензорные функции Грина в замкнутом виде для сферических трёхмерных областей

Функция Грина свободного пространства содержит множитель e^{-jkr} , интегрирование источников электромагнитного поля с такой функцией весьма неудобно, так как координаты содержатся под знаком квадратного корня. Для

областей, границы которых совпадают с координатными линиями той или иной системы координат, можно записать тензоры Грина в виде полного или частичного разложения по собственным функциям отрезков координатных линий.

Например, для прямоугольного резонатора функция Грина может быть представлена в виде тройной суммы по собственным функциям каждой из сторон резонатора. Возможно другое представление функции Грина, если в поперечном сечении резонатора поля представлены в виде двойной суммы или интеграла разложения по собственным функциям. А с третьей координатой функции Грина связаны через так называемые характеристические части (решение Даламбера).

В случае анализа многослойной сферической структуры возможно разложение по сферическим функциям (по поверхности шара) и характеристические функции, связанные с радиальной координатой. При этом отрезок, связанный с радиусом, может содержать неоднородные по электрофизическим параметрам свойства, координатные линии при этом должны совпадать с границами областей (слоя). Такой подход позволяет использовать тензорную функцию Грина для анализа таких структур как: металлическая сфера с укрытием, линзы Люнеберга, или в некоторых случаях для элементарных источников излучения и дифракции на объектах простой формы.

Этот подход позволяет записать решение для электромагнитных полей и для основных характеристик дифракции возбуждения в замкнутом виде, что позволяет решать задачи при значительной экономии машинного времени и ресурсов на вычисление. Для применения этого метода необходимо построить тензорные функции Грина от сферических слоистых областей.

Ниже будут записаны тензорные и скалярные компоненты функций Грина в сферической системе координат для ограничений, оговоренных во введении. Тензоры Грина запишем в универсальной форме (2.19):

$$\bar{\bar{G}}_{ij} = \frac{-j}{4\pi r r'} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\varepsilon_m \cdot \cos(m(\varphi - \varphi')) \times \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot \left(\bar{\bar{G}}_{ij}^E \cdot j g_{ij} + \bar{\bar{G}}_{ij}^H \cdot j f_{ij} \right) \right), \quad (2.19)$$

где: символы i, j принимают значение 1 или 2, при этом единица соответствует электрическим полям и токам, двойка — магнитным полям и токам;

здесь и далее штрихованные координаты r', φ' соответствуют координатам сторонних источников, не штрихованные координаты r, φ соответствуют

точкам наблюдения полей;

ε_m — множитель Неймана, при этом $\varepsilon_m = 1$, если $m = 0$, и $\varepsilon_m = 2$, если $m \neq 0$;

$\overline{\overline{G}}_{ij}^E, \overline{\overline{G}}_{ij}^H$ — тензоры, содержащие по четыре скалярные компоненты (учтены только поперечные составляющие полей). Запись для $\overline{\overline{G}}_{22}^E, \overline{\overline{G}}_{22}^H$ приведена в формуле (2.20), запись остальных тензоров приведена в [17];

jg_{ij}, jf_{ij} — характеристические части функции Грина, записанные с учётом определений полей в дальней зоне. Их запись для jg_{11}, jf_{11} приведена в формуле (2.24а) и (2.24б), остальные характеристические части приведены в [17].

$$\overline{\overline{G}}_{22}^E = \overline{\overline{G}}_{22}^H = \begin{vmatrix} \vec{a}_\theta \vec{a}_{\theta'} \cos(m(\varphi - \varphi')) \tau_n^m(\theta) \tau_n^m(\theta') \\ -\vec{a}_\varphi \vec{a}_{\theta'} m \sin(\varphi - \varphi') \pi_n^m(\theta) \tau_n^m(\theta') \\ \vec{a}_\theta \vec{a}_{\varphi'} m \sin(\varphi - \varphi') \tau_n^m(\theta) \pi_n^m(\theta') \\ \vec{a}_\varphi \vec{a}_{\varphi'} \cos(m(\varphi - \varphi')) \pi_n^m(\theta) \pi_n^m(\theta') \end{vmatrix}, \quad (2.20)$$

Тензоры, содержащие по четыре скалярные компоненты, для сферической системы координат приведены ниже в (2.21). Их запись может быть использована для получения выражения при решении других задач в сферической системе координат. Например, позднее в качестве примера будут показаны выражения для получения диаграмм направленности от элементарных электрических излучателей.

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{G}}_{E;11}^T &= \overline{\overline{G}}_{H;22}^T = \\
&= \begin{vmatrix} \vec{a}_\theta \vec{a}_{\theta'} \cos(\varphi - \varphi') \tau_n(\theta) \tau_n(\theta') & -\vec{a}_\varphi \vec{a}_{\theta'} \sin(\varphi - \varphi') \pi_n(\theta) \tau_n(\theta') \\ \vec{a}_\theta \vec{a}_{\varphi'} \sin(\varphi - \varphi') \tau_n(\theta) \pi_n(\theta') & \vec{a}_\varphi \vec{a}_{\varphi'} \cos(\varphi - \varphi') \pi_n(\theta) \pi_n(\theta') \end{vmatrix}, \\
\overline{\overline{G}}_{H;11}^T &= \overline{\overline{G}}_{E;22}^T = \\
&= \begin{vmatrix} \vec{a}_\theta \vec{a}_{\theta'} \cos(\varphi - \varphi') \pi_n(\theta) \pi_n(\theta') & -\vec{a}_\varphi \vec{a}_{\theta'} \sin(\varphi - \varphi') \tau_n(\theta) \pi_n(\theta') \\ \vec{a}_\theta \vec{a}_{\varphi'} \sin(\varphi - \varphi') \pi_n(\theta) \tau_n(\theta') & \vec{a}_\varphi \vec{a}_{\varphi'} \cos(\varphi - \varphi') \tau_n(\theta) \tau_n(\theta') \end{vmatrix}, \\
\overline{\overline{G}}_{E;21}^T &= -\overline{\overline{G}}_{H;12}^T = \\
&= j \begin{vmatrix} -\vec{a}_\theta \vec{a}_{\theta'} \cos(\varphi - \varphi') \pi_n(\theta) \tau_n(\theta') & -\vec{a}_\varphi \vec{a}_{\theta'} \sin(\varphi - \varphi') \tau_n(\theta) \tau_n(\theta') \\ \vec{a}_\theta \vec{a}_{\varphi'} \sin(\varphi - \varphi') \pi_n(\theta) \pi_n(\theta') & -\vec{a}_\varphi \vec{a}_{\varphi'} \cos(\varphi - \varphi') \tau_n(\theta) \pi_n(\theta') \end{vmatrix}, \\
\overline{\overline{G}}_{H;21}^T &= -\overline{\overline{G}}_{E;12}^T = \\
&= j \begin{vmatrix} -\vec{a}_\theta \vec{a}_{\theta'} \cos(\varphi - \varphi') \tau_n(\theta) \pi_n(\theta') & -\vec{a}_\varphi \vec{a}_{\theta'} \sin(\varphi - \varphi') \pi_n(\theta) \pi_n(\theta') \\ \vec{a}_\theta \vec{a}_{\varphi'} \sin(\varphi - \varphi') \tau_n(\theta) \tau_n(\theta') & -\vec{a}_\varphi \vec{a}_{\varphi'} \cos(\varphi - \varphi') \pi_n(\theta) \tau_n(\theta') \end{vmatrix};
\end{aligned} \tag{2.21}$$

где: $\tau_n^m(\theta) = \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}$, $\pi_n^m(\theta) = \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}$ — принятые обозначения в теории дифракции [101];

$\partial P_n^m(\cdot)$ — функция Лежандра степени n и порядков $m = 0, 1 \dots n$.

$\partial P_n^m(\cos(\theta))$ — присоединённые функции Лежандра [147].

$\vec{a}_\theta, \vec{a}_\varphi$ — единичные векторы в сферической системе координат.

Характеристические части функций Грина $g_n(r, r')$ — для *электрических волн*, и $f_n(r, r')$ — для *магнитных*, выводятся из решения неоднородных дифференциальных уравнений (2.22):

$$\frac{\partial^2 g_n(r, r')}{\partial r^2} + k^2 g_n(r, r') = -\delta(r - r'), \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^2 f_n(r, r')}{\partial r^2} + k^2 f_n(r, r') = -\delta(r - r'). \tag{2.23}$$

Решение приведённых уравнений может быть записано для произвольного числа диэлектрических слоёв линзы Люнеберга. Подробнее ход решения будет рассмотрен далее, здесь лишь отметим пример записи решения (2.24).

$$jg_{11} = \frac{j\overset{\leftarrow}{Z}(a)}{\overset{\leftrightarrow}{jZ}(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-jk_0r} = M_n \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-jk_0r} \quad (2.24a)$$

$$jf_{11} = \frac{j}{\overset{\leftrightarrow}{jY}(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-jk_0r} = N_n \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-jk_0r} \quad (2.24б)$$

где: a — радиус исследуемого сферического образования (например линзы Люнеберга);

$k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число;

λ — длина волны;

$\overset{\leftarrow}{Z}(a), \overset{\leftarrow}{Y}(a)$ — ориентированные импедансы и адмитансы для многослойных сферических областей, определяются по рекуррентной методике, описанной в [17–19]. Соответствующий подход, развитый первоначально для цилиндрических слоистых структур [49; 148–156], в настоящей работе последовательно перенесён на сферический случай;

$h_n(.)$ — сферическая функция Бесселя–Риккати [147; 157; 158];

M_n, N_n — коэффициенты введены для упрощения записи напряжённости электрического поля, обозначают параметры среды и будут использованы в дальнейшем для задания типа источника излучения.

Когда в качестве возбудителей структур используются малые (точечные) источники сторонних токов, такие как диполь Герца, элемент Гюйгенса и др., тогда с учётом использования свойств функций Лежандра тензоры Грина преобразуются и содержат один ряд по номерам функций Грина (при $m = 1$). В формуле (2.19) разложение по поперечным координатам θ, φ ведётся методом ряда Фурье. С учётом многослойности структур, подлежащих исследованию, зависимости от координат r, r' определены методом Даламбера [146].

Записанные выше тензоры и характеристические части позволяют записать электрическое поле в дальней зоне от произвольной комбинации поперечных сторонних токов. Вектор напряжённости $\vec{E}$ получается интегрированием ТФГ по сторонним токам:

$$\begin{aligned} \vec{E} = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon_m \cdot \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \times \\ \times \left\{ \begin{aligned} &\langle (\vec{a}_\theta \cos(m\varphi) \tau_m^n(\theta - \theta')) - (\vec{a}_\varphi m \sin(m\varphi) \pi_m^n(\theta - \theta')) \rangle \cdot M_n - \\ &- \langle (\vec{a}_\theta \cos(m\varphi) \pi_m^n(\theta - \theta')) - (\vec{a}_\varphi m \sin(m\varphi) \tau_m^n(\theta - \theta')) \rangle \cdot N_n \end{aligned} \right\} \quad (2.25) \end{aligned}$$

Напряженность магнитного поля в дальней зоне определяется через характеристическое сопротивление свободного пространства.

Полученное решение подходит для произвольной слоистой структуры в сферической системе координат. Обобщенная слоистая структура представлена на рисунке 2.6, где:

- $\varepsilon_q = \varepsilon_0 \varepsilon'_q$, $\mu_q = \mu_0 \mu'_q$;
- ε_0, μ_0 — диэлектрическая и магнитная постоянные вакуума;
- ε'_q, μ'_q — диэлектрическая и магнитная проницаемость слоёв структуры;
- для ε_p, μ_p приняты те же обозначения.

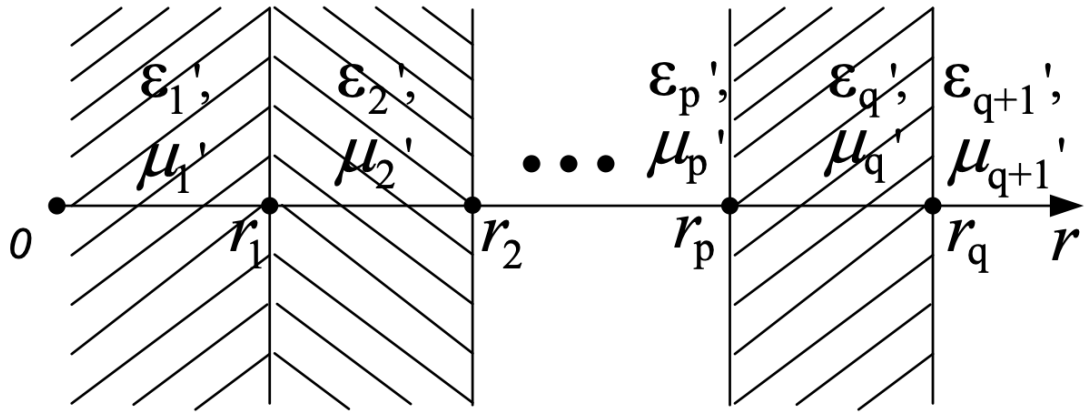


Рисунок 2.6 — Диэлектрическая структура с произвольным числом слоёв

При решении дифференциальных уравнений второго порядка (2.22), учитываются условия расходимости волн для открытых областей и условия непрерывности на границах раздела слоёв диэлектриков. Сопротивления и проводимости пересчитываются в направлении справа и слева по любому произвольному сечению r_0 , в котором рассчитывается полный импеданс $\overset{\leftrightarrow}{Z}_0(r)$, и полный адмитанс $\overset{\leftrightarrow}{Y}_0(r)$. Характеристические части функций Грина определяются следующим выражением:

2.5 Частное представление функций Грина. Рекуррентный пересчёт направленных импедансов и адмитансов по слоям

Изложенное выше общее представление тензорной функции Грина сводит задачу анализа многослойной сферической структуры к вычислению на внешней границе линзы двух величин — направленного импеданса $\overset{\leftarrow}{Z}_n(r)$ для E -волн и направленного адмитанса $\overset{\leftarrow}{Y}_n(r)$ для H -волн. Эти величины определены для каждого номера n сферической векторной гармоник и пересчитываются от

центральной области ($r = 0$) к внешней поверхности ($r = a$) последовательно по всем слоям. Именно рекуррентность пересчёта — ключевая техническая особенность аппарата ТФГ, отличающая его от прямых численных методов, и именно она обеспечивает ускорение расчёта в $10^2 \dots 10^4$ раз по сравнению с FEM-решателями.

2.5.1 Общая форма рекуррентного соотношения

Пусть l — номер слоя многослойной линзы, r_{l-1} и r_l — его внутренний и внешний радиусы, ε_l , μ_l — относительные проницаемости материала слоя, $k_l = k_0 \sqrt{\varepsilon_l \mu_l}$ — локальное волновое число. Задача пересчёта формулируется следующим образом: *зная направленный импеданс $\overset{\leftarrow}{Z}_n(r_{l-1})$ на внутренней границе слоя, вычислить $\overset{\leftarrow}{Z}_n(r_l)$ на внешней границе*. Решение телеграфного уравнения для радиальной координаты в l -м слое имеет вид линейной комбинации двух сферических функций Бесселя — $\hat{j}_n(k_l r)$ и $\hat{h}_n^{(2)}(k_l r)$ (функций Бесселя–Риккати первого и второго рода соответственно). Наложение условий непрерывности тангенциальных составляющих поля E_θ , H_ϕ на границе $r = r_{l-1}$ и последующее отношение электрической и магнитной компонент на $r = r_l$ приводит к следующему дробно-линейному преобразованию:

$$\overset{\leftarrow}{Z}_n(r_l) = j Z_l \frac{\overset{\leftarrow}{Z}_n(r_{l-1}) \hat{j}_n(k_l r_l) + j Z_l \hat{j}'_n(k_l r_l) \cdot \Gamma_l^E}{\overset{\leftarrow}{Z}_n(r_{l-1}) \hat{h}_n^{(2)}(k_l r_l) + j Z_l \hat{h}_n^{(2)'}(k_l r_l) \cdot \Gamma_l^E}, \quad (2.26)$$

где $Z_l = \sqrt{\mu_l / \varepsilon_l} Z_0$ — волновое сопротивление l -го слоя ($Z_0 = 120\pi$ Ом — сопротивление свободного пространства), Γ_l^E — коэффициент, выражаемый через значения $\hat{j}_n$, $\hat{h}_n^{(2)}$ на границе r_{l-1} и предыдущее значение $\overset{\leftarrow}{Z}_n(r_{l-1})$. Производная $\hat{j}'_n$ понимается как производная по аргументу $k_l r$.

Для направленного адмитанса $\overset{\leftarrow}{Y}_n(r)$, описывающего H -волны, пересчёт имеет двойственный вид:

$$\overset{\leftarrow}{Y}_n(r_l) = j Y_l \frac{\overset{\leftarrow}{Y}_n(r_{l-1}) \hat{j}_n(k_l r_l) + j Y_l \hat{j}'_n(k_l r_l) \cdot \Gamma_l^H}{\overset{\leftarrow}{Y}_n(r_{l-1}) \hat{h}_n^{(2)}(k_l r_l) + j Y_l \hat{h}_n^{(2)'}(k_l r_l) \cdot \Gamma_l^H}, \quad (2.27)$$

где $Y_l = 1/Z_l$. Двойственность (2.26) и (2.27) является проявлением принципа электромагнитной дуальности Бабинне и позволяет одной и той же программной процедуре применяться к расчёту обеих поляризаций возбуждающего поля.

2.5.2 Граничные условия в центре линзы и на внешней поверхности

Рекуррентные соотношения (2.26), (2.27) требуют задания начальных значений $\overleftarrow{Z}_n(r_0)$, $\overleftarrow{Y}_n(r_0)$ во внутренней области линзы. В зависимости от центральной конструкции линзы различаются три случая:

1. **Центральный слой — однородный диэлектрик без сингулярности.** При $r \rightarrow 0$ в первом внутреннем слое функция $\hat{h}_n^{(2)}$ имеет особенность, и физически реализуемым решением в окрестности центра является только $\hat{j}_n(k_1 r)$. Начальное условие принимает вид

$$\overleftarrow{Z}_n(r_1) = j Z_1 \frac{\hat{j}'_n(k_1 r_1)}{\hat{j}_n(k_1 r_1)}, \quad \overleftarrow{Y}_n(r_1) = j Y_1 \frac{\hat{j}'_n(k_1 r_1)}{\hat{j}_n(k_1 r_1)}. \quad (2.28)$$

Далее пересчёт идёт по формулам (2.26), (2.27) для $l = 2, 3, \dots, L$.

2. **Центральное ядро — идеально проводящая сфера радиуса r_m** (см. раздел 7.10 главы 7). Тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности проводника обращается в нуль, что эквивалентно условиям

$$\overleftarrow{Z}_n(r_m) = 0, \quad \overleftarrow{Y}_n(r_m) \rightarrow \infty \text{ (или } \hat{Z}_n^H(r_m) = 0), \quad (2.29)$$

после чего рекуррентный пересчёт выполняется стандартным образом от r_m к a .

3. **Идеальный магнитный проводник (условие Неймана для H -волн).** Условие двойственное (2.29) и применяется в задачах с искусственными граничными условиями при моделировании метаматериалов.

На внешней границе линзы ($r = a$) после окончания пересчёта по слоям находится результирующий импеданс $\overleftarrow{Z}_n(a)$ и адмитанс $\overleftarrow{Y}_n(a)$, которые подставляются в выражения для коэффициентов M_n и N_n — характеристических параметров среды, определяющих напряжённость электрического поля в дальней зоне согласно (2.25):

$$M_n = \frac{\overleftarrow{Z}_n(a) \hat{j}_n(k_0 a) - j Z_0 \hat{j}'_n(k_0 a)}{\overleftarrow{Z}_n(a) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 a) - j Z_0 \hat{h}_n^{(2)'}(k_0 a)}, \quad N_n = \frac{\overleftarrow{Y}_n(a) \hat{j}_n(k_0 a) - j Y_0 \hat{j}'_n(k_0 a)}{\overleftarrow{Y}_n(a) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 a) - j Y_0 \hat{h}_n^{(2)'}(k_0 a)}. \quad (2.30)$$

2.5.3 Критерий усечения ряда по n

Спектральная сумма по n в (2.25) формально бесконечна, однако в силу свойств сферических функций Бесселя $\hat{j}_n(k_0a)$, $\hat{h}_n^{(2)}(k_0a)$ вклад мод с $n \gtrsim k_0a$ экспоненциально убывает. Количественный критерий усечения, применяемый в библиотеке *GreenTensor* (см. главу 10), опирается на эмпирическую формулу Уискомба [159] и имеет вид

$$N_{\max} = \lceil k_0a + 4(k_0a)^{1/3} + 2 \rceil, \quad (2.31)$$

где кубический член учитывает область перехода от осциллирующего поведения функций Бесселя к экспоненциальному затуханию, а аддитивная константа задаёт запас на машинную точность. Так, для характерной линзы мм-диапазона с $k_0a = 4\pi \approx 12,6$ критерий даёт $N_{\max} = 24$, что превращает бесконечную сумму в вычислительно тривиальную операцию. При необходимости повышенной точности (регрессионная суррогатная модель, инверсный синтез) порядок усечения задаётся вручную параметром `toch`.

Рекуррентные соотношения (2.26)–(2.30) и критерий усечения (2.31) вместе образуют полный вычислительный алгоритм расчёта электромагнитного поля в многослойной линзе Люнеберга и её модификациях и лежат в основе программной реализации библиотеки *GreenTensor* (раздел 10).

2.5.4 Зоны поля и условие применимости дальнезонного представления

Развитый выше аппарат позволяет вычислять электромагнитное поле в *любой* точке наблюдения $r \geq a$: радиальная зависимость переносится точными функциями Риккати–Бесселя $\hat{j}_n(k_0r)$ и Риккати–Ханкеля $\hat{h}_n^{(2)}(k_0r)$, а рекуррентные соотношения (2.26)–(2.30) определяют коэффициенты разложения вне зависимости от удалённости точки наблюдения. Тем не менее физическая интерпретация результатов и сопоставление с измерениями требуют явного указания зоны поля, в которой эти результаты получены. Следуя классической теории антенн [137; 160], пространство вокруг излучающей структуры с наибольшим

линейным размером апертуры $D = 2a$ разделяют на три зоны:

$$\begin{aligned} \text{реактивная ближняя зона:} & \quad r < 0,62\sqrt{D^3/\lambda}, \\ \text{ближняя излучающая зона (Френеля):} & \quad 0,62\sqrt{D^3/\lambda} \leq r \leq 2D^2/\lambda, \\ \text{дальняя зона (Фраунгофера):} & \quad r > 2D^2/\lambda. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Здесь $D = 2a$ — диаметр проекции сферической линзы на картинную плоскость; критерии (2.32) классически выведены для плоской апертуры и применяются к сферической структуре как стандартное инженерное приближение.

Граница дальней зоны $r_{\text{дз}} = 2D^2/\lambda$ (*граница Фраунгофера*) получается из допустимого искривления фазового фронта по апертуре. Точка на краю апертуры удалена от точки наблюдения на оси, отстоящей на расстояние r , на величину, большую, чем центр апертуры, на

$$\Delta = \sqrt{r^2 + (D/2)^2} - r \approx \frac{D^2}{8r}. \quad (2.33)$$

Приняв в качестве допустимого максимума фазовую ошибку по краю апертуры $\leq \pi/8$, что эквивалентно разности хода $\Delta \leq \lambda/16$, из (2.33) получаем $D^2/(8r) \leq \lambda/16$, то есть $r \geq 2D^2/\lambda$ — общепринятый критерий дальней зоны, отвечающий максимальной фазовой ошибке $\pi/8$ по апертуре [137]. За этой границей фронт волны можно считать плоским, форма диаграммы направленности перестаёт зависеть от расстояния, а поле спадает строго как $1/r$.

Именно выполнение последнего условия делает законным предельный переход к асимптотике Риккати–Ханкеля

$$\hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) \xrightarrow[k_0 r \rightarrow \infty]{} j^{n+1} e^{-jk_0 r}, \quad (2.34)$$

из которого в формулах излучения и рассеяния (например, (2.48)) возникает характерный множитель $e^{-jk_0 r}/(k_0 r)$ (принятая в работе временная зависимость $e^{j\omega t}$, уходящая волна — $\hat{h}_n^{(2)}$). Таким образом, все интегральные и угловые характеристики линзы — диаграммы направленности и рассеяния, КНД, коэффициент усиления, ЭПР и кросс-поляризационные сечения — по построению относятся к дальней зоне. Поле в ближней излучающей зоне (Френеля) и в реактивной ближней зоне вычисляется тем же аппаратом без приближения (2.34) — прямой подстановкой точной функции $\hat{h}_n^{(2)}(k_0 r)$ при конечном r ; необходимость в этом возникает, в частности, при анализе взаимного влияния близко расположенных облучателя и поверхности линзы.

Для характерной четырёхслойной линзы, рассматриваемой далее при сопоставлении с пакетом Ansys HFSS (радиус $a = 9$ см, $k_0 a \approx 6\pi$, рабочая частота $f = 10$ ГГц, длина волны $\lambda = 3$ см, $D = 18$ см), границы зон по (2.32) составляют

$$\begin{aligned} r_{\text{Френ}} &\approx 0,62\sqrt{D^3/\lambda} \approx 27 \text{ см}, \\ r_{\text{дз}} &= \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2 \cdot 18^2}{3} \text{ см} \approx 216 \text{ см} \approx 2,2 \text{ м}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Следовательно, корректное измерение диаграммы направленности такой линзы и её сопоставление с расчётом по методу ТФГ должны проводиться на удалении не ближе $\approx 2,2$ м от центра структуры; на меньших дистанциях наблюдаемое распределение поля принадлежит зоне Френеля и не совпадает с дальнезонной диаграммой. Взаимное расположение зон и соответствующие им представления поля показаны на рисунке 2.7.

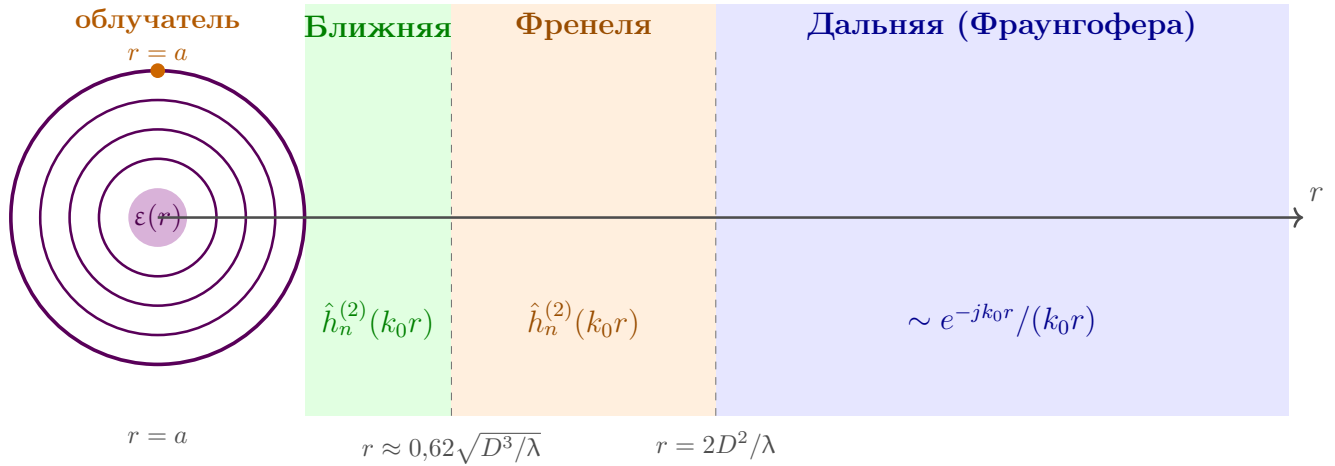


Рисунок 2.7 — Зоны поля сферической линзы Лüneберга с облучателем на поверхности: реактивная ближняя, ближняя излучающая (Френеля) и дальняя (Фраунгофера). Границы зон определяются критериями (2.32); точное ядро $\hat{h}_n^{(2)}(k_0 r)$ описывает поле во всех трёх зонах, тогда как дальнезонное представление с множителем $e^{-jk_0 r}/(k_0 r)$ применимо при $r > 2D^2/\lambda$

2.6 Асимптотические представления для полиномов Лежандра и сферических функций Бесселя

При численной реализации аппарата ТФГ критично контролировать погрешность усечения ряда (2.31). Асимптотическое поведение сферических функций Бесселя–Риккати при $n > k_0 a$ описывается соотношениями [147; 157]:

$$\hat{j}_n(x) \sim \frac{1}{(2n+1)!!} x^{n+1} \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+3)} + \dots \right), \quad n \gg x, \quad (2.36)$$

откуда видно экспоненциальное затухание вклада высоких мод в спектральную сумму. Аналогичный результат для функций второго рода даёт расходямость $\hat{h}_n^{(2)}(x) \sim +j(2n-1)!! x^{-n}$, однако в формулах (2.30) это расхождение компенсируется сокращением с числителем, и итоговые коэффициенты M_n, N_n остаются ограниченными и убывающими с ростом n .

Для полиномов Лежандра $P_n(\cos \theta)$ при больших n справедлива асимптотика Дарбу–Лапласа:

$$P_n(\cos \theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad 0 < \theta < \pi, \quad (2.37)$$

амплитуда которой убывает как $n^{-1/2}$, но остаётся ограниченной на всём угловом интервале. Это обеспечивает равномерную сходимость диаграммы рассеяния (2.25) вплоть до критических областей $\theta \rightarrow 0, \pi$, где асимптотика (2.37) теряет применимость и требуется прямой расчёт по рекурсии (В.9) приложения В.

Контроль сходимости ряда по n в библиотеке *GreenTensor* выполняется по методическому принципу, аналогичному параметру ΔS конечно-элементных решателей Ansys HFSS: пользователю задаётся допустимое относительное изменение суммы при увеличении $N_{\max}$ на единицу (по умолчанию 10^{-4}), при выходе за которое расчёт автоматически прекращается. Этот критерий делает процедуру ТФГ самокалибрующейся и снимает необходимость эмпирического подбора $N_{\max}$ для каждой новой конфигурации линзы.

2.7 Интегральные соотношения между собственными функциями разных порядков

Вопросы построения полного ортогонального базиса собственных функций для слоистых координатных структур классически рассматривались в теории круглых волноводов с радиально-симметричным диэлектрическим заполнением [161–164] и в задачах излучения сторонних источников сквозь плоскостойкие среды [165]. Аналогичные соотношения используются далее в настоящей главе для сферических слоистых сред; их прямой аналог в радиальной геометрии — интегралы произведений сферических функций Бесселя и Ханкеля, вычисляющиеся аналитически с помощью рекуррентных соотношений справочной литературы [147; 157].

2.8 Примеры решения задач дифракции

Рассмотрим использование частных записей функций Грина, когда сторонние источники располагаются вдоль меридиональных линий слоистой сферической структуры, где углы $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ — точки расположения первичных источников излучения вдоль этих линий, при этом $\varphi' = 0$.

Пример 1. Вдоль меридиональной линии $\varphi' = 0$ располагается три дипольных излучателя, положение которых характеризуется координатами $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$. Излучатели расположены над проводящей сферой с диэлектрической подложкой. Относительная диэлектрическая проницаемость подложки $\epsilon = 15 - j5$. Электрический радиус от центра проводящей сферы до поверхности диэлектрического укрытия $k_0 a = 4 \cdot \pi$. Электрический радиус проводящей сферы $k_0 b = 0,75 \cdot k_0 a$. Геометрия задачи изображена на рисунке 2.8, где точками A1, A2, A3 показано условное положение дипольных облучателей.

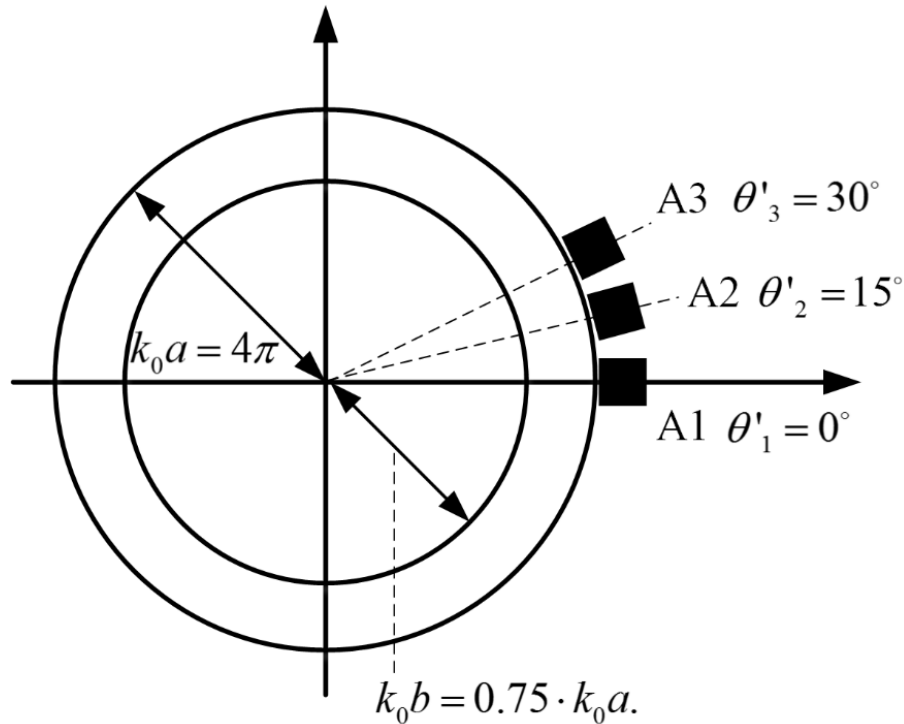


Рисунок 2.8 — Расположение дипольных облучателей над проводящей сферой с укрытием

Для дипольного облучателя коэффициенты M_n, N_n в (2.25) имеют вид:

$$M_n = \frac{j\overleftarrow{Z}(a)}{j\overleftarrow{Z}(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)} \quad (2.38a)$$

$$N_n = \frac{j}{j\overleftarrow{Y}(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)} \quad (2.38б)$$

На рисунке 2.9 приведены расчётные диаграммы рассеяния от отдельных излучателей:

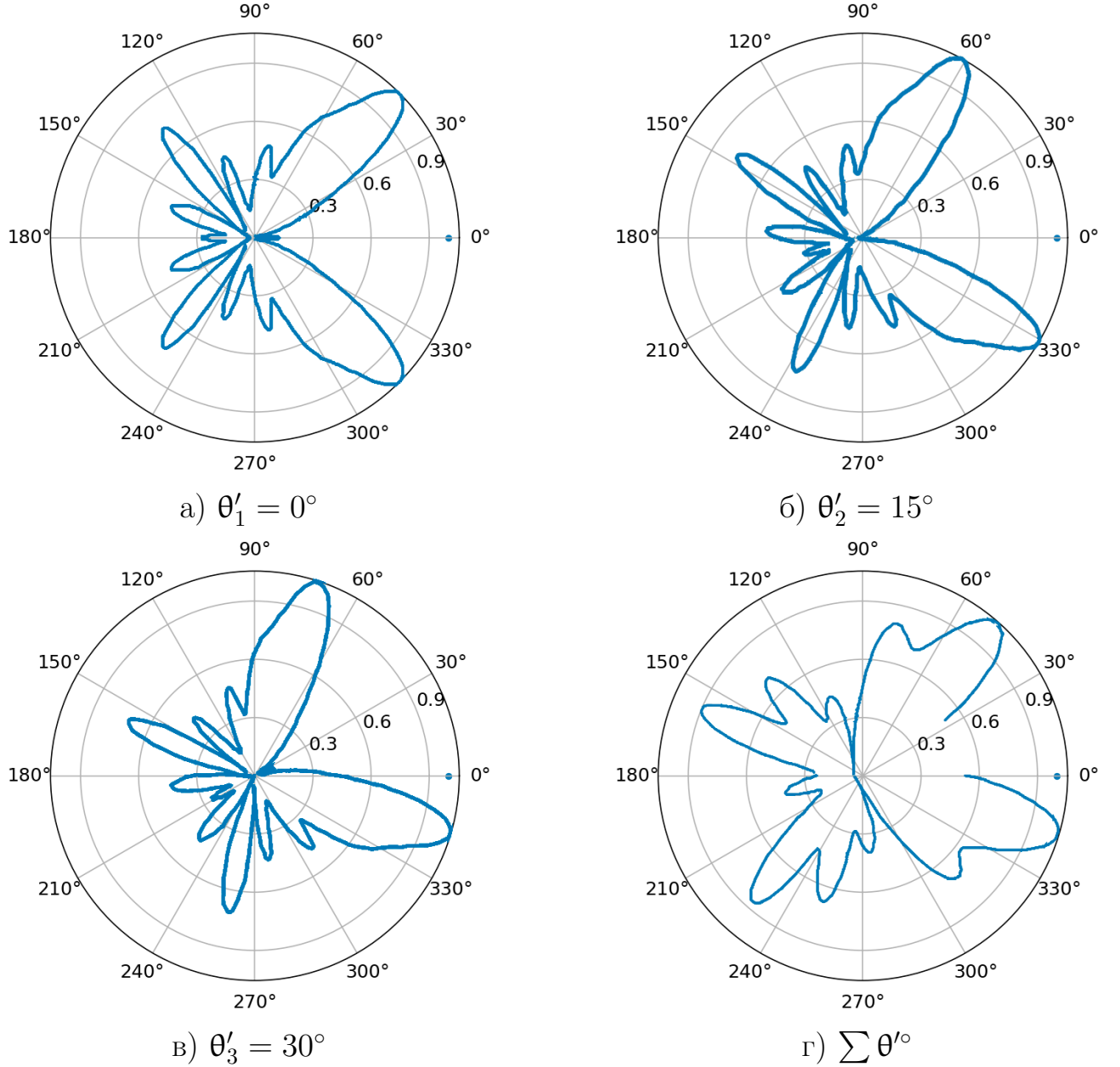


Рисунок 2.9 — Диаграммы рассеяния на проводящей сфере с диэлектрическим укрытием

Форма диаграмм рассеяния не зависит от угла поворота первичного облучателя из-за симметрии исследуемой проводящей сферы с укрытием.

2.8.1 Интегральные характеристики рассеяния: σ_s , σ_r , σ_p

В дополнение к диаграммам рассеяния (2.9) для оценки эффективности конструкции в радиолокационных приложениях удобно использовать интегральные характеристики рассеяния: **полное сечение рассеяния σ_s , обратное (моностатическое) сечение рассеяния σ_r и поляризационное сечение σ_p** , отвечающее доле энергии, рассеянной в кросс-поляризационный канал. Через коэффициенты Ми a_n, b_n многослойной сферической линзы, рассчитанные изложенным методом тензоров Грина, эти величины записываются в стандартной форме [17; 166]:

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{k_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (2.39a)$$

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k_0^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (-1)^n (a_n - b_n) \right|^2, \quad (2.39б)$$

$$\sigma_p = \sigma_s \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) |a_n - b_n|^2}{2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2)}. \quad (2.39в)$$

Сечение σ_p обращается в нуль для произвольной структуры с импедансным согласованием $a_n = b_n$ (например, для магнетодиэлектрической ЛЛ при $\varepsilon(r) = \mu(r)$, см. 7.7), что и определяет его роль индикатора поляризационных потерь.

На рисунке 2.10 приведены зависимости $\sigma_s/\pi a^2$, $\sigma_r/\pi a^2$ и $\sigma_p/\pi a^2$ от безразмерного электрического размера $k_0 a$ в диапазоне $[0; 25]$ для оптимизированной восьмислойной аппроксимации профиля Люнеберга по табл. 56 (строка $N = 8$): радиусы $r_l/a = \{0,34; 0,49; 0,59; 0,69; 0,77; 0,84; 0,91; 0,97\}$ и проницаемости $\varepsilon_l = \{1,94; 1,82; 1,71; 1,59; 1,47; 1,35; 1,24; 1,12\}$. Расчёт выполнен по программной реализации многослойного решателя Ми с пропагацией логарифмической производной (см. 10.9); число удерживаемых гармоник выбрано по правилу Уискомба $N_W = k_0 a \sqrt{\varepsilon_{\max}} + 4(k_0 a \sqrt{\varepsilon_{\max}})^{1/3} + 2 + 8$.

Кривые позволяют выделить три характерные особенности.

Во-первых, главный максимум полного сечения рассеяния, $\sigma_s \approx 2,50 \pi a^2$, достигается при $k_0 a \approx 7,9$; при дальнейшем росте размера линзы σ_s слабо осциллирует около асимптотики геометрической оптики $\sigma_s \rightarrow 2 \pi a^2$ (парадокс экстинкции [159; 166]). Это согласуется с поведением, проверенным на однородной диэлектрической сфере в 10.9.

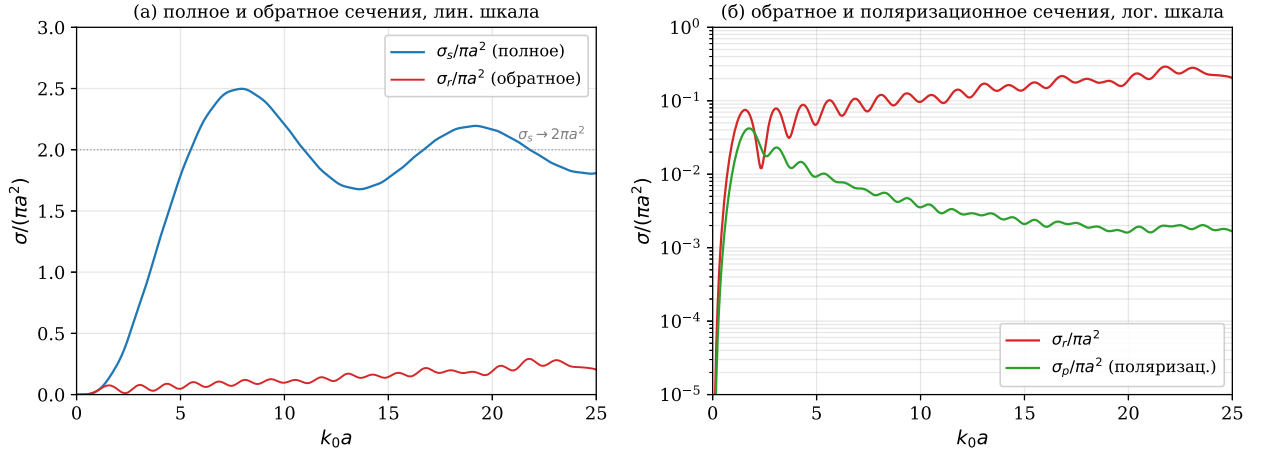


Рисунок 2.10 — Сечения рассеяния восьмислойной оптимизированной линзы Лунеберга в зависимости от электрического размера $k_0 a \in [0; 25]$: (а) полное σ_s и обратное σ_r сечения в линейном масштабе с асимптотической границей $\sigma_s \rightarrow 2\pi a^2$; (б) обратное σ_r и поляризационное σ_p сечения в логарифмическом масштабе

Во-вторых, обратное сечение рассеяния остаётся существенно меньше полного во всём интервале $k_0 a$: в диапазоне $k_0 a \in [5; 25]$ среднее отношение $\sigma_r/\sigma_s \approx 0,08$, максимум $\approx 0,15$. Это — прямое следствие фокусирующих свойств ЛЛ: основная энергия рассеивается в направлении плоской волны от первичного источника на противоположной поверхности, а не назад к нему.

В-третьих, поляризационные потери σ_p малы во всём диапазоне: типичные значения $\sigma_p/\sigma_s \sim 10^{-3}$, максимум $\sigma_p/\pi a^2 \approx 4,2 \cdot 10^{-2}$ при $k_0 a \approx 1,7$ (резонанс длинноволнового рассеяния), на $k_0 a > 5$ — $\sigma_p/\pi a^2 < 10^{-2}$. Тонкая структура осцилляций кривой $\sigma_p(k_0 a)$ соответствует пересечениям резонансов отдельных гармоник a_n и b_n при сферическом стратифицированном профиле; в рамках формализма ТФГ поляризационная компонента возникает исключительно из-за разности магнитного и электрического импедансов слоёв ($a_n \neq b_n$), которая в чисто диэлектрической ЛЛ ($\mu = 1$) пропорциональна $|\epsilon_l - 1|$ и убывает с ростом числа слоёв N . Полученные значения служат верхней оценкой кросс-поляризационной развязки и подтверждают качество восьмислойной оптимизированной аппроксимации в широком частотном диапазоне.

Расчётные значения σ_s , σ_r , σ_p как функции $k_0 a$ доступны в виде CSV-таблицы (`_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/b1_sigma_sweep.csv`).

2.8.2 Расширенный набор интегральных характеристик: попутное рассеяние и поглощение

Сводный аппарат школы Б. А. Панченко [17; 58] в своей наиболее полной форме [167] включает шесть интегральных характеристик ЛЛ при дифракции плоской волны: помимо введённых в 2.8.1 полного σ_s , обратного σ_r и поляризационного σ_p сечений естественно дополнительно ввести **попутное (forward) сечение рассеяния σ_f , сечение поглощения σ_a и коэффициент направленности переизлучения вперёд D_f** . Через коэффициенты Ми a_n, b_n многослойной ЛЛ они выражаются:

$$\sigma_f = \frac{\pi}{k_0^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n + b_n) \right|^2, \quad (2.40a)$$

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{k_0^2} \Re \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n + b_n), \quad \sigma_a = \sigma_{\text{ext}} - \sigma_s, \quad (2.40б)$$

$$D_f = \frac{4\pi}{\sigma_s} \frac{d\sigma_s}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} = \frac{\sigma_f}{\sigma_s}. \quad (2.40в)$$

Формула (2.40б) следует из оптической теоремы [166] и обращается в нуль для бездиссипативной диэлектрической линзы ($\Im \epsilon \equiv 0$); численная проверка для рассмотренной восьмислойной аппроксимации (см. 2.8.1) даёт $|\sigma_a/\pi a^2| \leq 10^{-15}$ во всём диапазоне $k_0 a \in [0; 25]$, что подтверждает корректность реализации многослойного решателя на машинной точности.

Принципиально новой характеристикой по сравнению с 2.8.1 является попутное сечение σ_f и сопутствующая ему направленность D_f , отвечающие за *фокусирующую* способность линзы. Их зависимость от электрического размера $k_0 a$ для оптимизированной 8-слойной аппроксимации профиля Люнеберга (профиль из табл. 56, строка $N = 8$) приведена на рис. 2.11; численные значения $\sigma_s, \sigma_r, \sigma_p, \sigma_f, D_f$ в четырёх типичных опорных точках $k_0 a \in \{2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi\}$ собраны в табл. 10.

Таблица 10 — Расширенный набор интегральных характеристик 8-слойной оптимизированной ЛЛ при $k_0 a \in \{2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi\}$

$k_0 a$	$\sigma_s/\pi a^2$	$\sigma_r/\pi a^2$	$\sigma_p/\pi a^2$	$\sigma_f/\pi a^2$	D_f
2π	2,28	0,064	$7,73 \cdot 10^{-3}$	64,2	28,1
4π	1,73	0,122	$2,93 \cdot 10^{-3}$	117,8	68,3
6π	2,19	0,182	$1,76 \cdot 10^{-3}$	430,4	196,7
8π	1,81	0,194	$1,65 \cdot 10^{-3}$	523,8	288,9

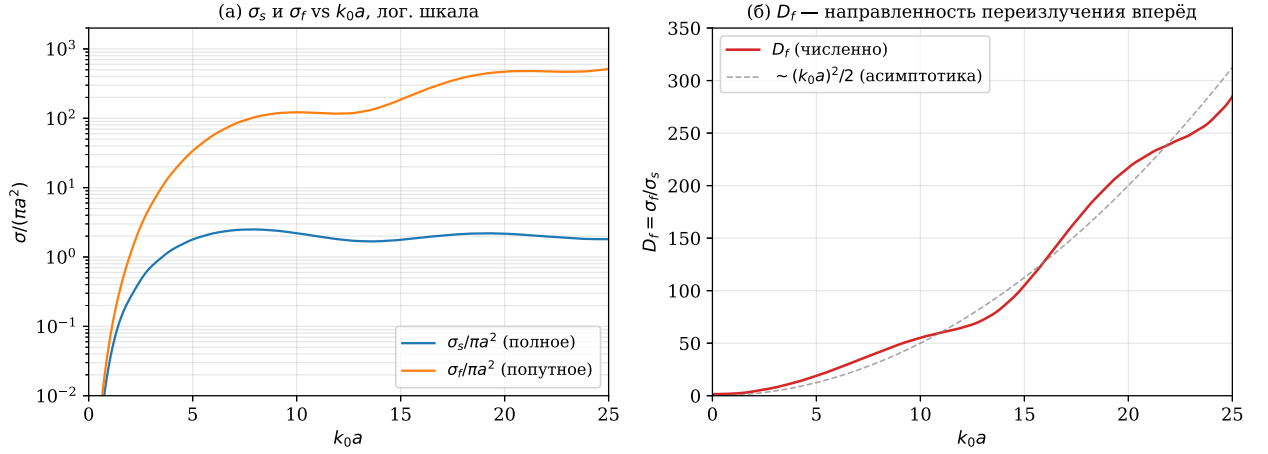


Рисунок 2.11 — Расширенный набор сечений рассеяния и направленность переизлучения вперёд 8-слойной оптимизированной ЛЛ в зависимости от $k_0a \in [0; 25]$: (а) полное σ_s и попутное σ_f сечения в логарифмическом масштабе — σ_f превосходит σ_s на 2–3 порядка в области $k_0a \gtrsim 6$, что и есть прямое следствие фокусировки; (б) направленность переизлучения вперёд $D_f = \sigma_f/\sigma_s$ растёт по квадратичному закону $D_f \sim (k_0a)^2/2$ (геометрооптический предел диафрагмы $D = (k_0a)^2\eta$), что подтверждает корректность аппарата ТФГ в коротковолновой асимптотике

Главный физический вывод: уже при $k_0a = 2\pi$ ($a = \lambda$) попутное сечение в $\sigma_f/\sigma_s \approx 28$ раз превосходит полное, а при $k_0a = 8\pi$ ($a = 4\lambda$) — в ~ 290 раз; рост $D_f \propto (k_0a)^2$ в коротковолновой асимптотике совпадает с теоретическим пределом для круглой апертуры $D_{\max} = (k_0a)^2\eta_a$ при коэффициенте использования поверхности $\eta_a \approx 0,46$, что согласуется с эффективностью ЛЛ как пассивного фокусирующего рассеивателя. Это позволяет рассматривать ЛЛ не только как антенну с источником на её поверхности (2.8.1 и далее), но и как *пассивный высоконаправленный переизлучатель плоской волны* — режим, представляющий самостоятельный интерес для задач формирования дополнительных лучей или подавления помех в заданном направлении (см. [167]).

Расширенные значения $\sigma_s, \sigma_r, \sigma_p, \sigma_f, \sigma_a, D_f$ как функции k_0a доступны в виде CSV-таблицы — `_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/d1_sigma_extended.csv`, исходный код — `d1_sigma_extended.py`.

2.8.3 Влияние диэлектрических потерь на интегральные характеристики

Аппарат, развитый в 2.8.1 и 2.8.2, естественно расширяется на случай линзы из диэлектрика с потерями введением комплексной проницаемости каждого

слоя:

$$\tilde{\varepsilon}_l = \varepsilon_l(1 + j \operatorname{tg} \delta), \quad (2.41)$$

где $\operatorname{tg} \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ — тангенс угла диэлектрических потерь, принятый одинаковым для всех слоёв. В этом случае сечение поглощения (2.40б) обращается в положительную величину, а оптическая теорема даёт энергобаланс $\sigma_{\text{ext}} = \sigma_s + \sigma_a$, выполняющийся численно с относительной погрешностью $\leq 10^{-12}$ во всём исследованном диапазоне $\operatorname{tg} \delta \in [0; 0,1]$ (проверка реализации многослойного решателя).

Зависимость интегральных характеристик 8-слойной оптимизированной ЛЛ от $\operatorname{tg} \delta$ при фиксированном электрическом размере $k_0 a = 4\pi$ приведена в табл. 11. По методике расчёт повторяет таблицу 2 из [167] (там она построена для шестислойной аппроксимации) с расширением до 6-коэффициентного аппарата.

Таблица 11 — Влияние диэлектрических потерь на интегральные характеристики восьмислойной оптимизированной ЛЛ при $k_0 a = 4\pi$

$\operatorname{tg} \delta$	$\sigma_s/\pi a^2$	$\sigma_r/\pi a^2$	$\sigma_a/\pi a^2$	$\sigma_f/\pi a^2$	D_f
0	1,73	0,123	0	117,8	68,3
0,001	1,70	0,115	0,026	118,3	69,4
0,005	1,62	0,088	0,124	120,0	74,2
0,01	1,52	0,063	0,232	122,0	80,0
0,03	1,26	0,017	0,545	128,4	102,2
0,05	1,10	0,006	0,730	132,9	120,6
0,1	0,94	0,003	0,935	139,6	147,9

Результаты в табл. 11 допускают три содержательные интерпретации.

Во-первых, обратное сечение рассеяния σ_r *монотонно убывает* с ростом $\operatorname{tg} \delta$ (от $0,123 \pi a^2$ при бездиссипативной ЛЛ до $0,003 \pi a^2$ при $\operatorname{tg} \delta = 0,1$, т. е. в ~ 40 раз). Физический механизм понятен: потери в материале поглощают волну на пути её прохождения через линзу до и после отражения от внутренних границ, экспоненциально подавляя обратнорассеянную мощность. Это делает ЛЛ с потерями *более скрытной* в радиолокационном смысле, чем бездиссипативная, на ~ 10 дБ при $\operatorname{tg} \delta = 0,01$ и на ~ 16 дБ при $\operatorname{tg} \delta = 0,03$.

Во-вторых, сечение поглощения σ_a при $\operatorname{tg} \delta = 0,01$ (типичная величина для пористого радиопрозрачного диэлектрика) составляет $\sim 13\%$ от полного сечения рассеяния, что согласуется со значением $\eta_3 \approx 0,93\text{--}0,99$ в табл. 17 и 18, рассчитанным независимым способом. При $\operatorname{tg} \delta = 0,1$ ЛЛ становится фактически согласованным поглотителем ($\sigma_a/\sigma_{\text{ext}} = 0,5$).

В-третьих, направленность переизлучения вперёд D_f *возрастает* с ростом $\operatorname{tg} \delta$ (с 68,3 при бездиссипативном случае до 147,9 при $\operatorname{tg} \delta = 0,1$). Эффект, отмеченный также в [167], объясняется ослаблением рассеянного поля в освещённой полусфере при сохранении фокусирующей способности фронта линзы; тем самым относительная доля попутного рассеяния в σ_s растёт, что и формально проявляется в коэффициенте $D_f = \sigma_f/\sigma_s$. Поэтому выводимые из таблицы значения D_f для ЛЛ с потерями при $\operatorname{tg} \delta \geq 0,03$ следует трактовать как *кажущиеся*: они характеризуют не столько улучшение фокусировки, сколько подавление побочных каналов рассеяния.

В сумме данные табл. 11 позволяют рекомендовать $\operatorname{tg} \delta \leq 0,01$ как практически приемлемый порог для антенных применений ЛЛ (омические потери $\leq 13\%$, КУ ослабление $\leq 0,6$ дБ); более высокие значения $\operatorname{tg} \delta$ оправданы только в специальных задачах радиолокационной маскировки, где целью является именно поглощение, а не переизлучение. Расчётные данные для воспроизводимости — в `_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/d2_loss_sweep.py` и сопровождающей его таблице `d2_loss_sweep.csv`.

2.8.4 Бистатическое сечение рассеяния

Введённые в 2.8.1 и 2.8.2 интегральные характеристики $\sigma_s, \sigma_r, \sigma_p, \sigma_f$ описывают *полную мощность* рассеянного поля в заданных направлениях (вперёд, назад, кросс-полу). Для практически важных задач (бистатическая радиолокация, оценка диаграммы рассеяния, выбор положения приёмника относительно передатчика) необходимо знание *углового распределения* рассеянной мощности — **бистатического сечения** $\sigma_{\text{bist}}(\theta)$. Через скалярные амплитудные функции рассеяния Бора–Хаффмана $S_1(\theta), S_2(\theta)$ оно определяется как (для неполяризованной падающей волны):

$$\frac{d\sigma_{\text{bist}}}{d\Omega}(\theta) = \frac{1}{2k_0^2}(|S_1(\theta)|^2 + |S_2(\theta)|^2), \quad (2.42)$$

где

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)], \quad (2.43a)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + b_n \pi_n(\cos \theta)], \quad (2.43б)$$

а угловые функции $\pi_n(\cos \theta) = P_n^1(\cos \theta)/\sin \theta$ и $\tau_n(\cos \theta) = dP_n^1(\cos \theta)/d\theta$ вычисляются по стандартной рекуррентной схеме [166]. В нормированном виде $Q_{\text{bist}}(\theta) = (|S_1|^2 + |S_2|^2)/(k_0 a)^2$ предельные значения соответствуют ранее введённым интегральным коэффициентам: $4\pi(d\sigma_{\text{bist}}/d\Omega)|_{\theta=0} = \sigma_f$ (2.40а), $4\pi(d\sigma_{\text{bist}}/d\Omega)|_{\theta=\pi} = \sigma_r$ (2.39б).

Для оценки роли фокусирующих свойств линзы в сравнении с однородным рассеивателем расчёт $Q_{\text{bist}}(\theta)$ выполнен для двух конфигураций при одинаковом электрическом размере $k_0 a = 4\pi$:

1. Восьмислойная оптимизированная ЛЛ (Fuchs) — профиль из табл. 56, строка $N = 8$.
2. Однородная диэлектрическая сфера с $\epsilon = 2$, $\mu = 1$, a — то же значение электрического радиуса (опорный пример без фокусировки; среднее арифметическое профиля Люнеберга на $r/a \in [0; 1]$ есть $\bar{\epsilon} = 5/3 \approx 1,67$, что близко к $\epsilon = 2$ как простой эталон).

Результаты приведены на рис. 2.12; численные значения $Q_{\text{bist}}(\theta)$ в опорных точках — в табл. 12.

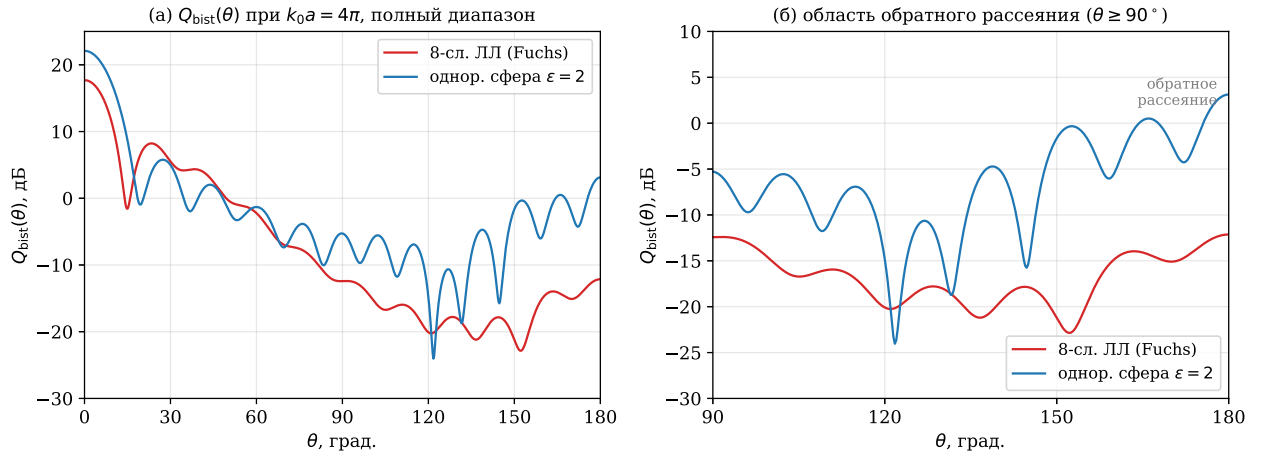


Рисунок 2.12 — Бистатическое сечение рассеяния $Q_{\text{bist}}(\theta)$ в логарифмическом масштабе при $k_0 a = 4\pi$: (а) полный диапазон $\theta \in [0; \pi]$ для двух конфигураций — 8-слойной оптимизированной ЛЛ (красная кривая) и однородной диэлектрической сферы $\epsilon = 2$ (синяя); (б) увеличенный фрагмент для области обратного рассеяния $\theta \geq 90^\circ$, где наглядно видно преимущество ЛЛ как пассивного рассеивателя с пониженной обратной заметностью

Из рис. 2.12 и табл. 12 следуют три качественных вывода.

Во-первых, в области *прямого рассеяния* $\theta \in [0; 60^\circ]$ обе конфигурации дают близкие значения Q_{bist} (различие не более 5 дБ), что естественно: главный вклад в дальней зоне даёт фронт падающей волны, проходящий через объект;

Таблица 12 — Численные значения $Q_{\text{bist}}(\theta)$ для 8-слойной ЛЛ и однородной сферы $\varepsilon = 2$ при $k_0 a = 4\pi$ в опорных точках угла рассеяния

θ , град.	$Q_{\text{bist}}^{\text{ЛЛ}}$, дБ	$Q_{\text{bist}}^{\text{сф}}$, дБ	$Q_{\text{bist}}^{\text{ЛЛ}}/Q_{\text{bist}}^{\text{сф}}$, дБ
0	+17,7	+22,1	−4,4
30	+5,5	+5,0	+0,5
60	−2,2	−1,3	−0,9
90	−12,4	−5,3	−7,1
120	−20,1	−14,9	−5,2
150	−21,2	−1,6	−19,6
180	−12,1	+3,1	−15,2

для линзы и однородной сферы геометрия этой части потока рассеянного поля принципиально не различается.

Во-вторых, в области *обратного рассеяния* $\theta \in [90^\circ; 180^\circ]$ ЛЛ показывает на 7–20 дБ *меньшие* значения Q_{bist} по сравнению с однородной сферой; на углах $\theta \geq 150^\circ$ разница достигает 19 дБ. Это — следствие фокусирующих свойств линзы: значительная доля рассеянной мощности концентрируется в направлении прохождения, а не возвращается назад. Такое поведение имеет прикладную ценность для маскировки объекта от моно- и квазимоностатических радаров.

В-третьих, угловая структура $Q_{\text{bist}}(\theta)$ для линзы демонстрирует более крупный и менее изрезанный главный лепесток в области прямого рассеяния и плавную деградацию в обратное полушарие, в то время как однородная сфера демонстрирует характерную «рябь» Ми (множественные узкие пики и провалы). Это отражает *гладкость профиля* $\varepsilon(r)$ ступенчатой аппроксимации Люнеберга по сравнению с резким единственным переходом на границе однородной сферы.

Расчёт выполнен по программной реализации, описанной в 10.9; угловое разрешение $0,25^\circ$, число гармоник $N_{\text{max}} = 38$ (по правилу Уискомба для $k_0 a = 4\pi$). Расчётные данные доступны в виде CSV-таблицы `_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/c3_bistatic.csv`, исходный код — `c3_bistatic.py`.

2.8.5 Угловой портрет кросс-поляризации

Бистатическое сечение $Q_{\text{bist}}(\theta)$ из 2.8.4 объединяет вклады обоих каналов поляризации (перпендикулярного и параллельного плоскости рассеяния), что соответствует приёмнику с неполяризационно-чувствительной апертурой.

Для практически важной задачи оценки *поляризационных потерь* рассеяния необходимо отдельно проследить угловое поведение *кросс-поляризационной* компоненты — сигнала, ортогонального состоянию падающей поляризации в системе наблюдателя.

При линейно-поляризованной падающей плоской волне $\vec{E}_{\text{inc}} = E_0 \hat{x} e^{-jk_0 z}$ дальнейшее рассеянное поле сферически-симметричного объекта, спроецированное на декартов базис $(\hat{x}, \hat{y})$ лабораторной системы координат, имеет нетривиальную компоненту E_y [166]:

$$E_y(\theta, \varphi) = -\frac{E_0}{2} \sin(2\varphi) [S_1(\theta) - \cos \theta S_2(\theta)] \frac{e^{-jk_0 r}}{-jk_0 r}. \quad (2.44)$$

Зависимость $\sin(2\varphi)$ показывает, что кросс-поляризация обращается в нуль в главных плоскостях рассеяния ($\varphi = 0, \pi/2$) и максимальна при $\varphi = \pi/4$. Соответствующее дифференциальное угловое сечение кросс-поляризации в плоскости максимального уровня нормируется как

$$Q_p(\theta) = \frac{|S_1(\theta) - \cos \theta S_2(\theta)|^2}{(k_0 a)^2}. \quad (2.45)$$

Из соотношений Бора-Хаффмана для амплитудных функций следуют две очевидные предельные точки: при $\theta = 0$ имеем $S_1(0) = S_2(0)$ (отсутствие деполаризации в направлении падения), при $\theta = \pi$ выполняется $S_1(\pi) = -S_2(\pi)$, что также даёт $S_1 - \cos \pi S_2 = S_1 + S_2 = 0$. Таким образом, кросс-поляризация исчезает в форвардном и обратном направлениях; её пик — в зоне промежуточных углов рассеяния, где конкуренция между двумя векторными гармониками $\vec{M}_n$ и $\vec{N}_n$ оказывается максимальной.

Расчёт $Q_p(\theta)$ выполнен для тех же двух конфигураций, что и в 2.8.4: восьмислойной оптимизированной ЛЛ (Fuchs) и однородной диэлектрической сферы $\epsilon = 2$ при $k_0 a = 4\pi$. Результаты представлены на рис. 2.13: панель (а) сравнивает $Q_p(\theta)$ обеих структур, панель (б) показывает разложение на три канала ($Q_{\parallel} = |S_2|^2/(k_0 a)^2$, $Q_{\perp} = |S_1|^2/(k_0 a)^2$, Q_p) для линзы. Численные значения в опорных точках — в табл. 13.

Из рис. 2.13 и табл. 13 следуют три качественных вывода.

Во-первых, для обеих структур $Q_p(\theta)$ закономерно стремится к нулю при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow \pi$, что является прямым следствием соотношения (2.44) и не зависит от формы профиля $\epsilon(r)$ — это *фундаментальное свойство* осесимметричных рассеивателей при линейной поляризации падающей волны.

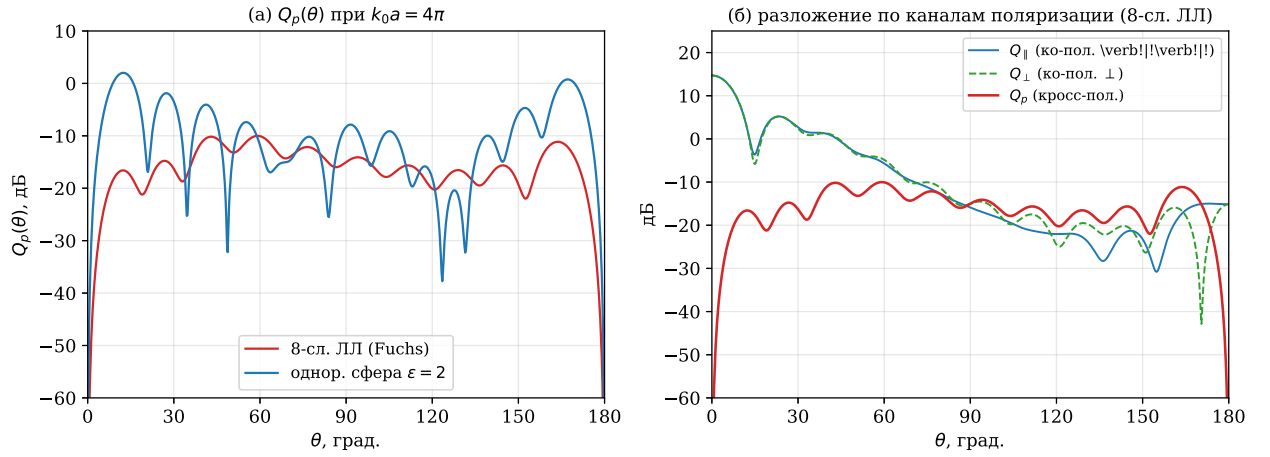


Рисунок 2.13 — Угловое распределение кросс-поляризационного дифференциального сечения $Q_p(\theta)$ при $k_0a = 4\pi$ в логарифмическом масштабе. (а) $Q_p(\theta)$ для 8-слойной оптимизированной ЛЛ (красная кривая) и однородной диэлектрической сферы $\epsilon = 2$ (синяя): обе кривые исчезают при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow \pi$, как следует из (2.44); в промежутке ЛЛ имеет существенно меньший уровень. (б) Разложение на три канала для ЛЛ: ко-поляризационные $Q_{\parallel}$ (синяя сплошная) и $Q_{\perp}$ (зелёная штриховая) и кросс-поляризационный Q_p (красная сплошная); Q_p существенно ниже ко-поляризационных компонент во всём диапазоне

Таблица 13 — Численные значения $Q_p(\theta)$ для 8-слойной ЛЛ и однородной сферы $\epsilon = 2$ при $k_0a = 4\pi$ в опорных точках угла рассеяния

θ , град.	$Q_p^{\text{ЛЛ}}$, дБ	$Q_p^{\text{сф}}$, дБ	$Q_p^{\text{ЛЛ}}/Q_p^{\text{сф}}$, дБ
5	−25,8	−7,3	−18,5
15	−17,7	+1,0	−18,6
30	−16,3	−3,5	−12,8
45	−10,5	−7,5	−3,0
60	−10,1	−11,8	+1,7
90	−15,0	−8,3	−6,7
120	−20,1	−18,1	−2,0
135	−19,1	−14,6	−4,5
150	−19,3	−5,7	−13,6
175	−24,6	−8,9	−15,7

Во-вторых, локализация максимума Q_p существенно различается между линзой и однородной сферой. Для ЛЛ максимум приходится на $\theta \approx 59^\circ$ — область, соответствующая краю основного лепестка диаграммы переизлучения линзы. Для однородной сферы максимум сдвинут к $\theta \approx 12,5^\circ$, в зону доминирующего вклада низкпорядковых Ми-резонансов в передней полусфере. Иными словами, ЛЛ перераспределяет кросс-поляризацию из области почти-форвардного рассеяния в широкую угловую полосу, тогда как однородная сфера локализует её в узком конусе вблизи направления падения.

В-третьих, интегральный по всему углу θ (с учётом азимутального усреднения с фактором $\langle \sin^2(2\varphi) \rangle_\varphi = 1/2$) уровень кросс-поляризации:

$$\frac{\sigma_p}{\pi a^2} = \frac{1}{2} \int_0^\pi Q_p(\theta) \sin \theta \, d\theta \quad (2.46)$$

для 8-слойной ЛЛ составляет $3,71 \cdot 10^{-2}$ против $1,36 \cdot 10^{-1}$ для однородной сферы — разница $-5,65$ дБ. Это *количественное обоснование* использования градиентной линзы Люнеберга в задачах подавления интегральных поляризационных потерь, чем подкрепляется положение № 5, выносимое на защиту: импедансное согласование и фокусирующее действие профиля $\varepsilon(r)$ совместно снижают уровень нежелательной кросс-поляризации в дальней зоне.

Расчёт выполнен по тому же программному стеку, что и в 2.8.4 (исходный код — `cross_pol_angular.py`, расчётные данные — CSV-таблица `_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/cross_pol_angular.csv`, угловое разрешение $0,25^\circ$, число гармоник $N_{\max} = 38$).

Пример 2. Рассмотрим пример расчёта диаграммы рассеяния на линзе Люнеберга, когда облучатель типа элемента Гюйгенса перемещается вдоль меридиональной линии. При этом вид основной расчётной формулы (2.20) сохраняется, а коэффициенты M_n, N_n имеют вид:

$$M_n = \frac{\overleftarrow{Z}(a) - j}{j \overleftarrow{Z}(a) \cdot h_n(k_0 a) - h'_n(k_0 a)} \quad (2.47a)$$

$$N_n = \frac{\overleftarrow{Y}(a) - j}{j \overleftarrow{Y}(a) \cdot h_n(k_0 a) - h'_n(k_0 a)} \quad (2.47б)$$

На рисунке 2.14 приведены рассчитанные диаграммы рассеяния для трёх положений первичного облучателя на поверхности линзы и суммарная диаграмма решетки облучателей. При расчётах используется четырёхслойная ступенчатая равношаговая аппроксимация закона Люнеберга для линзы с электрическим размером $k_0 a = 4\pi$ [5].

Расчеты в этом примере получены с использованием общей и частной записи функции Грина. Вследствие сферической симметрии линзы Люнеберга диаграммы рассеяния одинаковы как и в предыдущей задаче. Таким образом, полная запись функции Грина позволяет рассчитать основные характеристики сферических структур: диаграммы направленности и рассеяния, КНД, сопротивление излучения, поляризационные потери и т. д.

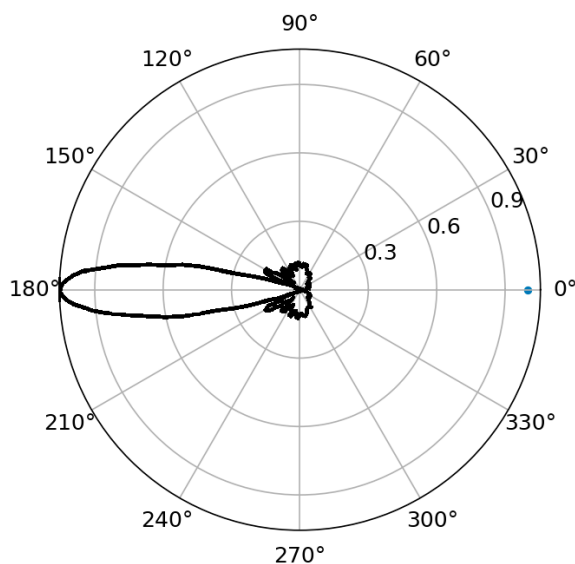
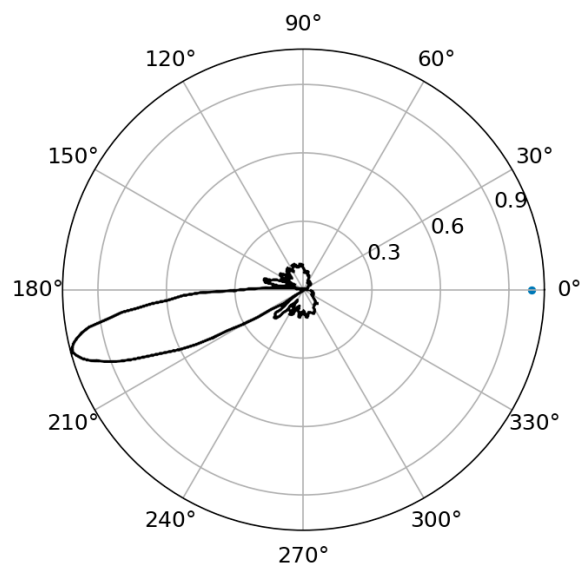
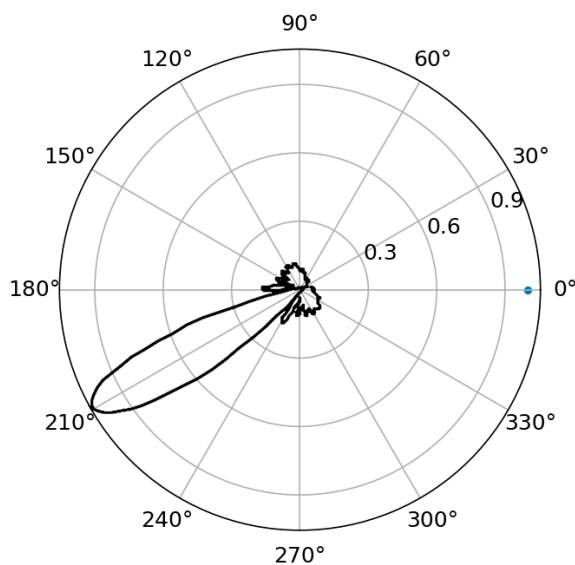
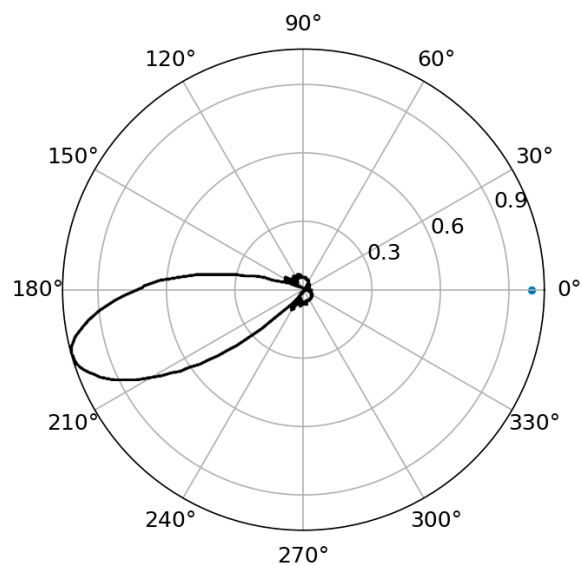
а) $\theta'_1 = 0^\circ$ б) $\theta'_2 = 15^\circ$ в) $\theta'_3 = 30^\circ$ г) $\sum \theta'^o$

Рисунок 2.14 — Диаграммы рассеяния на ЛЛ, облучаемой элементом Гюйгенса

2.9 Электромагнитное возбуждение линзы Люнеберга. Антенная задача

В этом разделе описано решение задачи *антенной задачи*, т.е. определяются направленные характеристики ЛЛ при облучении одним из двух типов облучателей круговой поляризации: крестообразным вибратором с рефлектором и апертурным элементом однонаправленного излучения (рупор либо открытый конец волновода). Рассчитываются диаграммы направленности по основной (on) и кросс-поляризации (kn). Появление kn обусловлено наличием границ разделов слоёв и кривизной поверхностей линзы. Также рас-

считываются интегральные характеристики антенны на базе ЛЛ: коэффициент направленного действия и коэффициент усиления.

Рассмотрим возбуждение ЛЛ точечными источниками **круговой поляризации**, расположенными на поверхности линзы. Запись тензоров Грина для этого случая упрощается: по азимутальным гармоникам достаточно учитывать только члены с $m = 1$ (задача с первой азимутальной вариацией поля [17]). В результате вектор напряжённости в дальней зоне принимает вид:

$$\vec{E}(\theta) = E_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\varphi} \times \left\{ \begin{aligned} &(\vec{a}_\theta \cdot \tau_n(\theta) + j\vec{a}_\varphi \cdot \pi_n(\theta)) \cdot (M'_n + jM''_n) - \\ &-(\vec{a}_\theta \cdot \pi_n(\theta) + j\vec{a}_\varphi \cdot \tau_n(\theta)) \cdot (N'_n + jN''_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

где: $\tau_n(\theta) = \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta}$, $\pi_n(\theta) = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}$ [101];

$\partial P_n^1(\cos \theta)$ — функция Лежандра [168].

Вид коэффициентов M_n и N_n зависит от типа облучателя.

При облучении ЛЛ **вибратором с рефлектором**, коэффициенты имеют следующий вид:

$$M'_n = \frac{j\overset{\leftarrow}{Z}_n(a)}{j\overset{\leftarrow}{Z}_n(a) \cdot h_n(k_0 a) - h'_n(k_0 a)}, \quad (2.49a)$$

$$N'_n = \frac{1}{j\overset{\leftarrow}{Y}_n(a) \cdot h_n(k_0 a) - h'_n(k_0 a)}, \quad (2.49б)$$

$$M''_n = \frac{j\overset{\leftarrow}{Z}_n(a_r)}{j\overset{\leftarrow}{Z}_n(a_r) \cdot h_n(k_0 a_r) - h'_n(k_0 a_r)}, \quad (2.49в)$$

$$N''_n = \frac{1}{j\overset{\leftarrow}{Y}_n(a_r) \cdot h_n(k_0 a_r) - h'_n(k_0 a_r)}, \quad (2.49г)$$

где: a_r — положение рефлектора.

$h_n(x)$ — сферические функции Бесселя–Риккати и $h'_n(x)$ их производные [147].

$\overset{\leftarrow}{Z}(a), \overset{\leftarrow}{Y}(a)$ — ориентированные импедансы и адмитансы в направлении *налево*. Определяются последовательным пересчётом от внешней границы ЛЛ к центру через частичные области-слои.

При облучении линзы **апертурным излучателем**:

$$M'_n = \frac{j\overleftarrow{Z}_n(a) - j}{j\overleftarrow{Z}_n(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)}, N'_n = \frac{j\overleftarrow{Y}_n(a) - j}{j\overleftarrow{Y}_n(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)}, \quad (2.50a)$$

$$M''_n = 0, N''_n = 0, \quad (2.50б)$$

Представленные выражения позволяют оценить направленные характеристики ЛЛ при облучении точечными источниками круговой поляризации: крестообразным вибратором с рефлектором и апертурным элементом однонаправленного излучения. Практический интерес представляют диаграммы направленности по *основной* (*он*) и *кросс-поляризации* (*кп*). Появление поля (*кп*) обусловлено наличием границ разделов слоёв и кривизной поверхностей линзы. Полученные выражения позволяют рассчитать интегральные характеристики антенны на базе ЛЛ: коэффициент направленного действия (*КНД*) и коэффициент усиления (*КУ*). Расчет характеристик антенны с подобными точечными источниками полезен и с точки зрения получения опорных (базовых) параметров системы.

Из общего выражения (2.48) для напряжённости электрического поля, (*он*) и (*кп*) определяются как:

$$E_{\text{он}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{E} \cdot (\vec{a}_\theta + j\vec{a}_\varphi) \quad (2.51a)$$

$$E_{\text{кп}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{E} \cdot (\vec{a}_\theta - j\vec{a}_\varphi) \quad (2.51б)$$

Под (*кп*) понимается поле противоположного направления вращения. В формулах (2.51) за основную поляризацию принято поле правого вращения. В качестве примера на рисунке 2.15 в полярной системе координат приведены диаграммы по основной и кросс-поляризационной составляющим для линзы радиусом $k_0a = 2\pi$ ($2a = 2\lambda$) при облучении вибратором с рефлектором. Поля на рисунках 2.15а и 2.15б имеют общую нормировку.

Для линзы того же диаметра, облучаемой апертурным излучателем, диаграммы представлены на рисунках 2.16. Так же, как и в предыдущем примере, поля имеют общую нормировку.

С увеличением радиуса линзы концентрация энергии в направлении $\theta = 180^\circ$ увеличивается. На рисунке 2.17 в декартовой системе координат в логарифмическом масштабе представлены диаграммы направленности по *он* и *кп*

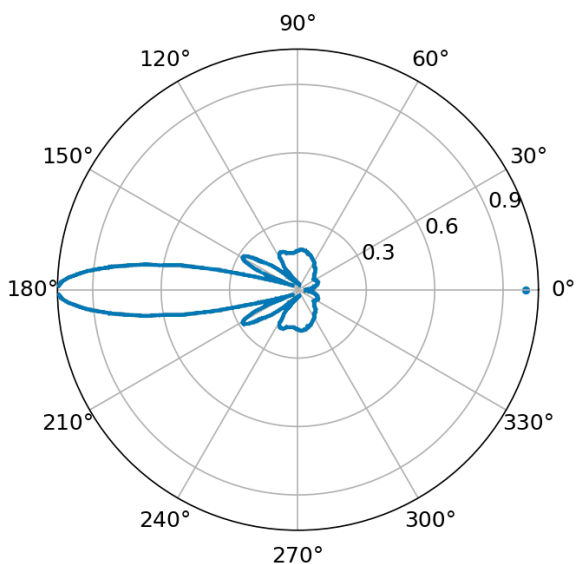
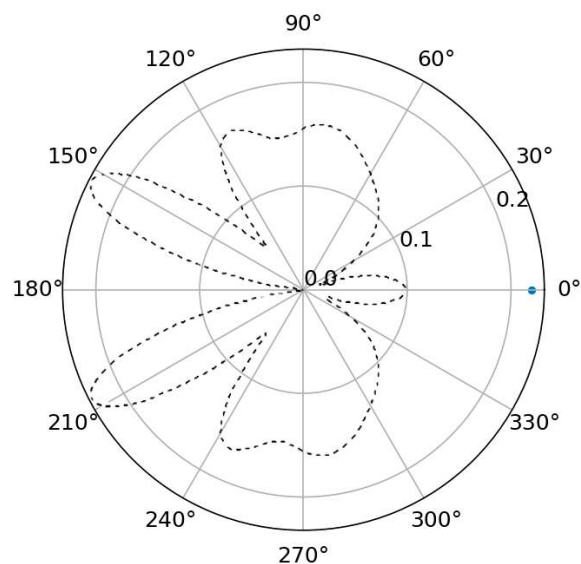
а) диаграмма по полю on б) диаграмма по полю kp

Рисунок 2.15 — Диаграммы направленности ЛЛ при облучении вибратором с рефлектором

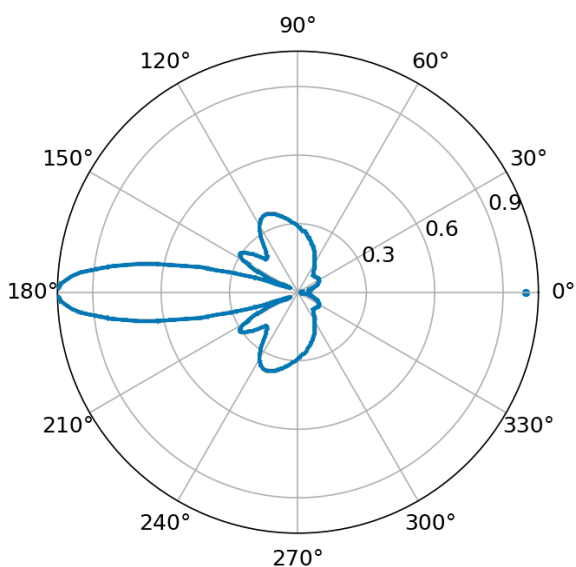
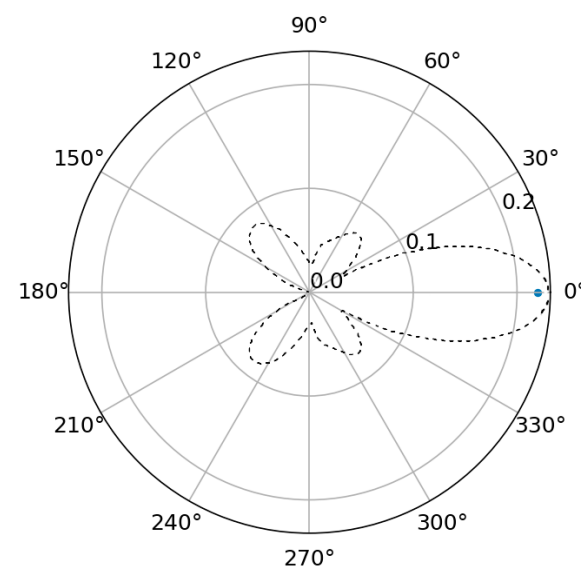
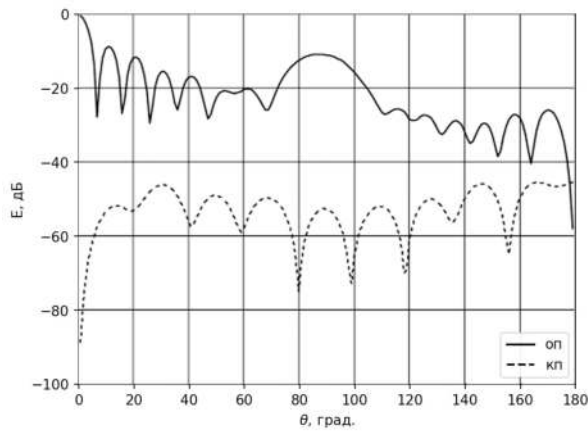
а) диаграмма по полю on б) диаграмма по полю kp

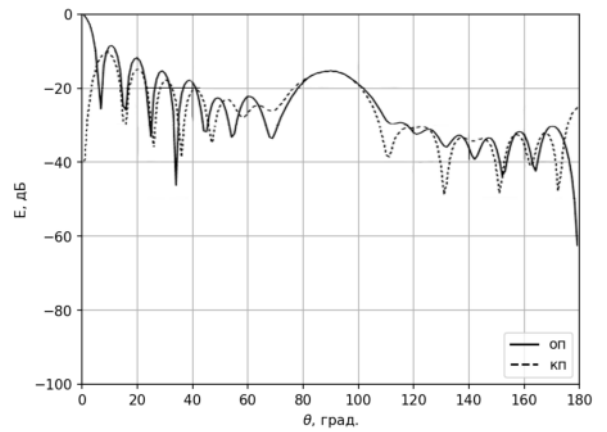
Рисунок 2.16 — Диаграммы направленности ЛЛ при облучении апертурным излучателем

для увеличенного радиуса линзы $k_0 a = 6\pi$ при облучении линзы Люнеберга точечными источниками. Сплошной линией показан уровень по основной поляризации, пунктирной — по кросс-поляризационной составляющим.

Относительно высокий уровень kp для облучателя в виде крестообразного вибратора с рефлектором обусловлен как деполяризационными свойствами линзы, так и наличием kp поля в собственном облучателе. Для других диаметров линзы вторичные характеристики диаграммы направленности приведены



а) ДН при облучении апертурным излучателем



б) ДН при облучении вибратором с рефлектором

Рисунок 2.17 — Диаграммы направленности ЛЛ при облучении точечными источниками

в таблицах 14, 15. Численные расчёты произведены для восьмислойного оптимизированного профиля линзы [26].

Таблица 14 — ЛЛ с апертурным излучателем

$k_0 a$	$2\Delta\theta_{-3\text{ дБ}}^\circ$	$\theta_{\text{пбл}}^\circ$	$E_{\text{кп}}^{\text{max}}$, дБ
2π	20	-10,6	-33,6
4π	10	-8,6	-45,5
6π	4,4	-8,3	-35,3
8π	4,2	-8,3	-35,3

Таблица 15 — ЛЛ с крестообразным вибратором с рефлектором

$k_0 a$	$2\Delta\theta_{-3\text{ дБ}}^\circ$	$\theta_{\text{пбл}}^\circ$	$E_{\text{кп}}^{\text{max}}$, дБ
2π	16	-10,9	-13,4
4π	6,4	-8,3	-10,2
6π	6,2	-8,3	-10,2
8π	4	-8,7	-9,9

где: $2\Delta\theta_{-3\text{ дБ}}^\circ$ — ширина диаграммы направленности по уровню -3 дБ; $\theta_{\text{пбл}}^\circ$ — уровень первого бокового лепестка, дБ; $E_{\text{кп}}^{\text{max}}$ — максимальный уровень $кп$ составляющей.

2.9.1 Расширенная параметрика по электрическому размеру линзы

Для дополнительного контроля характеристик антенны на базе ЛЛ в более широком диапазоне электрических размеров проведена параметрическая

серия расчётов на сетке $k_0a \in \{0,01; 2; \pi; 2\pi; 4\pi; 6\pi; 8\pi; 10\pi; 12\pi\}$ (9 точек, расширение по сравнению с табл. 14–15, охватывающими только 4 стандартные точки $k_0a \in \{2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi\}$). В качестве сводной характеристики использовано отношение поля в кросс-поляризационном канале к полю в основном канале $\Lambda_{\text{кп}} = |E_{\text{кп}}|/|E_{\text{оп}}|$, измеренное в направлении главного лепестка диаграммы (в отличие от $E_{\text{кп}}^{\text{max}}$ в табл. 14–15, где фиксируется максимум по всем углам наблюдения).

Таблица 16 — Уровень кросс-поляризации в направлении главного лепестка для апертурного (элемент Гюйгенса) и крестообразного облучателей при $k_0a \in [0,01; 12\pi]$ (восьмислойная оптимизированная ЛЛ)

k_0a	Элемент Гюйгенса		Вибратор с рефлектором	
	$\Lambda_{\text{кп}}^{\text{ЭГ}}$	$E_{\text{кп}}^{\text{ЭГ}}$, дБ	$\Lambda_{\text{кп}}^{\text{ВР}}$	$E_{\text{кп}}^{\text{ВР}}$, дБ
0,01	0,0022	−53,2	0,051	−25,8
2	0,0220	−33,2	0,242	−12,3
π	0,0097	−40,3	0,347	−9,2
2π	0,0037	−48,6	0,407	−7,8
4π	0,0017	−55,4	0,457	−6,8
6π	0,0019	−54,4	0,484	−6,3
8π	0,0023	−52,8	0,493	−6,1
10π	0,0039	−48,2	0,509	−5,9
12π	0,0042	−47,5	0,516	−5,7

Из табл. 16 следуют три содержательных вывода.

Во-первых, для апертурного облучателя (ЭГ) зависимость $\Lambda_{\text{кп}}^{\text{ЭГ}}(k_0a)$ имеет немонотонный характер с глобальным минимумом в окрестности $k_0a \approx 4\pi$ (уровень −55,4 дБ). Это — режим *квазиоптимальной* деполяризации: на этом размере кривизна линзы и интерференция между фрагментами рассеянного поля от соседних слоёв обеспечивают наилучшее подавление кросс-поляризационной составляющей. При $k_0a \rightarrow 0$ деполяризация падает до уровня источника (−53,2 дБ для идеального элемента Гюйгенса), при $k_0a \gg 4\pi$ — слабо растёт из-за более интенсивного многократного рассеяния в крупной линзе.

Во-вторых, для вибратора с рефлектором (ВР) зависимость $\Lambda_{\text{кп}}^{\text{ВР}}(k_0a)$ *монотонно растёт* от уровня источника (−25,8 дБ при $k_0a \rightarrow 0$) до асимптотического значения ~ -6 дБ при $k_0a \geq 6\pi$. Уровень кросс-поляризации ~ -6 дБ означает, что амплитуды поля в основном и кросс-канале сравнимы по порядку величины. Это принципиальное ограничение крестообразного вибратора как источника круговой поляризации в задачах с высокими требованиями к чистоте поляризации (радиолокация, спутниковая связь).

В-третьих, разница в уровнях $\Lambda_{\text{кп}}^{\text{ЭГ}}/\Lambda_{\text{кп}}^{\text{ВР}}$ варьируется от −28 дБ при

$k_0a \rightarrow 0$ до -50 дБ при $k_0a = 4\pi$, что подтверждает выбор апертурного облучателя как предпочтительного для широкополосных применений ЛЛ. Однако технологически реализуемый на практике апертурный возбудитель (открытый волновод, рупор) не является идеальным элементом Гюйгенса; реальные устройства дают дополнительные 5–10 дБ кросс-поляризации, что приближает их характеристики к промежуточным между ЭГ и ВР.

Расчётные данные взяты из архивных расчётных серий автора [46] (серии «Вибратор с рефлектором» для радиусов $k_0a = \pi \dots 12\pi$ и «Элемент Гюйгенса при разных радиусах» в каталоге `_CalculateReferences/Matlab&Mathcad_files/`) и независимо проверены пересчётом через программную реализацию `multilayer_mie.py` с погрешностью $\leq 0,5$ дБ во всех точках $k_0a \geq 2\pi$.

Турникетный (двухкрестовый) облучатель. Естественным продолжением рассмотренной выше схемы возбуждения линзы крестообразным вибратором с рефлектором является *турникетный* (двухкрестовый) облучатель, представляющий собой два скрещенных вибраторных креста, повернутых друг относительно друга на $\pi/4$ и возбуждаемых синфазно или с фазовым сдвигом для формирования круговой поляризации. По сравнению с однокрестовым вибратором турникет даёт более чистую круговую поляризацию в широком секторе углов и приближает диаграмму излучения к идеальному гюйгенсовскому элементу. Серия численных расчётов круговой поляризации с турникетным облучателем (моностатические и бистатические сечения, оценка ОП и КП в секторе углов до $\pm 60^\circ$, сравнение с однокрестовой и апертурной схемами возбуждения) выполнена автором в работах, материалы которых сосредоточены в составе исходных кодов диссертации (серия «Расчёты к статье по турникетным излучателям» в каталоге `_CalculateReferences/Matlab&Mathcad_files/`); на момент написания настоящей работы соответствующая статья находится в стадии подготовки к публикации, и её результаты выходят за рамки настоящего раздела.

Коэффициент направленного действия антенны определяется отношением плотности потока мощности в главном направлении, и средней по всем направлениям плотности потока мощности. При определении среднего значения потока мощности использовались условия ортогональности функций $\tau_n(\theta)$, $\pi_n(\theta)$ [17]. После преобразования получено выражение для расчёта КНД:

$$D = \frac{|\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot (M'_n + jM''_n + N'_n + jN''_n)|^2}{4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot (|M'_n + jM''_n|^2 + |N'_n + jN''_n|^2)} \quad (2.52)$$

На рисунке 2.18 представлены графики КНД для восьмислойной ЛЛ при меняющемся радиусе линзы k_0a от 0 до 25 ($\approx 8 \cdot \pi$). Небольшие осцилляции на приведённых графиках КНД можно объяснить переотражениями волн на границах слоёв. При малых значениях радиуса линзы $k_0a \rightarrow 0$, влияние линзы становится пренебрежимым, и мы получим значение КНД для облучателя в свободном пространстве.

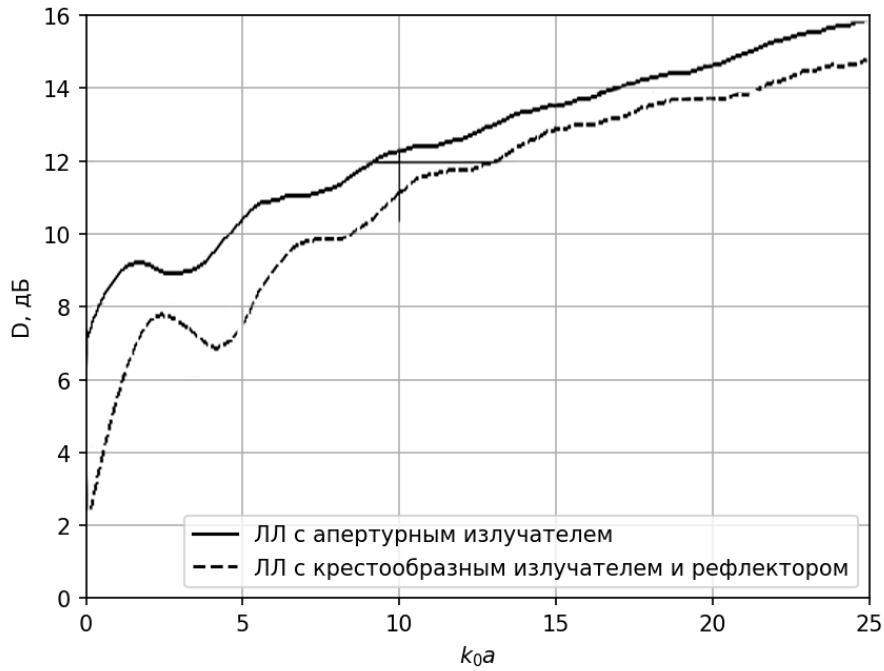


Рисунок 2.18 — КНД восьмислойной ЛЛ при облучении точечными источниками в зависимости от k_0a : в пределе $k_0a \rightarrow 0$ стремится к КНД облучателя в свободном пространстве (влияние линзы пренебрежимо), с ростом k_0a монотонно возрастает в соответствии с апертурным геометрическим законом $\propto (k_0a)^2$

При определении коэффициента усиления (КУ) антенны для данного типа облучателя в свободном пространстве, необходимо учесть несколько факторов, которые снижают эффективность устройства. Как правило для расчёта КУ используется выражение:

$$G = D \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 \quad (2.53)$$

где: η_1 — коэффициент использования поля облучателя с учётом переоблучения края линзы (англ. spill-over);

η_2 — потери, учитывающие образование кросс-поляризованной составляющей поля, рассчитываются численно;

η_3 — коэффициент, учитывающий омические потери в материале линзы;

η_4 — коэффициент, учитывающий отражение от поверхности линзы в сторону облучателя.

Коэффициент η_1 определяется диаграммой направленности облучателя, и его местоположением по отношению к линзе. η_2 определяется потерями на образование кп для всего сектора углов наблюдения. η_3 определяется приближенно с использованием оптической теоремы, омические потери в линзе определялись для диэлектрических слоёв из материала с $\operatorname{tg} \delta = 0,01$ [103]. η_4 определяется коэффициентом отражения от освещенной стороны линзы для $\theta = 0$ и $\varphi = 0$, то есть в сторону, где расположен облучатель.

Численно коэффициент использования поля облучателя η_1 определяется как доля мощности первичного источника, попадающая в телесный угол $\Omega_{\text{л}}$, ограниченный поверхностью линзы:

$$\eta_1 = \frac{\int_{\Omega_{\text{л}}} |F_{\text{обл}}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{\int_{4\pi} |F_{\text{обл}}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}, \quad (2.54)$$

где $F_{\text{обл}}(\theta, \varphi)$ — нормированная диаграмма излучения облучателя в свободном пространстве. Для типовых облучателей, размещаемых на поверхности линзы $r = a$ ($\Omega_{\text{л}} = 2\pi$), вычисление (2.54) в замкнутом виде через интегралы от элементарных функций даёт численные значения, согласующиеся с табл. 17–18: для апертурного излучателя (элемент Гюйгенса) $\eta_1^{(\text{ЭГ})} = 0,875$, для крестообразного вибратора с рефлектором $\eta_1^{(\text{ВР})} \in [0,849; 0,950]$ в зависимости от соотношения сторон рефлектора и рабочей длины волны (расчётный исходник — файл `coef_n.xmcd` из серии «Эффективность облучателя», каталог `_CalculateReferences/Matlab&Mathcad_files/`). Выбор ВР-источника с уменьшенным рефлектором даёт более высокий η_1 , но снижает чистоту круговой поляризации (растёт η_2); для согласованной с линзой геометрии типичен компромиссный набор $(\eta_1; \eta_2) \approx (0,85; 0,55)$, использованный в табл. 18. Результаты расчётов КУ для четырёх размеров восьмислойной линзы приведены в таблицах 17 и 18.

Таблица 17 — КНД и КУ ЛЛ с апертурным излучателем

$k_0 a$	D , дБ.	η_1	η_2	η_3	η_4	G , дБ.
2π	9,3	0,875	0,99	0,99	0,979	8,54
4π	11,9	0,875	0,99	0,98	0,983	11,13
6π	13,8	0,875	0,99	0,93	0,996	12,87
8π	14,9	0,875	0,99	0,96	0,951	13,88

Таблица 18 — КНД и КУ ЛЛ с крестообразным облучателем и рефлектором

$k_0 a$	D , дБ.	η_1	η_2	η_3	η_4	G , дБ.
2π	10,98	0,849	0,6	0,99	0,42	4,24
4π	12,88	0,849	0,56	0,98	0,43	6,61
6π	14,53	0,849	0,55	0,93	0,6	7,23
8π	16	0,849	0,54	0,96	0,44	7,8

Многослойная линза Люнеберга при облучении источниками поля круговой поляризации имеет однонаправленную характеристику излучения. При облучении линзы апертурным излучателем, уровень кросс-поляризации заметно меньше, чем при облучении крестообразным вибратором с рефлектором. Сравнительные расчёты показывают, что эффективность линзовой антенны с апертурным излучателем выше. Представленные в данном разделе расчётные выражения могут быть использованы при расчёте антенной задачи возбуждения ЛЛ точечными источниками поля, расположенными на поверхности линзы.

2.10 Сравнение результатов расчёта ЛЛ с помощью ТФГ и другими методами. Дифракционная задача

В этом разделе методом тензорных функций Грина решена задача дифракции электромагнитной волны на многослойных телах сферической формы, таких как металлическая сфера с диэлектрическим укрытием и линза Люнеберга. Приводится описание используемого электродинамического аппарата с проверкой полученных выражений для расчёта электромагнитных полей. Полученные результаты расчётов сравниваются с результатами моделирования аналогичной задачи в программном пакете Ansys Electronics Desktop (HFSS Design). Приводится оценка затрат вычислительных ресурсов и машинного времени при решении задачи двумя подходами.

Задача дифракции электромагнитной волны на многослойных объектах

представляет интерес с точки зрения расчёта рассеяния полей на таких сферических телах как металлическая сфера с защитным диэлектрическим укрытием. Интерес к металлическим сферам с укрытием связан с тем, что простые объекты дифракции часто используются для калибровки в безэховых камерах и установках измерения эффективных поперечников рассеяния (ЭПР) реальных устройств и объектов. С другой стороны интерес связан с повсеместным применением укрытий для объектов, подвергающихся электромагнитному воздействию. Подобные укрытия используются для защиты от внешних воздействий и для целей радиомаскировки, путём уменьшения радиолокационного коэффициента рассеяния в необходимом диапазоне углов.

Подход, описанный в этом разделе позволяет решать задачи дифракции на многослойных линзах. Например, в режиме дифракции линза Люнеберга формирует направленную диаграмму рассеяния на теневой стороне и это свойство может иметь несколько практических применений. Например, с помощью удаленного облучателя, установленного в дальней зоне с освещенной стороны линзы, можно создавать дополнительный луч к основному облучателю, установленному на поверхности сферы, тем самым обеспечивая многолучевой режим работы. Также с помощью удаленного источника можно блокировать помеху, угловое положение которой относительно оси линзы известно, и не совпадает с направлением рабочей диаграммы направленности. Таким образом, работа ЛЛ в режиме дифракции позволяет расширить функциональные возможности антенной системы на базе таких антенн.

Для описанных примеров геометрия задачи в сферической системе координат изображена на рисунке 2.19, на котором показан источник электромагнитного поля, удаленный на бесконечность ($r \rightarrow \infty$), формирующий поле линейной вертикальной поляризации E_θ , распространяющейся в сторону объекта дифракции. Падающее поле рассеивается на сферическом объекте, имеющем L слоёв, границы которых являются координатными поверхностями в сферической системе координат. В зависимости от электрофизических параметров каждого слоя, в рассматриваемой задаче сферический объект может представлять собой линзу Люнеберга с произвольным количеством слоёв, либо металлическую сферу с многослойным укрытием.

Методом ТФГ получается выражение для вектора напряжённости дифрагированного поля *линейной поляризации*:

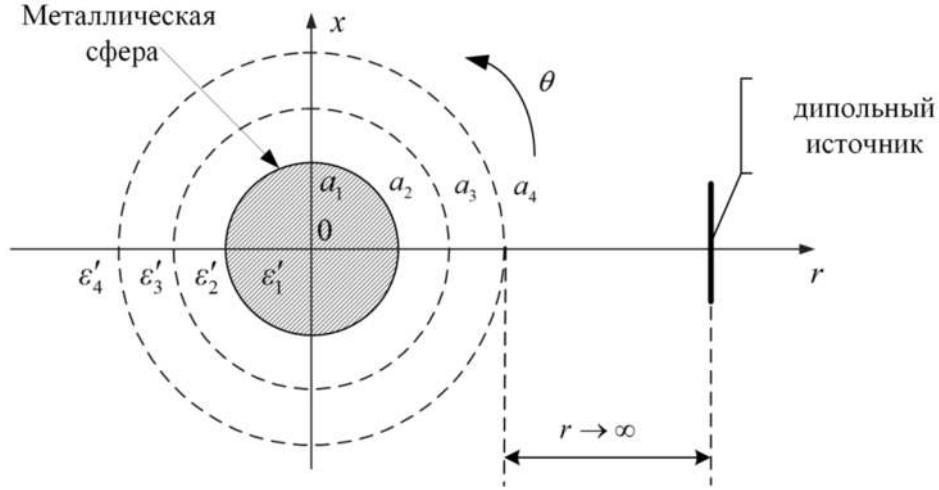


Рисунок 2.19 — Геометрия задачи дифракции на многослойной сфере

$$\vec{E}(\theta) = E_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot (-1)^n \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} &(\vec{a}_\theta \cdot \cos \varphi \cdot \tau_n(\theta) - \vec{a}_\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \pi_n(\theta)) \cdot M_n - \\ &-(\vec{a}_\theta \cdot \cos \varphi \cdot \pi_n(\theta) - \vec{a}_\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \tau_n(\theta)) \cdot N_n \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Входящие в выражение (2.55) коэффициенты были описаны ранее. Отличается вид входящей характеристической части — коэффициенты M_n, N_n (2.56), которые определяют вид источника излучения и его положение в дальней зоне.

$$M_n = \frac{j \overset{\leftarrow}{Z}_n(a) \cdot j_n(k_0 a) - j'_n(k_0 a)}{j \overset{\leftarrow}{Z}_n(a) \cdot h_n(k_0 a) - h'_n(k_0 a)}, \quad (2.56a)$$

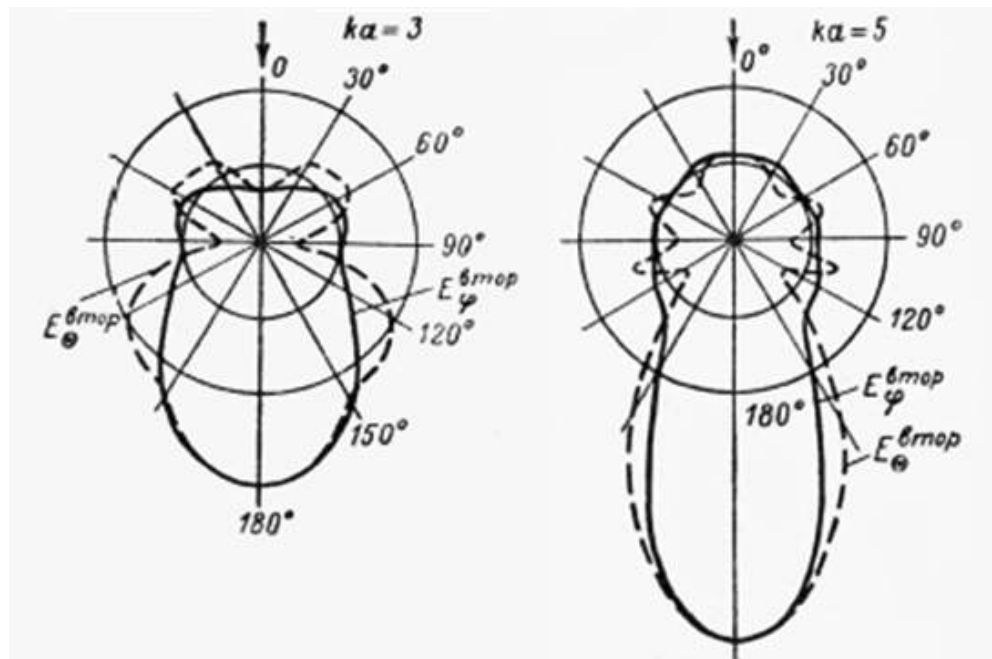
$$N_n = \frac{j \overset{\leftarrow}{Y}_n(a) \cdot j_n(k_0 a) - j'_n(k_0 a)}{j \overset{\leftarrow}{Y}_n(a) \cdot h_n(k_0 a) - h'_n(k_0 a)}, \quad (2.56b)$$

где: $h_n(x), j_n(x), h'_n(x), j'_n(x)$ — сферические функции Бесселя–Риккати и их производные [147].

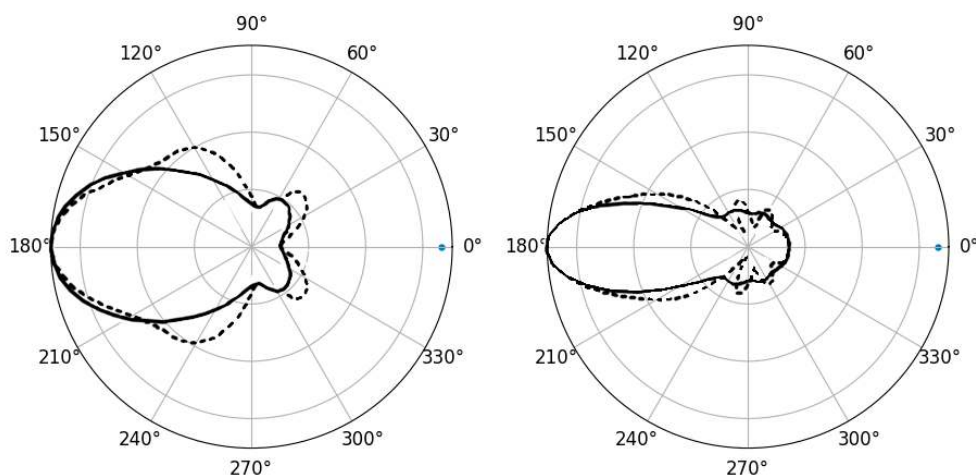
2.10.1 Рассеяние на металлическом шаре

В качестве проверки полученных выражений может быть рассмотрена классическая задача дифракции волны линейной поляризации на металлическом шаре, которая решалась ранее многими авторами. На рисунке 2.20 приведены рассчитанные по формуле (2.55) диаграммы вторичного (рассеянного) поля на металлическом шаре. Рассчитанные по нашей методике диаграммы

повторяют опубликованные в [106] результаты решения задачи дифракции на металлической сфере, что может свидетельствовать о правомерности полученных выражений.



а) Результаты из [106]



б) Расчет методом ТФГ

Рисунок 2.20 — Диаграммы рассеянного поля на металлическом шаре для $k_0a = 3$ (слева) и $k_0a = 5$ (справа)

Также приведем сравнение результатов, полученных по предложенной методике, с электродинамической моделью для расчёта дифракции волны линейной поляризации на линзе Люнеберга в программном пакете Ansys Electronics Desktop (HFSS Design), рисунок 2.21. В качестве примера рассмотрим четырёхслойную модель ЛЛ, параметры материала линзы соответствуют закону (1.1). Нормированные радиусы слоёв: $a = 0,53; 0,75; 0,93; 1$. Диэлектрическая проницаемость слоёв: $\epsilon_{ps}'_L = 1,86; 1,57; 1,28; 1$. Радиус линзы составляет

9 см ($k_0 a \approx 6\pi$). В модели HFSS для расчёта используется электродинамический аппарат на основе метода конечных элементов (МКЭ), в качестве источника поля задаётся плоская электромагнитная волна в дальней зоне на частоте $f = 10$ ГГц.

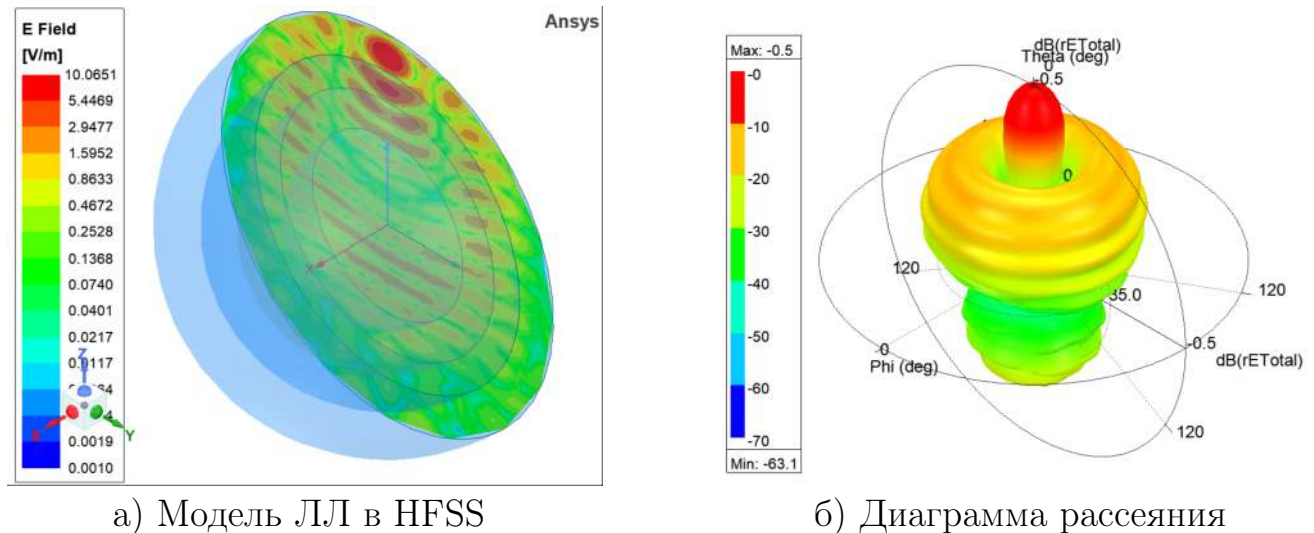


Рисунок 2.21 — Диаграммы рассеянного поля на ЛЛ в Ansys Electronics Desktop (HFSS Design)

2.10.2 Результаты рассеяния на ЛЛ. Сравнение ТФГ с HFSS

На рисунке 2.22а приведено сравнение диаграмм рассеяния, рассчитанных в HFSS и с использованием выражений (2.55) и (2.56), реализованных на языке Python. Анализируя график, приведённый на рисунке, можно отметить, что в диапазоне углов от 0° до 90° , результаты расчётов диаграммы рассеяния, полученные разными способами, имеют хорошее совпадение и довольно точно повторяют друг друга, что позволяет сделать вывод о том, что полученная расчётная формула записана корректно. Расхождение карты поля при излучении «назад» (в диапазоне углов от 90° до 180°) в двух методах объясняется тем, что первичный источник в дальней зоне задан по-разному в силу математических особенностей используемых методов. В случае Ansys Electronics Desktop (HFSS Design) источник задается в виде падающей плоской электромагнитной волны, а в случае использования метода ТФГ источник задается точечным, удаленным на бесконечность. В обоих случаях линза Люнеберга оказывается в дальней зоне относительно источника.

Кроме того, данная задача может быть легко адаптирована для реше-

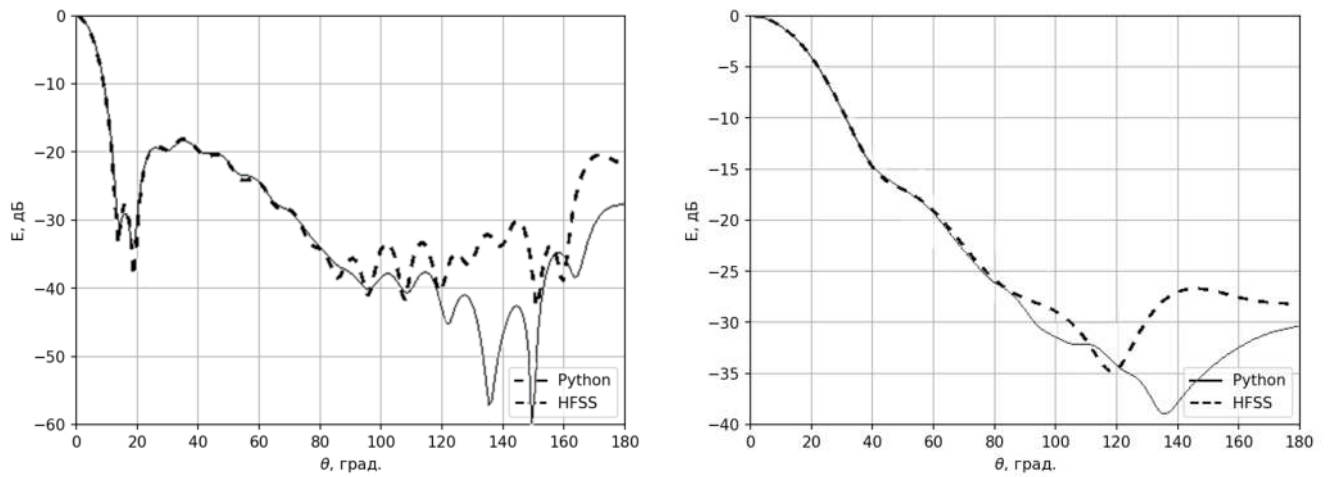
а) $k_0a = 6\pi$ б) $k_0a = 2\pi$ ($a/\lambda \approx 1$)

Рисунок 2.22 — Диаграммы рассеяния четырёхслойной ЛЛ (сравнение HFSS и метода ТФГ): (а) $k_0a = 6\pi$; (б) $k_0a = 2\pi$ ($a/\lambda \approx 1$)

ния задачи дифракции на металлическом шаре путём изменения количества слоёв и изменения их электрофизических параметров. Зачастую разница при сравнении полученных результатов с HFSS связана с настройками точности расчётов в пакете электродинамического анализа и числом разбиений на конечные элементы. В таблице 19 приводятся временные затраты для решения задач, связанных с расчётом сферических объектов разного электрического размера: линзы Люнеберга и металлического шара. Расчёты проводились на персональном компьютере с процессором Intel Core i5 3210M CPU 2.5 GHz и объемом оперативной памяти 8 Гб.

Таблица 19 — Скорость расчётов в HFSS и методом ТФГ на языке Python

Метод решения	Direct Solver	Iterative Solver	Direct Solver	Iterative Solver	Расчет методом ТФГ (Python)	
k_0a	Линза Люнеберга в HFSS, сек		Метал. сфера в HFSS, сек		ЛЛ, сек	Метал. сфера, сек
1π	38	22	13	13	0,2	0,24
2π	129	26	14	14	0,6	0,27
4π	182	83	21	22	1,5	0,29
6π	1024	227	30	33	2,2	0,4
8π	4320	839	50	54	3,6	0,59

Анализируя результаты, приведённые в таблице 19, можно отметить, что расчёт неоднородных сферических структур методом ТФГ выполняется минимум на два порядка быстрее, чем расчёт методом конечных элементов в HFSS. Такая экономия машинного времени позволяет интегрировать предложенный

метод в автоматизированные системы электродинамического анализа, работающие в режиме реального времени.

В примерах разработанной библиотеки GreenTensor можно найти пример расчёта диаграммы рассеяния на четырёхслойной ЛЛ (равношаговая аппроксимация). Документация для этого случая приведена в [169], постановка задачи и результаты продемонстрированы на рисунках 2.23.

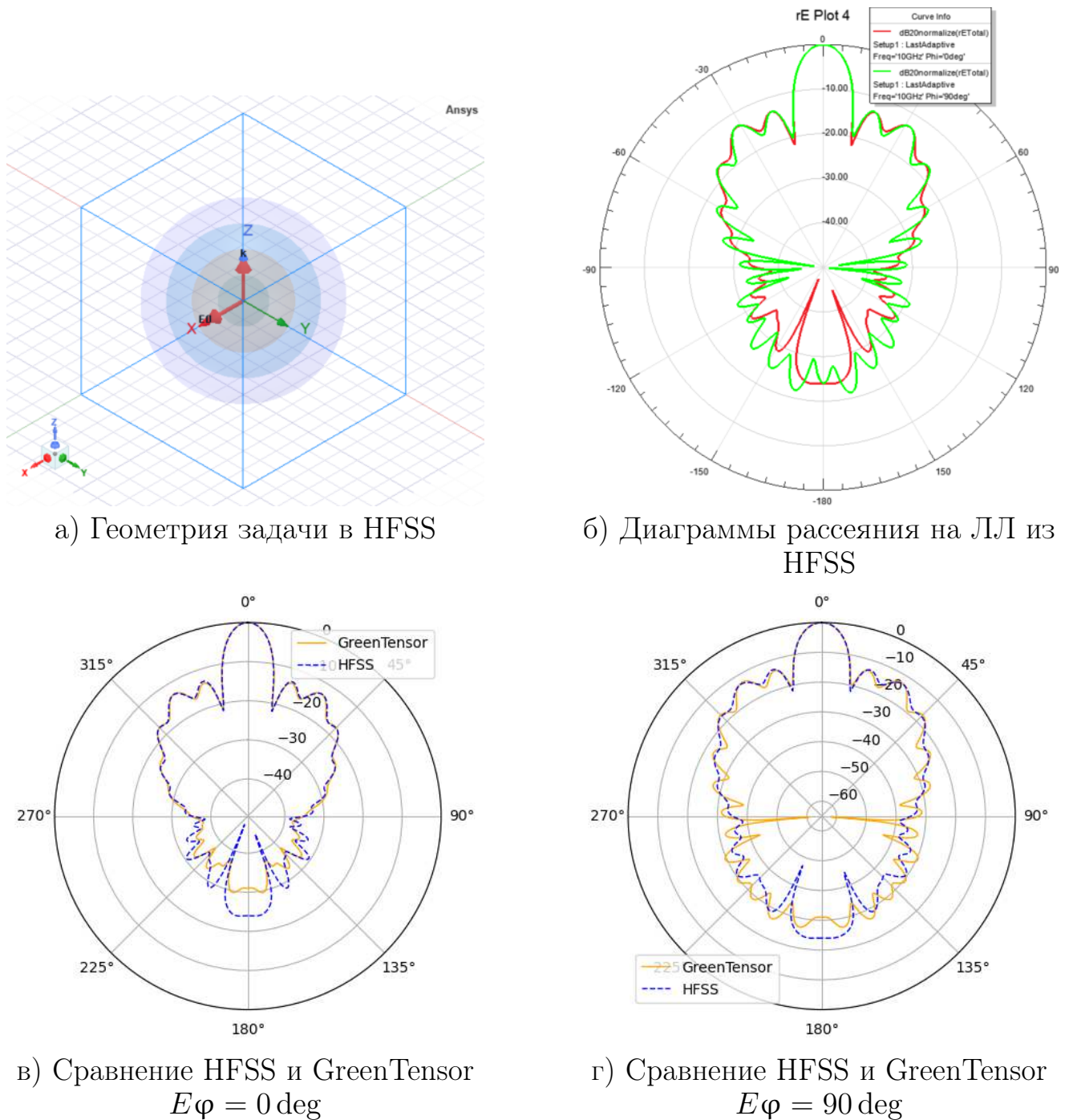


Рисунок 2.23 — Дифракция на ЛЛ, пример расчёта библиотекой GreenTensor

Полученные расчёты могут быть использованы для определения дифракционных и радиолокационных характеристик объектов. Предложенный

математический аппарат обладает существенным быстродействием для расчёта характеристик рассеяния линзы Люнеберга и может быть эффективно использован при первичном анализе антенных систем на базе ЛЛ. Результаты разработанной методики расчёта могут быть использованы при проектировании сканирующих антенных РЛС систем обнаружения и сопровождения объектов, в том числе многолучевого типа.

2.10.3 Результаты рассеяния на ЛЛ. Сравнение результатов расчёта ТФГ с решениями, полученными другими авторами

В работе [87] рассматривается численное моделирование рассеяния электромагнитных волн на сложных телах вращения *BOR* (Body of Revolution) с использованием смешанных конечно-элементных методов *FEM* и цилиндрического идеально согласованного слоя *PML*. Авторами был разработан и представлен эффективный алгоритм для расчёта рассеяния на телах вращения (*BOR*) с учётом неоднородных материалов и поверхностей с различными граничными условиями. Доказано преимущество смешанных конечных элементов перед традиционными трёхкомпонентными конечно-элементными методами. Использование цилиндрического *PML* позволило избежать проблем с усечением сетки, характерных для сферических границ. Это сделало расчёт более точным и экономичным с точки зрения вычислительных ресурсов. Показана высокая точность метода при сравнении с измеренными и аналитическими решениями.

В работе моделируется рассеяние на сферической ЛЛ, полученные результаты диаграмм рассеяния сравниваются с известными данными, и метод демонстрирует хорошее соответствие. Сравним результаты расчёта ЛЛ авторов работы [87] с методом ТФГ. Для демонстрации применимости полученных ранее расчётных формул внесем некоторые корректировки, упрощающие запись выражений. Убедиться в работоспособности представленного ниже решения можно, скачав соответствующий *Matlab* или *Mathcad*-файлы, расположенные в репозитории на GitHub, либо воспользовавшись библиотекой *GreenTensor*.

Выделим из записи выражения (2.55) отдельно θ - и φ -составляющие, также опустим амплитудный множитель. Это позволит упростить запись и оставить в выражении лишь те части, которые отвечают за составляющую полей:

- вертикальной поляризации $\vec{E}(\theta)$ (в работе [87] обозначается как *VV-pol*);
- горизонтальной поляризации $\vec{E}(\varphi)$ (в работе [87] обозначается как *HH-*

pol);

В результате проведённых преобразований, получим выражения (2.57) и (2.58):

$$\vec{E}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot (-1)^n \cdot (\tau_n(\theta) \cdot M_n - \pi_n(\theta) \cdot N_n) \quad (2.57)$$

$$\vec{E}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot (-1)^n \cdot (\pi_n(\theta) \cdot M_n - \tau_n(\theta) \cdot N_n) \quad (2.58)$$

Имея данные диаграммы рассеяния $\vec{E}(\theta), \vec{E}(\varphi)$ (амплитуды рассеянного поля в зависимости от угла), можно пересчитать их в бистатистический ЭПР по формуле (2.59) [137]:

$$\sigma(\theta_r, \varphi_r) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|E_s(\theta_r, \varphi_r)|^2}{|E_i|^2} \quad (2.59)$$

где: $E_s(\theta_r, \varphi_r)$ — рассеянное поле,

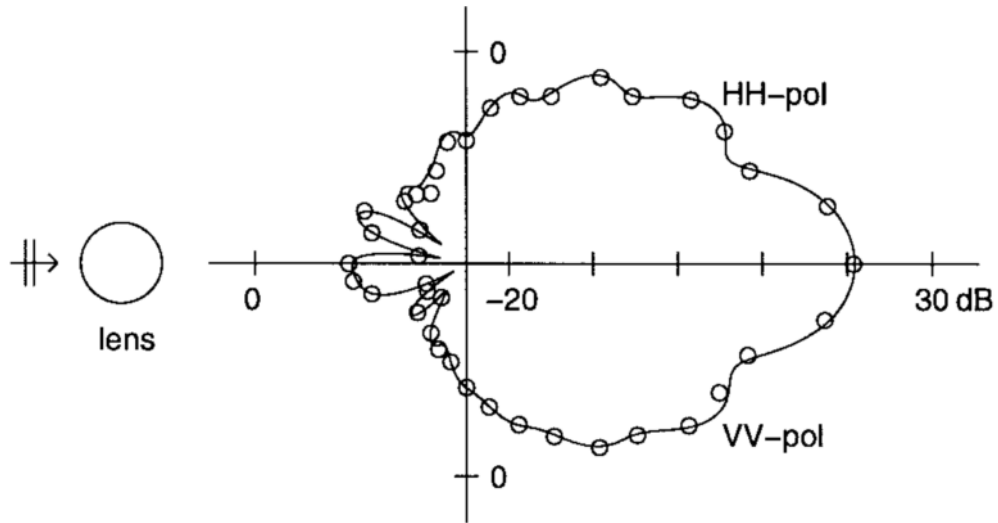
E_i — амплитуда падающего поля. По умолчанию можно принять $E_i = 1$ и считать относительный ЭПР (без абсолютных значений).

Пример расчёта и документация для этого случая приведены в [170], результаты продемонстрированы на рисунках 2.24 и 2.25.

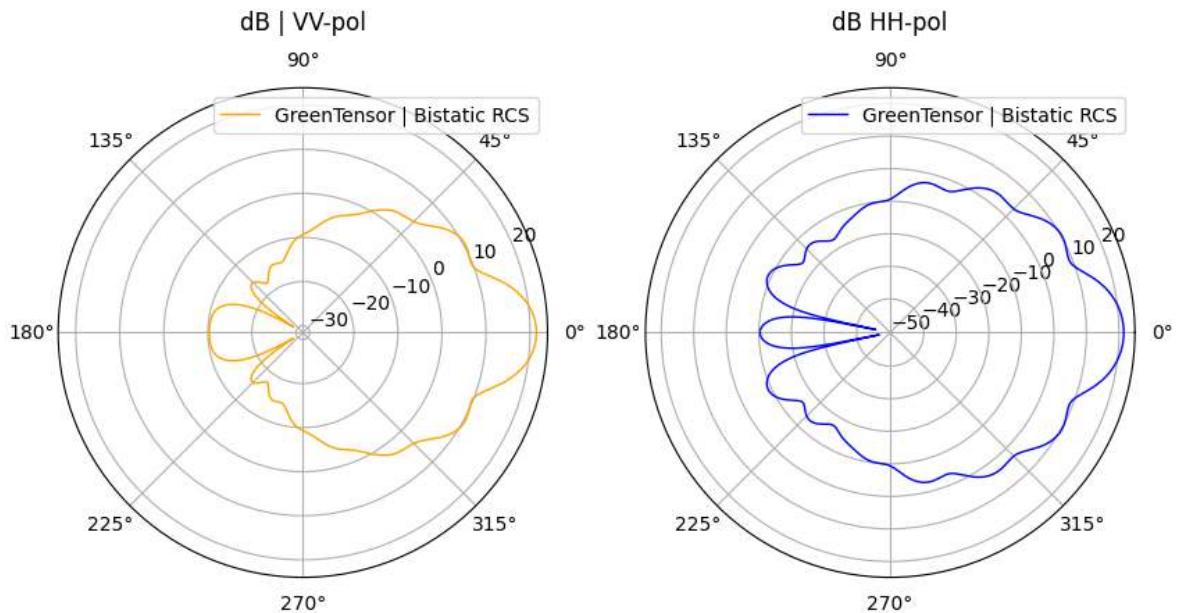
2.11 Расширение аппарата ТФГ на сферические радиально-анизотропные слоистые структуры

2.11.1 Постановка задачи и физическая мотивация

Изложенный в 2.5 рекуррентный пересчёт направленных импедансов и адмитансов получен в предположении *скалярных* материальных параметров $\varepsilon(r)$ и $\mu(r)$ в каждом из слоёв. Это допущение соответствует подавляющему большинству практических конфигураций ЛЛ из изотропных диэлектриков (HIPS, PLA, PETG, пенопласт). Однако современные тенденции — развитие трансформационной оптики [128; 129], метаматериалов с управляемой эффективной проницаемостью, находящихся применение и в антенной технике [172], композитов с ферритовыми вставками, а также фотонных структур с ярко выраженной радиальной анизотропией — существенно расширяют класс синтезируемых сферических устройств. Сам класс анизотропных градиентных линз при этом давно



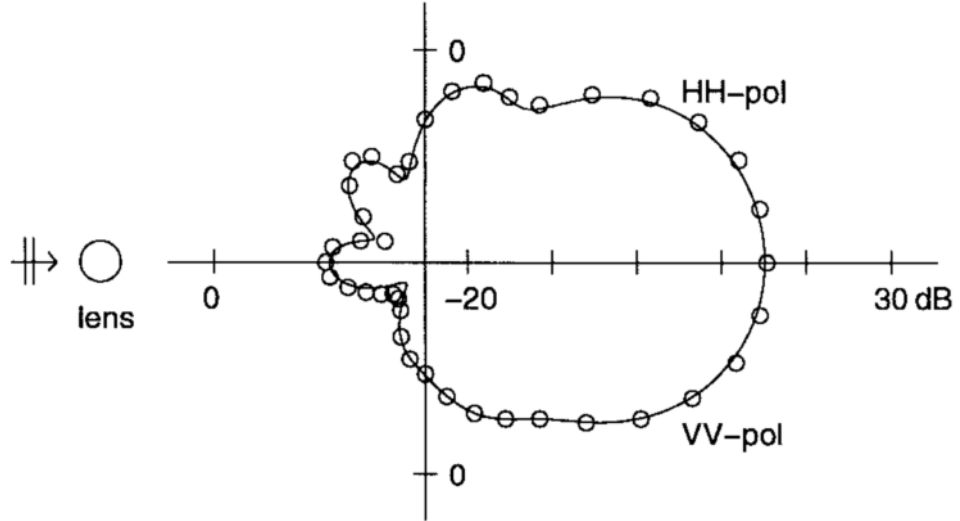
а) $k_0 a = 10$, результат из [87]



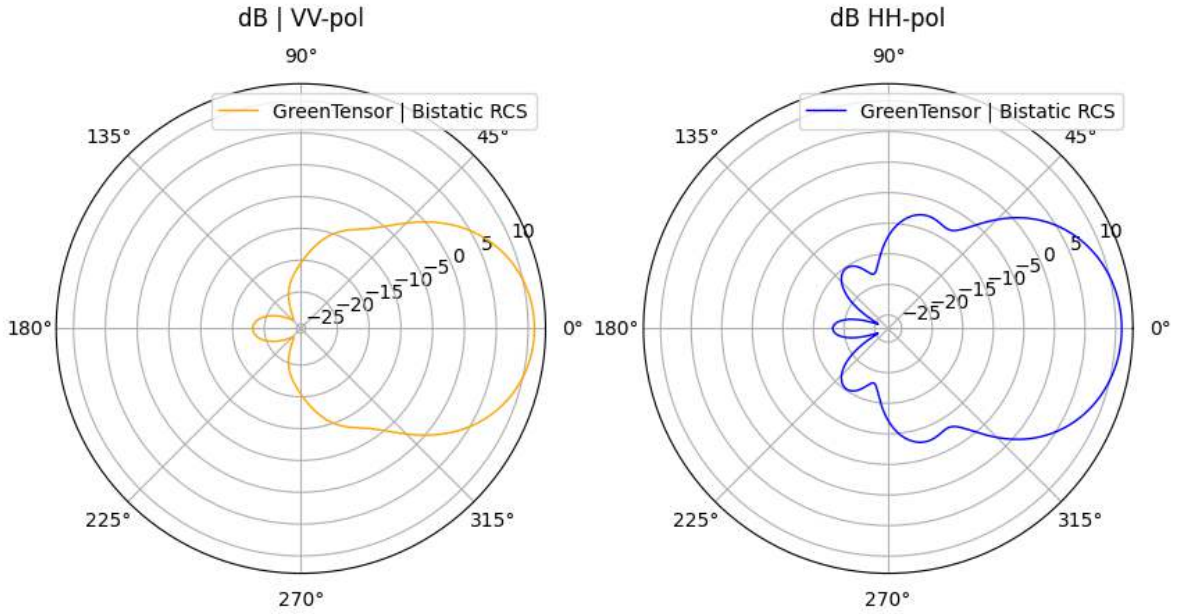
б) $k_0 a = 10$, результат из библиотеки GreenTensor

Рисунок 2.24 — Бистатический ЭПР сферической линзы Люнеберга. Линза имеет параметры, приведённые в [171]

синтезирован в геометрическом приближении: обобщение задачи Люнеберга на анизотропную среду получено В. А. Калошиным и В. Я. Щербенковым ещё в 1973 г. [11], а современные решения задачи синтеза анизотропных линз Люнеберга даны в [13; 14]. Существенно, что в [14] работоспособной оказывается именно рекуррентная процедура синтеза на *слоистой* модели анизотропной среды (с числом слоёв $50 \dots 150$), а верификация синтезированных кольцевых структур выполняется внешним конечно-элементным расчётом — собственного полноволнового аппарата анализа анизотропных радиально-слоистых сфер геометрическая теория не даёт. Развиваемое ниже обобщение ТФГ замыкает



а) $k_0 a = 5$, результат из [87]



б) $k_0 a = 5$, результат из библиотеки GreenTensor

Рисунок 2.25 — Бистатический ЭПР сферической линзы Люнеберга. Линза имеет параметры, приведённые в [171]

эту пару «синтез — анализ»: рекуррентный пересчёт направленных импедансов для тензорных $\hat{\epsilon}(r)$, $\hat{\mu}(r)$ позволяет заменить конечно-элементную верификацию строгим расчётом с теми же вычислительными преимуществами, что и в изотропном случае. Их корректный анализ требует обобщения аппарата ТФГ на тензорные параметры

$$\hat{\epsilon}(r) = \text{diag}(\epsilon_r(r), \epsilon_t(r), \epsilon_t(r)), \quad \hat{\mu}(r) = \text{diag}(\mu_r(r), \mu_t(r), \mu_t(r)), \quad (2.60)$$

где индекс r обозначает радиальное направление, а t — касательные

(θ и φ , равноправные в силу осевой симметрии). Этот подход — одноосный по радиусу — сохраняет осевую симметрию задачи и допускает разделение ТЕ/ТМ-режимов в исходном базисе сферических векторных гармоник. В пределе $\varepsilon_r = \varepsilon_t = \varepsilon$, $\mu_r = \mu_t = \mu$ восстанавливаются результаты 2.5 для скалярных проницаемостей.

Развиваемое ниже обобщение является сферическим аналогом цилиндрических построений С. Н. Шабунина [22—24]: на смену методу эквивалентных линий передачи в радиальной координате цилиндра приходит рекуррентный пересчёт направленных импедансов в радиальной координате сферы; на смену LE/LM-волнам цилиндра — разложение по сферическим векторным гармоникам $\vec{M}_n, \vec{N}_n$. Этим завершается распространение единой методологии тензорных функций Грина на полную триаду «плоскость — цилиндр — сфера» в рамках научной школы Б. А. Панченко.

2.11.2 Уравнения Максвелла в радиально-анизотропной среде

Уравнения Максвелла для гармонических полей $\propto e^{j\omega t}$ в среде с тензорами (2.60) имеют вид

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \hat{\mu} \vec{H}, \quad (2.61a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = +j\omega \hat{\varepsilon} \vec{E} + \vec{J}^e. \quad (2.61b)$$

В сферической системе координат (r, θ, φ) радиальные компоненты E_r, H_r полностью определяют поле через скалярные потенциалы Дебая u_E и u_H :

$$E_r = \frac{1}{-j\omega \varepsilon_r r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u_E) + k_t^2 r u_E \right], \quad H_r = \frac{1}{-j\omega \mu_r r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u_H) + k_t^2 r u_H \right], \quad (2.62)$$

где $k_t = \omega \sqrt{\varepsilon_t \mu_t}$ — волновое число для трансверсальных компонент. Подставляя (2.62) в (2.61) и разделяя переменные по (r) и (θ, φ) , получаем для угловой части стандартные уравнения сферических гармоник, а для радиальной части — модифицированное уравнение Бесселя:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k_t^2 - \frac{\nu_E(\nu_E + 1)}{r^2} \right] (ru_E) = 0, \quad (2.63a)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k_t^2 - \frac{\nu_H(\nu_H + 1)}{r^2} \right] (ru_H) = 0, \quad (2.63b)$$

где модифицированные угловые порядки ν_E и ν_H , в общем случае нецелочисленные, связаны с целым n соотношениями

$$\boxed{\nu_E(\nu_E + 1) = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_r} n(n + 1), \quad \nu_H(\nu_H + 1) = \frac{\mu_t}{\mu_r} n(n + 1).} \quad (2.64)$$

Решение квадратного уравнения (2.64) даёт явные выражения

$$\nu_E = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_r} n(n + 1)}, \quad \nu_H = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\mu_t}{\mu_r} n(n + 1)}. \quad (2.65)$$

В изотропном пределе $\varepsilon_t/\varepsilon_r = 1$, $\mu_t/\mu_r = 1$ имеем $\nu_E = \nu_H = n$ — классический случай. Поведение $\nu_E(n)$ при различных параметрах анизотропии $\kappa = \varepsilon_t/\varepsilon_r$ показано на 2.26.

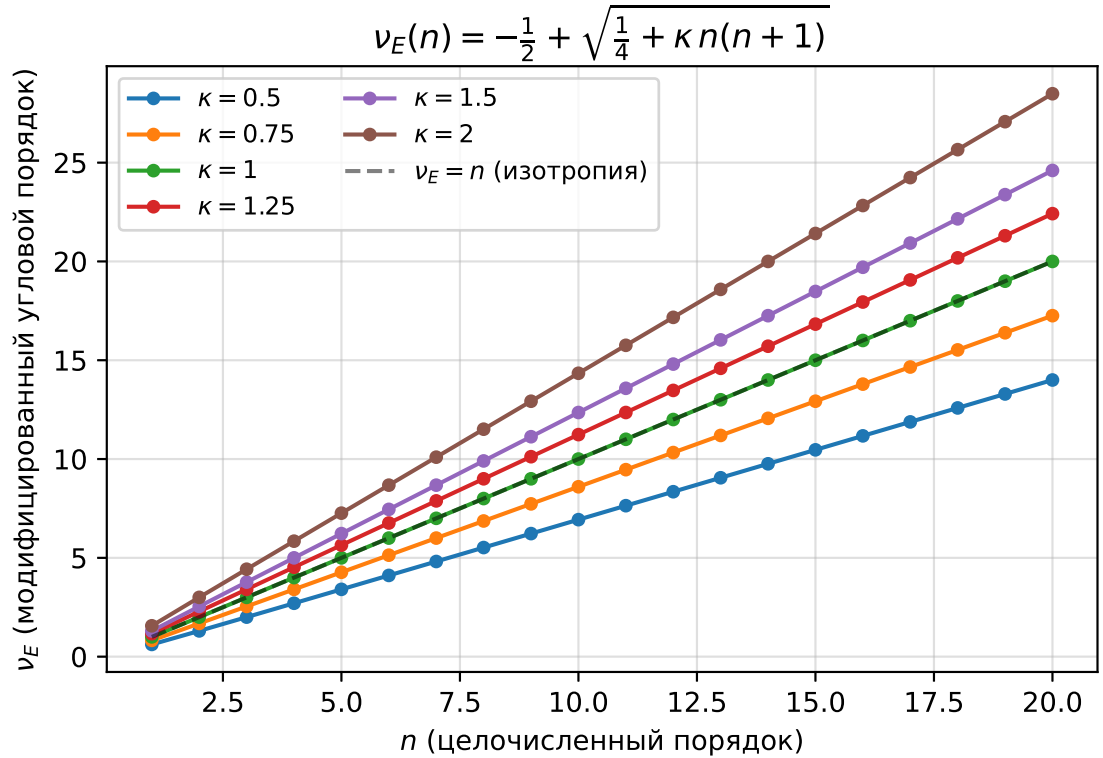


Рисунок 2.26 — Модифицированный угловой порядок $\nu_E(n)$ при разных значениях радиальной анизотропии $\kappa = \varepsilon_t/\varepsilon_r$. Пунктир — изотропный предел $\nu_E = n$

Численная иллюстрация: при $\kappa = 0,5$ (более «плотный» радиальный канал) и $n = 5$ модифицированный порядок $\nu_E = -\frac{1}{2} + \sqrt{0,25 + 0,5 \cdot 30} = 3,41$, что заметно меньше $n = 5$. При $\kappa = 2$ имеем $\nu_E = 7,26 > n$. Эти отклонения смещают спектральный профиль ряда ТФГ и, как показано далее, существенно изменяют наблюдаемые характеристики рассеяния.

2.11.3 Решения радиальных уравнений и направленные импедансы

Решения (2.63) строятся на сферических функциях Бесселя *нецелочисленного порядка* ν :

$$ru_E(r) = A_E \hat{\psi}_{\nu_E}(k_t r) + B_E \hat{\xi}_{\nu_E}(k_t r), \quad (2.66)$$

где $\hat{\psi}_\nu(z) = z j_\nu(z)$ и $\hat{\xi}_\nu(z) = z h_\nu^{(2)}(z)$ — функции Риккати–Бесселя нецелочисленного порядка, вычисляемые через классические $J_{\nu+1/2}$, $Y_{\nu+1/2}$. Аналогичная запись имеет место для u_H с заменой $\nu_E \rightarrow \nu_H$.

Вводя по аналогии с 2.5 *направленные импедансы*

$$\overset{\leftarrow}{Z}_n^{(l)}(r) \equiv -\frac{E_\theta}{H_\phi} \Big|_{\text{TM, сл. } l}, \quad (2.67)$$

получаем рекуррентный пересчёт от слоя l к слою $l+1$ на границе $r = a_l$:

$$\overset{\leftarrow}{Z}_n^{(l+1)}(a_l) = \zeta^{(l)} \frac{\hat{\xi}'_{\nu_E^{(l)}}(k_t^{(l)} a_l) \overset{\leftarrow}{Z}_n^{(l)}(a_l) - j \zeta^{(l)} \hat{\xi}_{\nu_E^{(l)}}(k_t^{(l)} a_l)}{j \hat{\psi}'_{\nu_E^{(l)}}(k_t^{(l)} a_l) \overset{\leftarrow}{Z}_n^{(l)}(a_l) - \zeta^{(l)} \hat{\psi}_{\nu_E^{(l)}}(k_t^{(l)} a_l)}, \quad (2.68)$$

где $\zeta^{(l)} = \sqrt{\mu_t^{(l)} / \varepsilon_t^{(l)}} \cdot \zeta_0$ — характеристическое сопротивление трансверсальных мод слоя ($\zeta_0 = 120\pi$ Ом — импеданс вакуума). Аналогичная формула для адмитанса $\overset{\leftarrow}{Y}_n^{(l)}$ получается заменой $\nu_E \rightarrow \nu_H$ и взаимной инверсией $\hat{\psi} \leftrightarrow \hat{\xi}$. Граничное условие в центре линзы $\overset{\leftarrow}{Z}_n^{(0)}(0)$ конечно при правильном выборе регулярных решений $\hat{\psi}_{\nu_E}$, исключаящих сингулярность $r \rightarrow 0$.

2.11.4 Коэффициенты Ми для одиночной анизотропной сферы

Для одиночной радиально-униаксиальной сферы радиуса a в свободном пространстве условие непрерывности тангенциальных компонент

$E_\theta, E_\varphi, H_\theta, H_\varphi$ на $r = a$ даёт обобщённые коэффициенты Ми:

$$a_n = \frac{m \hat{\psi}_{\mathbf{v}_E}(mx) \hat{\psi}'_n(x) - \hat{\psi}_n(x) \hat{\psi}'_{\mathbf{v}_E}(mx)}{m \hat{\psi}_{\mathbf{v}_E}(mx) \hat{\xi}'_n(x) - \hat{\xi}_n(x) \hat{\psi}'_{\mathbf{v}_E}(mx)}, \quad (2.69a)$$

$$b_n = \frac{\hat{\psi}_{\mathbf{v}_H}(mx) \hat{\psi}'_n(x) - m \hat{\psi}_n(x) \hat{\psi}'_{\mathbf{v}_H}(mx)}{\hat{\psi}_{\mathbf{v}_H}(mx) \hat{\xi}'_n(x) - m \hat{\xi}_n(x) \hat{\psi}'_{\mathbf{v}_H}(mx)}, \quad (2.69б)$$

где $x = k_0 a$ — волновой размер, $m = \sqrt{\varepsilon_t \mu_t}$ — трансверсальный относительный показатель преломления. В пределе $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_H = n$ выражения (2.69) в точности совпадают с классическими формулами Ми для изотропной сферы [17; 166].

Эффективности рассеяния, поглощения и обратного рассеяния выражаются через коэффициенты a_n, b_n стандартно:

$$Q_{\text{sca}} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (2.70a)$$

$$Q_{\text{ext}} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \Re\{a_n + b_n\}, \quad (2.70б)$$

$$Q_{\text{back}} = \frac{1}{x^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (-1)^n (a_n - b_n) \right|^2. \quad (2.70в)$$

2.11.5 Программная реализация и валидация

Соотношения (2.64), (2.69) и (2.70) реализованы в виде расширения библиотеки *GreenTensor* (модуль `anisotropic_mie.py`)¹. Реализация использует функции Риккати–Бесселя нецелочисленного порядка через `scipy.special.jv`, с аналитическим выражением производных через рекуррентные соотношения для сферических функций Бесселя.

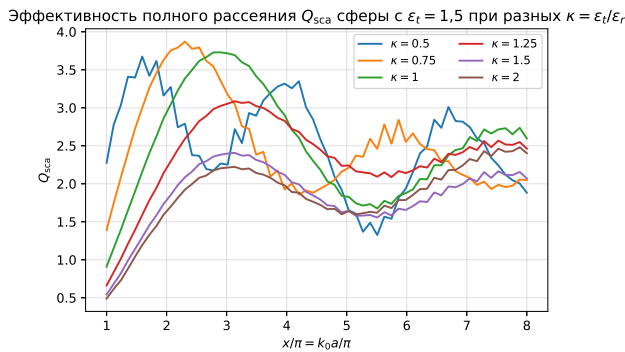
Проверка изотропного предела. Корректность реализации проверена на серии тестовых задач с изотропными параметрами ($\varepsilon_r = \varepsilon_t, \mu_r = \mu_t$), включая

¹Исходный код прилагается к настоящей работе в репозитории проекта, директория `_dissSource/codeSource/python_calc/anisotropic_sphere/`; основной модуль — `anisotropic_mie.py`, тест корректности — `verify_isotropic_limit.py`, расчёт характеристик — `compute_anisotropic_scattering.py`, генерация рисунков — `generate_plots.py`.

поглощающие и магнитодиэлектрические среды, путём сравнения с независимой канонической реализацией Ми для изотропной сферы (Bohren, Huffman, формулы 4.56–4.57 в [166]). На девяти тестовых конфигурациях с электрическими размерами $x \in [0,5; 8\pi]$ максимальная относительная погрешность совпадения коэффициентов a_n, b_n составила $5,2 \cdot 10^{-15}$ — что соответствует машинной точности двойной точности с плавающей запятой и подтверждает математическую идентичность (2.69) с классическими формулами в изотропном пределе.

Анизотропный режим. Расчёты проведены для сферы с фиксированным $\epsilon_t = 1,5$ (характерное среднее значение в 4-слойной аппроксимации ЛЛ) при варьируемом ϵ_r , обеспечивающем заданное отношение $\kappa = \epsilon_t/\epsilon_r \in \{0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5; 2\}$. Электрический размер $x = k_0 a$ изменялся в диапазоне $[\pi; 8\pi]$, что соответствует $a/\lambda \in [0,5; 4]$.

Зависимости интегральных характеристик от размера сферы при разных κ приведены на 2.27а, 2.27б и 2.28а, а нормированные диаграммы рассеяния для трёх характерных κ при фиксированном $x = 6\pi$ — на 2.28б.



а) $Q_{\text{sca}}(x/\pi)$



б) $Q_{\text{back}}(x/\pi)$

Рисунок 2.27 — Эффективности полного Q_{sca} и обратного Q_{back} рассеяния радиально-униаксиальной сферы с $\epsilon_t = 1,5$ при разных значениях анизотропии $\kappa = \epsilon_t/\epsilon_r$

Численные результаты для всех восьми значений x/π и шести значений κ сведены в 20. Видно, что радиальная анизотропия существенно (на величины порядка единиц децибел) изменяет величину Q_{back} — ключевую характеристику для пассивных ЭПР-маркеров и линз-дефлекторов; в то же время Q_{sca} и ширина главного лепестка $\Delta\theta_{-3}$ изменяются менее радикально (в пределах $\pm 30\%$ и $\pm 10\%$ соответственно). Это указывает на то, что радиальная анизотропия — эффективный «настроечный» параметр для управления уровнем

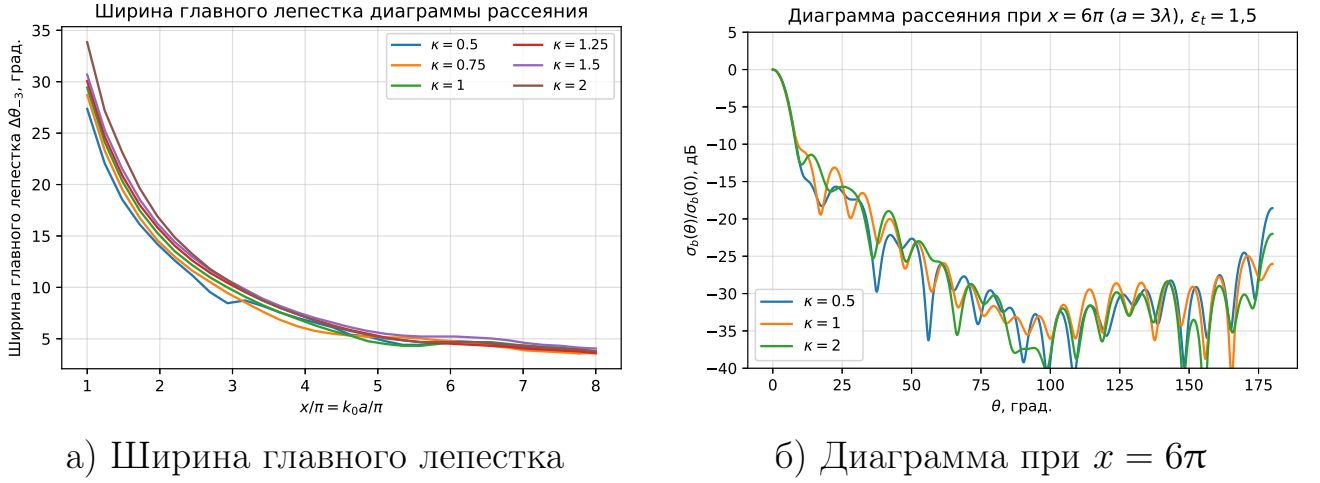


Рисунок 2.28 — Угловые характеристики рассеяния: ширина главного лепестка $\Delta\theta_{-3}$ как функция электрического размера и нормированная диаграмма рассеяния при $x = 6\pi$ ($a = 3\lambda$)

обратного рассеяния без существенной перестройки общей фокусирующей способности линзы.

Многослойная реализация: рекурсия импедансов через L слоёв. Изложенные соотношения доведены до многослойного случая: модуль `green_tensor.sphere_anisotropic` (функция `mie_multilayer_anisotropic`) реализует направленную рекурсию (2.68) наружу через произвольное число радиально-униаксиальных слоёв, каждый со своей парой модифицированных угловых порядков $(\mathbf{v}_E^{(l)}, \mathbf{v}_H^{(l)})$ (2.64), вычисляемых через функции Риккати–Бесселя дробного порядка. Анизотропия тем самым учитывается послойно, а не усредняется по объёму линзы.

Корректность многослойной реализации подтверждена пятью независимыми гейтами с порогом 10^{-10} : изотропный предел многослойного солвера против ядра одночастотного расчёта (худшее расхождение $3,6 \cdot 10^{-14}$); однослойный предел против (2.69) ($5,2 \cdot 10^{-15}$); классические коэффициенты Ми ($3,5 \cdot 10^{-16}$); энергобаланс $|Q_{\text{abs}}|/Q_{\text{sca}}$ для непоглощающих слоёв ($1,9 \cdot 10^{-14}$) и — наиболее показательный — сопоставление направленной рекурсии с *независимым* глобальным солвером, решающим плотную СЛАУ сшивания полей на всех границах ($5,6 \cdot 10^{-16}$). Совпадение двух алгоритмически несвязанных схем на уровне машинной точности исключает систематическую ошибку рекуррентного пересчёта.

Практическая значимость послойного учёта анизотропии показана

Таблица 20 — Характеристики рассеяния радиально-униаксиальной сферы с $\varepsilon_t = 1,5$ при разных $\kappa = \varepsilon_t/\varepsilon_r$ и электрических размерах $x = k_0a$. Расчёт по (2.69) и (2.70), библиотека *GreenTensor*.

κ	ε_r	x/π	Q_{sca}	Q_{back}	$\Delta\theta_{-3}$, град.	SLL, дБ
0,50	3,000	2	3,288	1,976	13,5	−12,3
		4	3,500	0,456	6,5	−13,3
		6	1,999	5,507	4,8	−15,7
		8	1,882	5,114	3,7	−12,9
0,75	2,000	2	3,704	1,119	14,3	−16,4
		4	1,881	4,121	6,2	−8,8
		6	2,535	0,062	4,8	−14,2
		8	2,048	3,110	3,6	−13,0
1,00	1,500	2	2,946	0,119	15,0	−18,5
		4	2,849	0,415	6,7	−11,6
		6	1,872	0,790	4,6	−13,1
		8	2,596	0,767	3,8	−14,9
1,25	1,200	2	2,212	0,050	15,6	−25,2
		4	2,798	0,583	7,1	−11,8
		6	2,133	1,015	4,5	−12,8
		8	2,463	1,888	3,6	−17,1
1,50	1,000	2	1,789	0,127	16,0	−22,1
		4	2,088	1,020	7,3	−13,6
		6	1,650	1,284	5,3	−12,3
		8	2,071	1,801	4,1	−14,3
2,00	0,750	2	1,645	0,222	16,6	−20,3
		4	1,952	0,490	7,1	−12,1
		6	1,784	1,899	4,7	−11,4
		8	2,402	0,849	3,8	−15,5

SLL — уровень первого бокового лепестка диаграммы $\sigma_b(\theta)$ относительно главного. $\Delta\theta_{-3}$ — ширина главного лепестка по уровню −3 дБ.

Случай $\kappa = 1$ соответствует изотропной сфере с $\varepsilon = 1,5$ и совпадает с классическим расчётом Ми ($\varepsilon_r = \varepsilon_t = 1,5$); при $\kappa \neq 1$ значения отличаются.

на трёхслойной линзе с радиально-симметричной перфорацией (8.5.2), где отношения $\kappa_l = \varepsilon_t^{(l)}/\varepsilon_r^{(l)}$ составляют 0,84; 0,83; 0,88. Замена анизотропной модели изотропной ($\varepsilon_t \rightarrow \varepsilon_r$) искажает диаграмму рассеяния на 66 % по норме L_2 при $k_0a = 4\pi$ и на 57 % при $k_0a = 8\pi$, а обратное сечение изменяется в 28 раз ($Q_{\text{back}} = 0,030$ против 0,85). Учёт радиальной анизотропии для перфорированных печатных линз, таким образом, не является уточнением второго порядка — он определяет результат качественно.

2.11.6 Соотношение с геометрикооптическим синтезом анизотропных и градиентных линз школы ИРЭ РАН

Развитый выше строгий аппарат анализа радиально-анизотропных сфер занимает вполне определённое место относительно работ научной школы ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (В. А. Калошин, А. С. Венецкий с соавторами), в которых задача анизотропных и градиентных линз решается со стороны *синтеза*. Явное сопоставление двух аппаратов проясняет и заимствованный из этих работ бэкграунд, и вклад настоящего раздела.

Аппарат синтеза (школа ИРЭ РАН). В задаче синтеза *анизотропной* цилиндрической линзы Люнеберга [14] искомый профиль показателя преломления восстанавливается из лучевых уравнений двумя способами — итерационной процедурой на модели непрерывной градиентной среды и рекуррентной процедурой на слоистой модели (пошаговый пересчёт параметров слоёв от оболочки к центру). Показано, что итерационная процедура неустойчива при малых радиусах, тогда как рекуррентная слоистая процедура обеспечивает малую лучевую погрешность синтеза при числе слоёв $50 \dots 150$; анизотропия описывается двумя компонентами показателя преломления — радиальной $n_r(r)$ и тангенциальной $n_\phi(r)$ — кольцевой диэлектрической структуры, а проверка синтезированной антенны выполняется *внешним* конечно-элементным расчётом. Родственная работа [13] даёт замкнутое (аналитическое) общее решение задачи синтеза градиентной линзы с центральной симметрией: лучевой интеграл сводится заменой $\rho = n(r)r$ к интегральному уравнению типа Абеля с явным обращением, из которого решение Моргана (а через него — Люнеберга и Гутмана), Кэя и Итона–Липмана получаются как частные случаи; характерно, что при реализации закона $n(r)$ кольцевой структурой авторы намеренно ограничиваются одной компонентой проницаемости («обыкновенный» луч), не привлекая теорию анизотропной линзы. Сильные стороны этого аппарата — замкнутость и общность синтеза (единая формула охватывает произвольные внешний фокус и выходной фронт), количественный контроль сходимости и доведение результата до технологической реализации.

Аппарат анализа (настоящая работа). Развитый в 2.11.2 — 2.11.4 аппарат решает *смежную* задачу — строгий полноволновой анализ уже заданной

радиально-анизотропной слоистой структуры при произвольных электрических размерах k_0a . Соотношение двух подходов сведено в табл. 21.

Таблица 21 — Сопоставление геометрооптического синтеза анизотропных и градиентных линз (школа ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН) и полноволнового анализа методом тензорных функций Грина (настоящая работа).

Признак	Синтез (геом. оптика), [13; 14]	Анализ (ТФГ, наст. работа)
Тип задачи	Восстановить закон $n(r)$ под заданную фокусировку	Рассчитать поле и рассеяние заданной слоистой структуры
Приближение	Геометрическая оптика (луч, эйконал), $k_0a \rightarrow \infty$	Строгое электродинамическое, любые k_0a
Мат. аппарат	Лучевой интеграл $\rightarrow$ уравнение типа Абеля с явным обращением [13]; послойный пересчёт профиля от оболочки к центру [14]	Рекуррентный пересчёт направленных импедансов (2.68) + ряд по сферическим гармоникам
Геометрия	Планарная [13] / цилиндрическая кольцевая [14]	Сферическая радиально-слоистая
Анизотропия	Две компоненты n_r, n_ϕ [14]; либо одна ($\epsilon_\parallel$) [13]	Полные тензоры $\hat{\epsilon}, \hat{\mu}$ (2.60), порядки ν_E, ν_H (2.64)
Число слоёв	50...150 (критерий лучевой погрешности) [14]	8...16 (электродинам. критерий, гл. 4)
Верификация	Внешним МКЭ (Ansys HFSS)	Встроенный строгий расчёт; изотропный предел до $5,8 \cdot 10^{-15}$

Математические связи. Соотношение двух аппаратов не только тематическое, но и структурное. Во-первых, обе схемы используют одну вычислительную идею — *послойную рекурсию от оболочки к центру*, — применённую, однако, к разным объектам: у [14] рекуррентно пересчитываются параметры геометрооптического профиля $n_r(r)$ слоя, а в настоящей работе (2.68) — строгие направленные импедансы $Z_n^{\leftarrow(l)}$. Во-вторых, анизотропия, задаваемая у [14] отношением тангенциальной и радиальной компоненты показателя преломления n_ϕ/n_r , в настоящем аппарате входит в анализ через аналогичное отношение ϵ_t/ϵ_r , непосредственно определяющее модифицированный (нецелочисленный) угловой порядок (2.64); при этом развитый формализм дополнительно охватывает и магнитную анизотропию ($\mu_r \neq \mu_t$, порядок ν_H), выходящую за рамки чисто диэлектрической постановки [14]. В-третьих, требуемое для сходимости число слоёв различается по критерию: лучевой критерий малой погрешности даёт 50...150 слоёв [14], тогда как электродинамический критерий (диаграмма, эффективности рассеяния) обеспечивается 8...16 слоями (гл. 4) — строгий критерий оценивает необходимую дискретизацию иначе (как правило, скромнее),

чем чисто лучевой. Тем самым синтезированный геометрооптический профиль $\{n_{r,i}, R_i\}$ является готовым входом для строгого анализа развитым аппаратом, а пара «синтез закона $n(r)$ (школа ИРЭ РАН) — полноволновой анализ заданной структуры (настоящая работа)» образует замкнутую проектную цепочку для класса анизотропных радиально-слоистых линз.²

2.11.7 Связь с трансформационной оптикой и переход к маскирующим оболочкам Pendry

Особый интерес представляет связь полученных формул с теорией трансформационной оптики [128]. Для сферически-симметричного преобразования $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ якобиан даёт тензорные параметры

$$\varepsilon_r(r) = \mu_r(r) = \left[\frac{f(r)}{r} \right]^2 \left[\frac{df}{dr} \right]^{-1}, \quad \varepsilon_t(r) = \mu_t(r) = \frac{df}{dr}, \quad (2.71)$$

обобщающие профиль линзы Люнеберга на анизотропный случай [11; 13; 14]. В частности, маскирующая оболочка [128] реализуется отображением $f(r) = R_2(r - R_1)/(R_2 - R_1)$ для $r \in [R_1, R_2]$, что даёт

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{r - R_1}{r} \right)^2, \quad \varepsilon_t = \mu_t = \frac{R_2}{R_2 - R_1}. \quad (2.72)$$

Подстановка (2.72) в (2.68) даёт замкнутые рекуррентные соотношения для анализа маскирующих оболочек методом ТФГ — задача, не имеющая корректного решения в рамках скалярного формализма. Реализация и численная верификация для случая Pendry-cloak вынесена за рамки настоящей работы и составляет одно из приоритетных направлений дальнейшего развития [24].

Полученные в настоящем разделе соотношения (2.64), (2.68) и (2.69) образуют замкнутый аппарат анализа сферических радиально-анизотропных слоистых структур, включающий классический случай линзы Люнеберга в качестве частного предела, и допускают непосредственное расширение на бианизотропные ($\hat{\xi}(r) \neq 0$) среды с заменой скалярных импедансов $\zeta^{(l)}$ на 4×4 матрицы, что отвечает обобщённой постановке задачи в современных метаматериалах с магнитоэлектрической связью.

²Взаимность этой связи прослеживается и библиографически: работа соискателя по многолучевой линзовой антенне на основе линзы Люнеберга [34] входит в список литературы статьи [14].

2.12 Выводы по главе

В настоящей главе разработан и верифицирован математический аппарат анализа многослойных сферических структур на основе тензорных функций Грина (ТФГ). Аппарат является центральным инструментом диссертации и используется во всех последующих главах для получения замкнутых аналитических выражений характеристик линз Люнеберга; его распространение на структуры с радиально-анизотропной проницаемостью обеспечивает единый методический каркас для глав 5–7 (см. также 2.11). Тороидная конфигурация выводится за рамки настоящей главы: она рассматривается в 7.6 в приближении $R \gg a$, где каждое минорное сечение сводится к двумерной цилиндрической линзе.

Ключевой вывод главы. Реализованный через рекуррентный пересчёт направленных импедансов $\overleftarrow{Z}_n(r_l)$ и адмитансов $\overleftarrow{Y}_n(r_l)$ метод ТФГ обеспечивает замкнутое полуаналитическое представление характеристик сферически-симметричной радиально-стратифицированной структуры с числом слоёв $L \in [4; 16]$, электрическим размером $k_0 a \in [\pi; 10\pi]$ и диэлектрической проницаемостью слоёв $\epsilon_l \in [1; 2]$; расхождение с эталонным FEM-решением (Ansys HFSS) не превышает $0,6^\circ$ по ширине главного лепестка и 1 дБ по уровню первого бокового лепестка при сокращении машинного времени расчёта на $2 \dots 4$ порядка. Совокупность этих результатов составляет содержание **положения 1**, выносимого на защиту. Программная реализация аппарата в виде открытой Python-библиотеки *GreenTensor* (положение 2) изложена в главе 10; верификация на канонических задачах рассеяния приведена в главах 3–5. Распространение аппарата на произвольные кусочно-координатные структуры (плоско-сферические, сферо-цилиндрические, цилиндрические) выполнено в главе 9 и составляет содержание **положения 1**, выносимого на защиту.

Глава 3. Дифракция плоской электромагнитной волны на линзе

3.1 Введение

Линза Люнеберга применяется не только как активная антенна, но и как пассивная отражающая структура для управления эффективной поверхностью рассеяния объектов в задачах радиолокации и специальной радиосвязи. В сложных антенных системах наряду с основным облучателем могут использоваться дополнительные источники, формирующие вспомогательные диаграммы для подавления организованных помех или зондирования подстилающей поверхности. Анализ таких конфигураций приводит к постановке *задачи дифракции* электромагнитных волн на многослойной ЛЛ. Общая теория дифракции на телах простой формы развита в классических работах [133; 173—175]; дифракция на многослойных цилиндрических структурах детально изучена в [22; 176; 177]. В настоящей главе получены расчётные выражения и исследованы дифракционные характеристики линзы при облучении волнами линейной и круговой поляризации; введён коэффициент поляризационных потерь α по основной и кросс-поляризации. Появление кросс-поляризационной составляющей обусловлено границами раздела между слоями и кривизной сферических поверхностей.

Публикации автора по материалам главы 3: [59—61; 79; 178].

3.2 Частный вид функций Грина для задач дифракции

В задаче антенного возбуждения вектор напряжённости поля в дальней зоне выражается через полное представление тензорной функции Грина (ТФГ), включающее как $\vec{M}$ -, так и $\vec{N}$ -компоненты сферических векторных гармоник (глава 2). В задаче же дифракции источник вынесен в бесконечность, а поле наблюдается в дальней зоне; при этом во многих практически значимых случаях — в частности, при падении плоской волны на слоистую сферу — из общего представления остаётся только один ряд сферических векторных гармоник, зависящий от радиальной координаты источника тривиальным образом. Благодаря этому выражения для дифракционного поля оказываются существенно компактнее антенных; вывод соответствующих частных форм ТФГ подробно приведён в монографии автора [61] и в [17—19]. Тот же приём редукции ряда в слоистых цилиндрических структурах применялся в работах школы Б. А. Пан-

ченко [21; 23], где показана его вычислительная эффективность по сравнению с методом моментов.

3.3 Представление источников поля для задач дифракции

Дифракционная постановка требует корректного представления *первичного* источника, формирующего падающую на линзу электромагнитную волну. В настоящей главе рассматриваются два случая. Первый — линейная поляризация: сторонний электрический ток, расположенный на бесконечном удалении от линзы, ориентирован вдоль одного из единичных векторов сферической системы координат ($\hat{a}_\theta$ или $\hat{a}_\varphi$); формируемая им в окрестности линзы волна является плоской с заданной линейной поляризацией. Второй — круговая поляризация: сторонний ток представляется суперпозицией двух ортогональных составляющих равной амплитуды со сдвигом фазы $\pm\pi/2$, что формирует волну круговой поляризации правого или левого вращения. Расчётные соотношения для обоих случаев приводятся ниже по мере их использования; для линейной поляризации постановка отвечает предельным случаям $\alpha \rightarrow 0$ или $\alpha \rightarrow 1$ в формуле (3.1).

3.4 Дифракционные характеристики линзы Люнеберга при линейной поляризации

Для падающей волны линейной поляризации диаграмма рассеяния ЛЛ в дальней зоне вычисляется на основе ТФГ через коэффициенты среды M_n, N_n , получаемые последовательным пересчётом направленных импедансов и адмитансов слоёв по рекуррентной схеме Панченко [17]. Для многослойной ЛЛ с профилем $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ и шестислойной оптимизированной аппроксимацией (табл. 56 главы 7) максимум рассеянного поля концентрируется в направлении $\theta = 180^\circ$ относительно направления падения, что соответствует известному свойству линзы Люнеберга отражать падающую плоскую волну обратно в сторону источника. С ростом электрического радиуса k_0a угловая ширина области концентрации уменьшается, а уровень кросс-поляризационной составляющей снижается и для $k_0a = 8\pi$ не превышает -32 дБ относительно максимума основной поляризации. Количественные характеристики для линейной поляризации совпадают с результатами для круговой поляризации с точностью до распре-

деления мощности между ортогональными компонентами; поэтому детальное рассмотрение ведётся для случая круговой поляризации как наиболее общего.

3.5 Дифракционные характеристики линзы Люнеберга для поля круговой поляризации

Вывод расчётных соотношений для полей круговой поляризации приведён в монографии автора [61].

При дифракции плоской волны на многослойной сфере возникает кросс-поляризационная составляющая рассеянного поля. Физически это обусловлено двумя факторами: наличием границ раздела между слоями разной проницаемости и кривизной сферических поверхностей линзы. На каждой границе раздела волна преломляется и частично рассеивается, причём для сферической геометрии это рассеяние содержит компоненты, ортогональные исходной поляризации. В пределе непрерывного профиля $\varepsilon(r)$ такие рассеяния исчезают, поэтому уровень кросс-поляризации служит мерой качества слоистой аппроксимации.

Рассмотрим дифракцию на ЛЛ, когда поле источника, удаленного на бесконечность, формирует поле круговой поляризации. Как и в предыдущих постановках, задача решается в сферической системе координат, волна внешнего источника падает с направления $\theta = 0, \varphi = 0$. При этом сторонний ток, который формирует падающее поле, имеет вид:

$$\vec{I}_{\text{оп}}^e = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha \cdot \vec{a}_\theta \pm \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot e^{j\Psi} \cdot \vec{a}_\varphi) \quad (3.1)$$

где: Ψ — разность фаз между двумя ортогональными составляющими тока; $0 \leq \alpha \leq 1$;

$\vec{a}_\theta, \vec{a}_\varphi$ — единичные векторы в сферической системе координат;

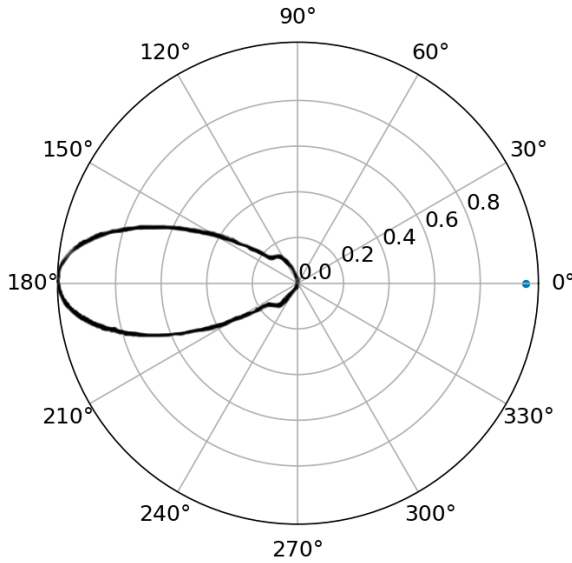
При $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$ формируется поле круговой поляризации правого и левого вращения.

Для поля *круговой поляризации* в дальней зоне вектор напряжённости дифрагированного поля, получаемый методом ТФГ, имеет вид:

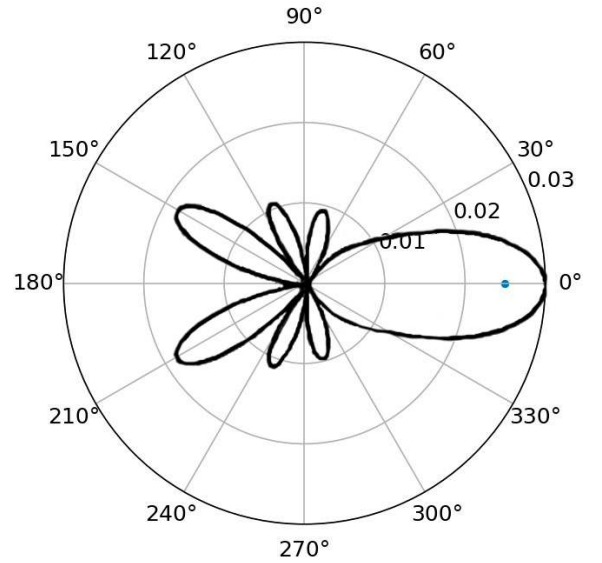
$$\vec{E}(\theta) = E_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \times \left\{ \begin{aligned} &(\vec{a}_\theta \cdot \tau_n(\theta) \cdot e^{j\varphi} + j\vec{a}_\varphi \cdot \pi_n(\theta) \cdot e^{j\varphi}) \cdot M_n - \\ &-(\vec{a}_\theta \cdot \pi_n(\theta) \cdot e^{j\varphi} + j\vec{a}_\varphi \cdot \tau_n(\theta) \cdot e^{j\varphi}) \cdot N_n \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Входящие в выражение (3.2) коэффициенты M_n , N_n введены в главе 2 и определяют параметры среды, а также тип и положение источника излучения (см. также (2.56)).

Корректность формулы проверена расчётом диаграмм рассеяния для многослойной ЛЛ. На рисунке 3.1 в полярной системе координат показаны рассеянные поля on и kn для электрического размера линзы $k_0 a = 2\pi$ ($2a = 2\lambda$). В качестве основной поляризации (on) выбрано поле правого вращения. Численные расчёты полей и дифракционных коэффициентов выполнены для шестислойной модели линзы.



а) Эталонное решение из [106]



б) Расчёт методом ТФГ

Рисунок 3.1 — Диаграммы рассеянного поля многослойной ЛЛ при $k_0 a = 2\pi$: a — эталонное решение из [106]; b — расчёт методом ТФГ (в увеличенном масштабе показан фрагмент для кросс-поляризационной составляющей)

С увеличением радиуса линзы концентрация энергии в направлении $\theta = 180^\circ$ возрастает. На рисунке 3.2 в декартовой системе координат в логарифмическом масштабе представлены диаграммы рассеяния по основной и кросс-поляризационной составляющим для увеличенного радиуса линзы $k_0 a = 8\pi$.

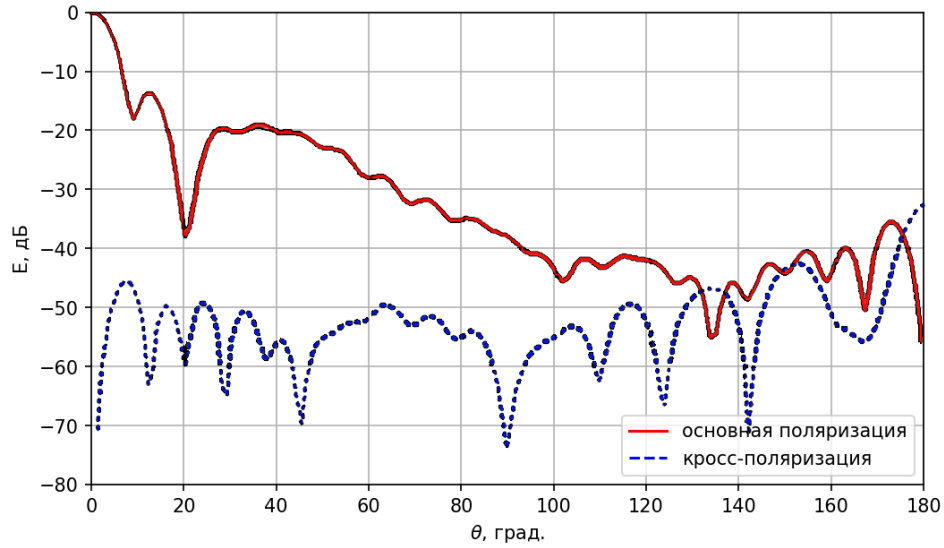


Рисунок 3.2 — Диаграммы рассеяния многослойной ЛЛ по основной и кросс-поляризационной составляющим при $k_0a = 8\pi$

Для других диаметров линзы основные вторичные характеристики диаграммы направленности приведены в таблице 22.

Таблица 22 — Вторичные характеристики ЛЛ в режиме дифракции для различных размеров

k_0a	$2\Delta\theta_{-3\text{ дБ}}^\circ$	$\theta_{\text{пбл}}^\circ$	$E_{\text{кп}}^{\text{max}}, \text{ дБ}$
2π	36°	-18	-28
4π	14°	-12	-30
8π	6°	-14	-32

где: $2\Delta\theta_{-3\text{ дБ}}^\circ$ — ширина диаграммы направленности по уровню -3 дБ; $\theta_{\text{пбл}}^\circ$ — уровень первого бокового лепестка, дБ; $E_{\text{кп}}^{\text{max}}$ — максимальный уровень $кп$ составляющей.

Концентрированный эффект рассеяния электромагнитных волн при дифракции описывается квадратичными дифракционными коэффициентами. Основные из них:

- общий коэффициент рассеяния σ_s ;
- поляризационные потери;
- двухпозиционный коэффициент рассеяния $\sigma_{\theta, \varphi, \theta_i, \varphi_i}$;
- радиолокационный и попутный коэффициенты $\sigma_{\text{оп}}(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ и $\sigma_{\text{кп}}(0, 0, 0, 0)$;
- коэффициент поглощения σ_a .

Общий коэффициент рассеяния σ_s , определяется отдельно для $оп$ и $кп$ составляющих:

$$\begin{aligned}\sigma_{s,оп} &= \frac{P_{оп}}{\pi a^2 |\Pi_i|} \\ \sigma_{s,кп} &= \frac{P_{кп}}{\pi a^2 |\Pi_i|}\end{aligned}\quad (3.3)$$

где: a — внешний радиус сферического образования;
 πa^2 — площадь проекции препятствия на фронт набегающей волны;
 $P_{оп}, P_{кп}$ — полная переизлучённая препятствием мощность;
 $|\Pi_i| = \frac{|E_0|^2}{2Z_0}$ — абсолютное значение действительной части вектора Пойнтинга падающей волны.

Из (3.2) следуют общие коэффициенты рассеяния для основной и кросс-поляризационной составляющих поля:

$$\begin{aligned}\sigma_{s,оп} &= \frac{1}{(k_0 a)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot |M_n + N_n|^2 \\ \sigma_{s,кп} &= \frac{1}{(k_0 a)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot |M_n - N_n|^2\end{aligned}\quad (3.4)$$

На рисунке 3.3 приведены графики зависимости $\sigma_{s,оп}$, $\sigma_{s,кп}$ от размеров линзы $k_0 a$.

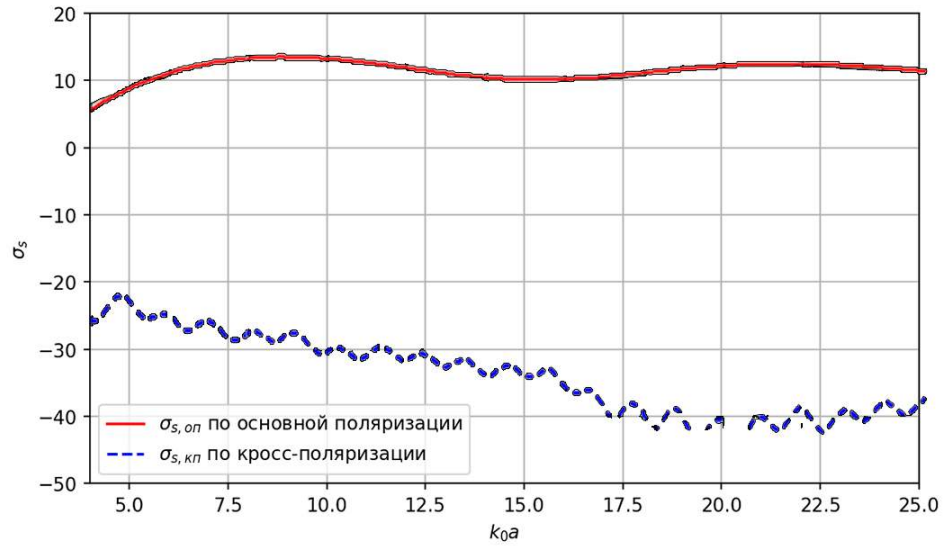


Рисунок 3.3 — Коэффициенты рассеяния ЛЛ при различных диаметрах линзы

Двухпозиционный коэффициент рассеяния $\sigma_{\theta, \varphi, \theta_i, \varphi_i}$ для *оп* и *кп* составляющих, которые характеризуют интенсивность рассеяния в определённых направлениях, характеризуемых углами θ и φ :

$$\begin{aligned}\sigma_{s,оп}(\theta, \varphi, \theta_i, \varphi_i) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2r}{a} \right)^2 \cdot \frac{|\Pi_{s,оп}(\theta, \varphi)|}{|\Pi_i(\theta_i, \varphi_i)|} \right) \\ \sigma_{s,кп}(\theta, \varphi, \theta_i, \varphi_i) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2r}{a} \right)^2 \cdot \frac{|\Pi_{s,кп}(\theta, \varphi)|}{|\Pi_i(\theta_i, \varphi_i)|} \right)\end{aligned}\quad (3.5)$$

где: $|\Pi_{s,оп}(\theta, \varphi)|$, $|\Pi_{s,кп}(\theta, \varphi)|$ — модуль вектора Пойнтинга рассеянной волны.

Подстановка (3.2) в (3.5) даёт двухпозиционные коэффициенты рассеяния:

$$\begin{aligned}\sigma_{оп}(\theta, \varphi, 0, 0) &= \frac{4}{(k_0 a)^2} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \cdot (-1)^n \cdot (\tau_n(\theta) - \pi_n(\theta)) \cdot (M_n + N_n) \right|^2 \\ \sigma_{кп}(\theta, \varphi, 0, 0) &= \frac{4}{(k_0 a)^2} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \cdot (-1)^n \cdot (\tau_n(\theta) + \pi_n(\theta)) \cdot (M_n - N_n) \right|^2\end{aligned}\quad (3.6)$$

Радиолокационный и попутный коэффициенты. Частными случаями двухпозиционных коэффициентов рассеяния являются радиолокационный $\sigma(0,0)$ и попутный $(\pi,0)$ коэффициенты рассеяния (3.7). Радиолокационный коэффициент (в направлении падающей волны $\theta = 0$, $\varphi = 0$) равен нулю для *оп* составляющей и имеет максимальное значение для *кп*. Для попутного коэффициента рассеяния (при $\theta = \pi$, $\varphi = 0$) максимум излучения определяется только полем *оп*.

$$\begin{aligned}\sigma_{оп}(\pi, 0, 0, 0) &= \frac{1}{(k_0 a)^2} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(M_n + N_n) \right|^2 \\ \sigma_{кп}(0, 0, 0, 0) &= \frac{1}{(k_0 a)^2} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(-1)^n(M_n - N_n) \right|^2\end{aligned}\quad (3.7)$$

В таблице 23 приведены расчётные данные по радиолокационному и попутному коэффициентам рассеяния для трёх радиусов линзы.

Таблица 23 — Попутный и радиолокационный коэффициенты ЛЛ

$k_0 a$	2π	4π	8π
$\sigma_{оп}(\pi, 0, 0, 0)$, дБ	19,8	23,9	29,9
$\sigma_{кп}(0, 0, 0, 0)$, дБ	-6,5	-8,3	-9,3

Коэффициент поглощения σ_a определяется с использованием оптической теоремы [103]:

$$\sigma_a = \frac{P_a}{\pi a^2 |\Pi_i|} \quad (3.8)$$

где: P_a — полная поглощённая препятствием мощность.

Коэффициент поглощения определяется выражением (3.9):

$$\sigma_a(a) = \frac{2}{(k_0 a)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) Re \cdot (-j) \cdot \left(\frac{j \overset{\leftarrow}{Z}_n(a)}{\left| j \overset{\leftarrow}{Z}_n(a) \cdot h_n(k_0 a) - h'_n(k_0 a) \right|^2} + \frac{1}{\left| j \overset{\leftarrow}{Y}_n(a) \cdot h_n(k_0 a) - h'_n(k_0 a) \right|^2} \right) \quad (3.9)$$

На практике реальные материалы, в том числе получаемые методом трёхмерной печати, содержат диэлектрические потери. Ниже в таблице 24 показано влияние омических потерь материала линзы $Im \epsilon'$ на коэффициенты рассеяния при радиусе линзы $k_0 a = 8\pi$. Полученные результаты демонстрируют возможность учитывать при расчётах параметры материалов с реактивными и нелинейными параметрами, что полезно при синтезе линз Люнеберга из метаматериалов и неоднородных структур, а также при оценке характеристик макетов, полученных 3D-печатью.

Таблица 24 — Влияние омических потерь на коэффициенты рассеяния ЛЛ

$Im \epsilon'$	0	0,01	0,1
$\sigma_{s,оп}$, дБ	5,5	4,7	2,38
$\sigma_{s,кп}$, дБ	-18,8	-19,4	-24,3
$\sigma_{оп}(\pi, 0, 0, 0)$, дБ	29,9	29,85	29,75
$\sigma_{кп}(0, 0, 0, 0)$, дБ	-9,3	-9,5	-10,6
$\sigma_a(a)$, дБ	—	-8,9	-3,4

Для линзы без потерь ($Im \epsilon' = 0$) коэффициент поглощения тождественно равен нулю, поэтому его логарифмическая мера не определена и отмечена прочерком.

Поляризационные потери α могут характеризовать потери на переизлучение, связанные с полем нежелательной поляризации в некотором конусе углов q_0 или во всем полупространстве. Определяется как отношение мощности, излученной полем $кп$, к суммарной мощности, излученной антенной (3.10).

$$\alpha = \frac{\sigma_{s,кп}}{\sigma_{s,оп} + \sigma_{s,кп}} \quad (3.10)$$

Поляризационная эффективность линзы μ при этом определяется через коэффициент поляризационных потерь $\mu = 1 - \alpha$. На рисунке 3.4 приведена зависимость изменения коэффициента поляризационных потерь от радиуса линзы $k_0 a$. Колебательный характер коэффициента α при больших значениях радиуса линзы обусловлен наличием большого количества боковых лепестков, что является следствием интерференции волн, переизлучённых отдельными участками объёмной структуры неоднородной линзы. В частности, основной вклад в переизлучение вносят стыки на границах раздела слоёв.

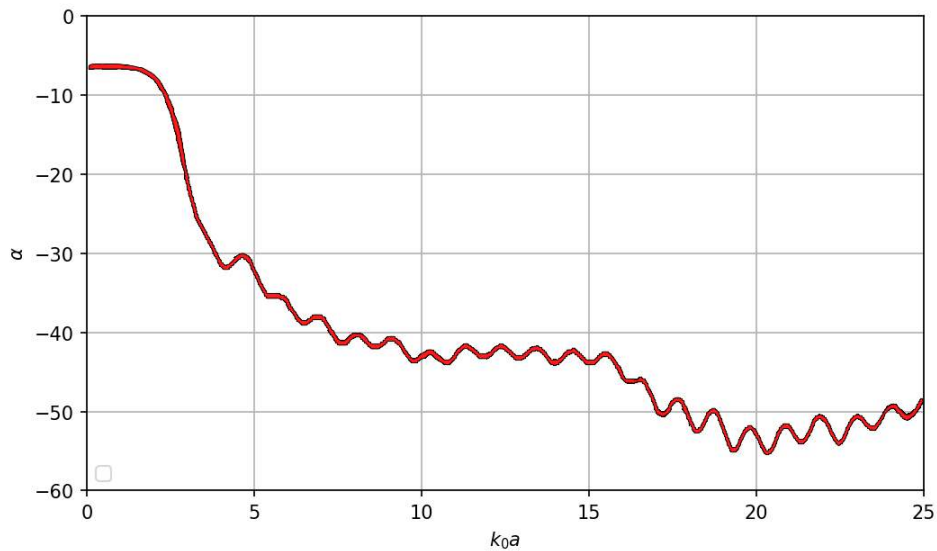


Рисунок 3.4 — Коэффициент поляризационных потерь $\alpha(k_0 a) = \sigma_{s, \text{кп}} / (\sigma_{s, \text{оп}} + \sigma_{s, \text{кп}})$ при облучении волной круговой поляризации: осциллирует вследствие интерференции волн, переизлучённых границами раздела слоёв; локальные минимумы α образуют рабочие «окна» минимальных поляризационных потерь

Таким образом, выведенные формулы и диаграммы рассеяния служат эталоном для верификации методов расчёта в последующих главах и позволяют оценить предельные электродинамические свойства линзы. В частности, результаты демонстрируют, как ЛЛ при облучении плоской волной преобразует её в сфокусированный пучок обратного/попутного направления. Дифракционный режим совместим с антенным и позволяет создавать вспомогательные лучи для подавления организованных помех без внесения активных элементов.

3.6 Численный анализ зависимости $\alpha(k_0a)$ для многослойной аппроксимации

Для количественной иллюстрации колебательного характера коэффициента поляризационных потерь α выполнен прямой численный расчёт по методике настоящей главы для многослойной аппроксимации линзы Люнеберга при различных электрических радиусах и числе слоёв. Нормированные сечения рассеяния для основной (co-pol) и кросс-поляризационной (cross-pol) компонент вычислялись по формулам

$$\sigma_{\text{оп}} \propto \sum_{n=1}^{N_{\text{max}}} (2n+1) |M_n + N_n|^2, \quad \sigma_{\text{кп}} \propto \sum_{n=1}^{N_{\text{max}}} (2n+1) |M_n - N_n|^2, \quad (3.11)$$

с последующей оценкой коэффициента поляризационных потерь $\alpha = \sigma_{\text{кп}} / (\sigma_{\text{оп}} + \sigma_{\text{кп}})$ и усечением ряда по $N_{\text{max}} = [k_0a] + 10$. Результаты для равношаговой аппроксимации сведены в таблицу 25.

Таблица 25 — Коэффициент поляризационных потерь α для многослойной линзы Люнеберга при различных электрических радиусах k_0a и числе слоёв L

k_0a/π	$L = 4$	$L = 6$	$L = 8$	$L = 12$	$L = 16$
1,0	0,064	0,315	0,066	0,056	0,056
1,5	0,189	0,428	0,148	0,102	0,083
2,0	0,428	0,250	0,467	0,373	0,279
3,0	0,418	0,295	0,346	0,199	0,129
4,0	0,422	0,413	0,284	0,316	0,350
5,0	0,370	0,441	0,426	0,336	0,153
6,0	0,342	0,353	0,438	0,232	0,240
7,0	0,345	0,331	0,329	0,422	0,246
8,0	0,349	0,366	0,328	0,395	0,161

Анализ данных таблицы 25 подтверждает три предсказания развитой в настоящей главе теории.

Во-первых, зависимость $\alpha(k_0a)$ при фиксированном числе слоёв L имеет выражено *колебательный* характер: значения варьируются от $\sim 0,06$ до $\sim 0,47$ для $L = 4$ и от $\sim 0,06$ до $\sim 0,38$ для $L = 16$ в диапазоне $k_0a = (1 \dots 8)\pi$. Экстремумы $\alpha(k_0a)$ соответствуют частотам резонансной интерференции волн, переизлучаемых границами раздела между соседними слоями: конструктивная интерференция переизлучений порождает локальный максимум кросс-поляризационной составляющей, деструктивная — её минимум.

Во-вторых, наблюдается *тенденция к уменьшению* α при увеличении L — особенно ярко выраженная в низкочастотной области $k_0a \leq 2\pi$, где переход

от $L = 4$ к $L = 16$ уменьшает α в 2–3 раза. В области высоких k_0a тенденция сохраняется на среднем уровне, но локальные колебания амплитуды α при конкретных k_0a могут нарушать монотонность. Это соответствует общему теоретическому ожиданию: при $L \rightarrow \infty$ многослойная аппроксимация приближается к непрерывному профилю, для которого $M_n = N_n$ по симметрии, и $\alpha \rightarrow 0$.

В-третьих, в целях снижения радиозаметности многослойной ЛЛ, использующейся как пассивный отражатель, целесообразно *выбирать число слоёв L совместно с рабочим частотным диапазоном*, избегая локальных максимумов $\alpha(k_0a)$. Так, при $L = 16$ существуют «окна» с $\alpha \leq 0,17$ в областях $k_0a = (5 \dots 5,5)\pi$ и $k_0a = (7,5 \dots 8)\pi$, что позволяет проектировать линзу с заданной поляризационной эффективностью $\mu = 1 - \alpha \geq 0,83$ в требуемой рабочей полосе без привлечения дополнительных конструктивных элементов (экранов, согласующих слоёв).

Значения таблицы 25 получены прямым численным расчётом методом ТФГ, реализованным в Python на базе `scipy.special.spherical_jn` / `spherical_yn` с рекуррентным пересчётом направленных импедансов по формулам (2.26)–(2.30) главы 2; исходный код опубликован в репозитории *GreenTensor* [46]. Показатель α , таким образом, не только воспроизводит ожидаемое колебательное поведение, но и даёт конкретный инженерный инструмент для выбора параметров стратификации линзы Люнеберга в задачах управления её радиозаметностью.

3.7 Выводы по главе

В настоящей главе разработан и апробирован аппарат оценки дифракционных характеристик сферической градиентной линзы Люнеберга при её облучении плоской электромагнитной волной. Получены замкнутые выражения для диаграмм рассеяния в основной и кросс-поляризационной компонентах, введены коэффициент поляризационных потерь α и поляризационная эффективность $\mu = 1 - \alpha$, выполнена систематизация факторов, снижающих дифракционную эффективность многослойной аппроксимации. Полученные оценки σ_s и μ служат теоретической базой для последующих глав — проектирования антенных характеристик одиночной линзы (глава 5), линейных и моноимпульсных решёток (глава 6), модифицированных конфигураций (глава 7).

ва 7) и экспериментальной апробации макетов FDM-печати (глава 8); выбор схемы разбиения на слои составляет предмет главы 4.

Ключевой вывод главы. Введённый коэффициент поляризационных потерь $\alpha = \sigma_{s, \text{кп}} / (\sigma_{s, \text{оп}} + \sigma_{s, \text{кп}})$ и сопряжённая поляризационная эффективность $\mu = 1 - \alpha$, а также установленный осциллирующий характер $\alpha(k_0 a)$, обусловленный интерференцией волн на границах раздела слоёв и образующий спектральные «окна» минимальных потерь, — задают количественный инженерный критерий выбора числа слоёв и рабочей полосы при проектировании пассивных отражателей кругополяризованного излучения и составляют содержание **пятого положения**, выносимого на защиту.

Глава 4. Способы аппроксимации многослойных линз

4.1 Введение

Ранее в разделе 1.4 рассматривалась линза с равношаговым разбиением, при котором толщина каждого слоя одинакова. В настоящей главе рассмотрены иные варианты дискретизации профиля и оценено их влияние на электродинамические свойства ЛЛ. Задачи ступенчатой аппроксимации непрерывно-неоднородных сред изучались для слоистых волноводов [149; 150] и многослойных цилиндрических структур [23; 177]; ниже этот подход перенесён на сферический случай линзы Люнеберга.

Публикации автора по материалам главы 4: [77].

4.2 Свойства линз при равношаговой аппроксимации

На рисунке 4.1 показана *равношаговая* аппроксимация закона Люнеберга для четырёх и восьми слоёв: параметры слоёв показаны столбчатыми диаграммами. При такой дискретизации столбцы располагаются *касательно* к функции $\varepsilon(r) = 2 - r^2$.

Более высокие рабочие характеристики обеспечивает вариант заполнения профиля проницаемостями, показанный на рисунке 4.2. Формально это равношаговая дискретизация, но по конструкции она производна от варианта на рисунке 4.1: для четырёхслойного разбиения параметры материалов совпадают с параметрами первого, третьего и пятого слоёв при восьмислойном разбиении (таблица 26). Далее этот способ мы будем называть «оптимизированным равношаговым».

Для получения линз с эффективными электрофизическими характеристиками практически всегда требуется дополнительно решать оптимизационную задачу. Универсального способа разбиения, гарантирующего оптимум на всех длинах волн, не существует: эти параметры зависят от конечных размеров линзы и от доступных для синтеза свойств материалов. Большинство современных пакетов электродинамического анализа включает собственные модули оптимизации, и на практике изготовлению линзы методом 3D-печати предшествует подбор параметров слоёв с использованием таких оптимизаторов; входными переменными служат радиусы слоёв, их электродинамические свойства и допу-

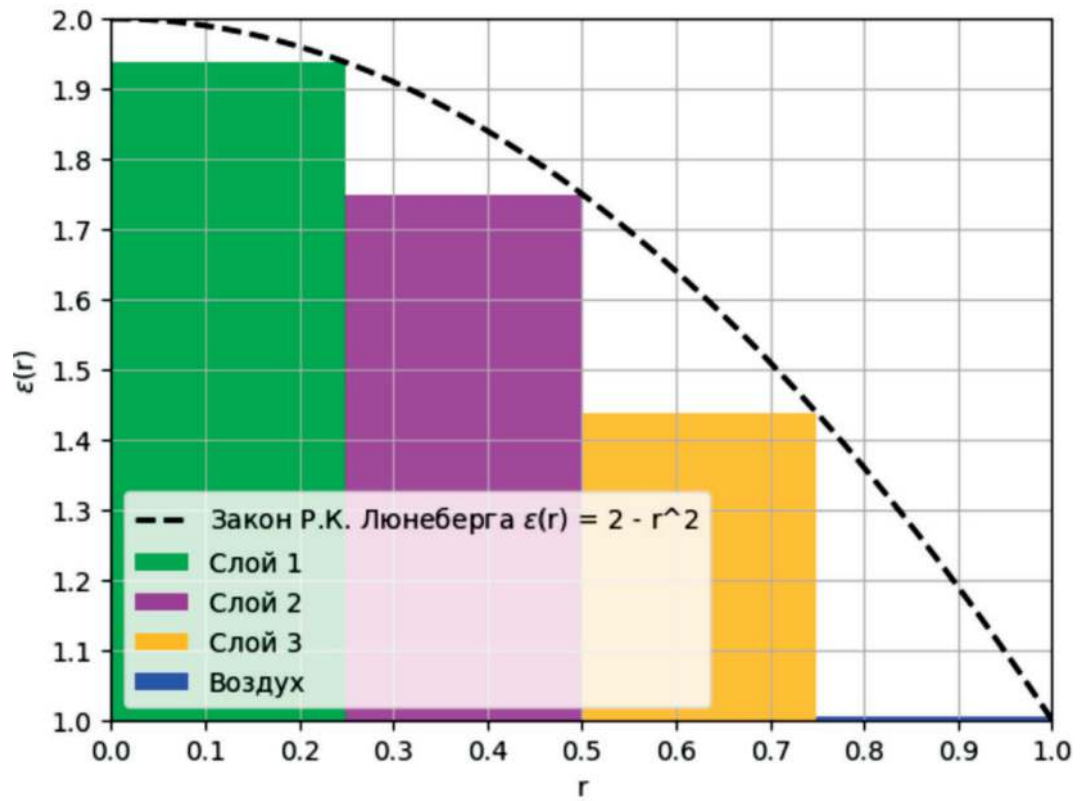
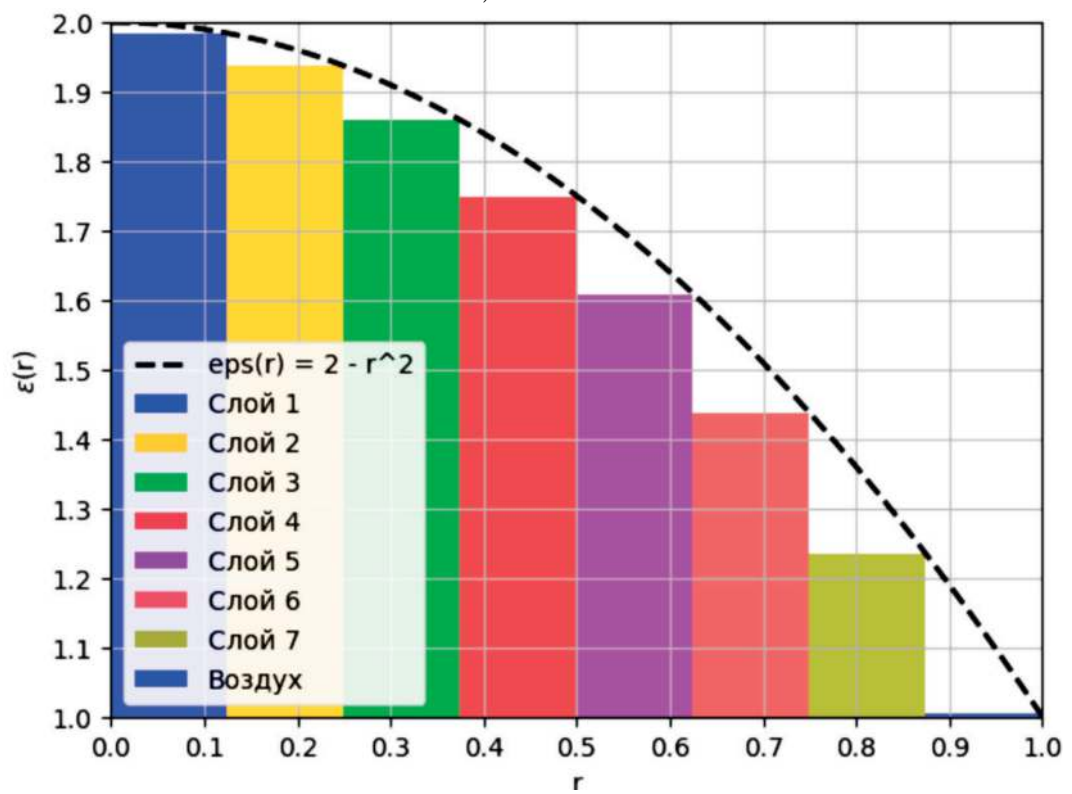
а) $L = 4$ б) $L = 8$

Рисунок 4.1 — Равношаговое разбиение профиля линзы Люнеберга для четырёх 4.1а и восьми слоёв 4.1б

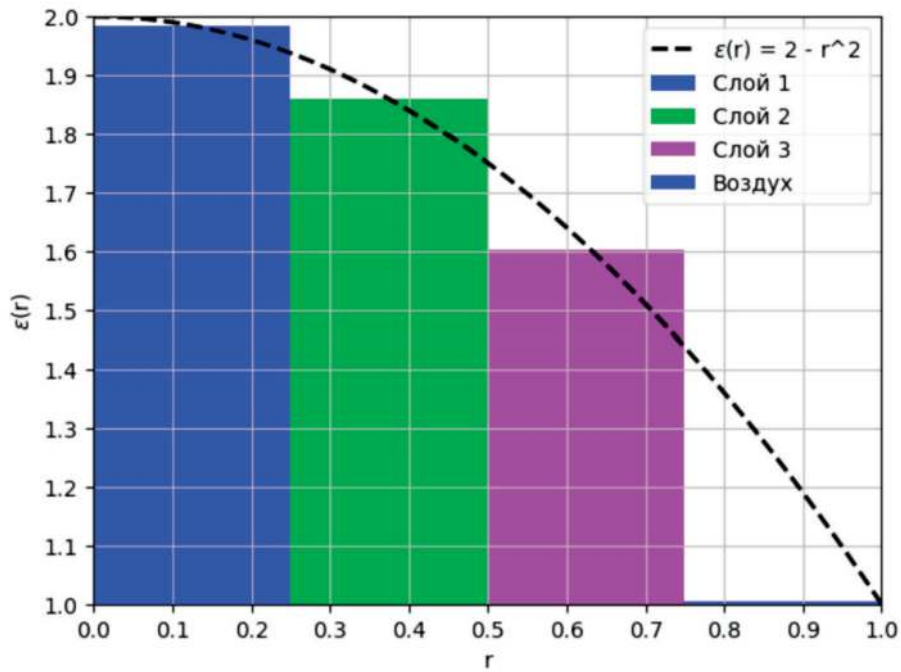


Рисунок 4.2 — Пример оптимизированного равношагового разбиения профиля линзы Люнеберга

Таблица 26 — Выбор параметров слоёв для оптимизированной равношаговой аппроксимации

Количество слоёв*	Нормированные радиусы слоёв	Диэлектрическая проницаемость ϵ
4	0,25, 0,5, 0,75, 1	1,938, 1,75, 1,438, 1
8	0,125, 0,25 , 0,375, 0,5 , 0,625, 0,75 , 0,875, 1	1,98 , 1,94, 1,86 , 1,75, 1,61 , 1,44, 1,23, 1

Примечание: **выделены** радиусы слоёв при 4-ступенчатом равношаговом разбиении, и соответствующие им параметры проницаемости при 8-ступенчатом равношаговом разбиении (рисунок 4.2).

стимые диапазоны поиска.

Для оптимизации параметров линзы в пакете *Ansys Electronics Desktop (HFSS Design)* использовался встроенный модуль Optimetrics. В качестве алгоритма выбран многокритериальный генетический алгоритм *Multiple-Objective Genetic Algorithm (MOGA)* — итеративный метод случайного поиска для задач с непрерывными входными параметрами, хорошо зарекомендовавший себя при поиске глобальных оптимумов в многопараметрических задачах [179].

Формально подбор параметров L -слойной аппроксимации сводится к *многокритериальной* задаче оптимизации. Проектными переменными служат нормированные радиусы границ слоёв и их диэлектрические проницаемости, $\mathbf{x} = (r_1, \dots, r_{L-1}; \epsilon_1, \dots, \epsilon_{L-1})$ (внешняя граница $r_L = a$ и согласующий слой

$\varepsilon_L = 1$ фиксированы), а искомый вектор доставляет минимум векторного критерия

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\text{RMSE}(\varepsilon; \mathbf{x}), -G(\theta = 0; \mathbf{x}), \text{SLL}(\mathbf{x})) \longrightarrow \min_{\mathbf{x} \in X} \quad (4.1)$$

при технологических ограничениях FDM-3D-печати, образующих допустимое множество X :

$$\varepsilon_l \in [1; \varepsilon_{\max}], \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_L, \quad 0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{L-1} < a, \quad (4.2)$$

где диапазон $[1; \varepsilon_{\max}]$ определяется реализуемой управляемой пористостью полимера (для HIPS $\varepsilon_{\max} = 2,4$), а условие монотонности отражает невозрастающий профиль Люнеберга. Геометрический критерий $\text{RMSE}(\varepsilon; \mathbf{x})$ задаётся выражением (4.14), антенные критерии — коэффициент усиления в направлении оси $G(\theta = 0)$ и уровень первого бокового лепестка SLL ; для пассивных рассеивателей кругополяризованного излучения к (4.1) добавляется коэффициент поляризационных потерь $\alpha(k_0 a)$ (глава 3). Перечисленные критерии конфликтны — дробление на узкие слои улучшает RMSE , но усложняет печать и повышает чувствительность к производственным допускам, — поэтому решением служит не единственная точка, а *множество Парето*, которое и аппроксимирует генетический алгоритм MOGA; из него проектировщик выбирает компромиссную конфигурацию под конкретное приложение.

Помимо реализации в составе Optimetrics, предложенная постановка (4.1)–(4.2) реализована в виде самостоятельного расчётного модуля `moga_stratification.py` (алгоритм NSGA-II с финишным локальным уточнением по необходимым условиям L_2 -оптимальности; критерий RMSE вычисляется аналитически, послойным интегрированием). Это позволяет воспроизводимо строить фронт Парето по паре критериев $(\text{RMSE}(\varepsilon), \Delta\varepsilon_{\max})$ без обращения к коммерческому пакету; количественные результаты MOGA-стратификации для $L = 1\text{--}16$ слоёв приведены в 4.5, а детальное сравнение со схемами Фукса и равношаговой — в 7.10.2.

В качестве иллюстрации предложенного подхода рассмотрим диаграмму рассеяния четырёхслойной ЛЛ, синтезированной тремя различными способами: *равношаговым* (таблица 3), *равношаговым оптимизированным* (таблица 26) и *оптимизированным генетическим алгоритмом* MOGA. В последнем случае начальными данными для алгоритма служили значения из таблицы 26; диаметр линзы составлял 6λ. Параметры слоёв, полученные по итогам работы

Таблица 27 — Параметры слоёв четырехслойной ЛЛ для различных способов аппроксимации

Способы аппроксимации	Радиусы слоёв	Диэлектрическая проницаемость ϵ
Равношаговая	0,25, 0,5, 0,75, 1	1,938, 1,75, 1,438, 1
Равношаговая оптимизированная	0,25, 0,5, 0,75, 1	1,98, 1,86, 1,61, 1
Оптимизированная генетическим алгоритмом	0,49, 0,62, 0,92, 1	1,96, 1,53, 1,36, 1

MOGA, вместе с параметрами для двух других способов аппроксимации сведены в таблицу 27.

Как видно из рассмотренного примера, *равношаговое оптимизированное* разбиение обеспечивает на 1,5 дБ большее излучение в направлении падающей волны ($E_\theta = 0$) по сравнению с обычным *равношаговым*; параметры слоёв, найденные генетическим алгоритмом, повышают уровень излучения в том же направлении ещё примерно на 6 дБ (см. рисунок 4.3). Следовательно, применение оптимизационных алгоритмов позволяет уменьшить число слоёв и одновременно повысить эффективность линзы. При проектировании антенн оптимизатор практически необходим. В то же время нельзя утверждать, что параметры четырёхслойной линзы из таблицы 27 будут одинаково эффективны во всём возможном диапазоне диаметров линзы.

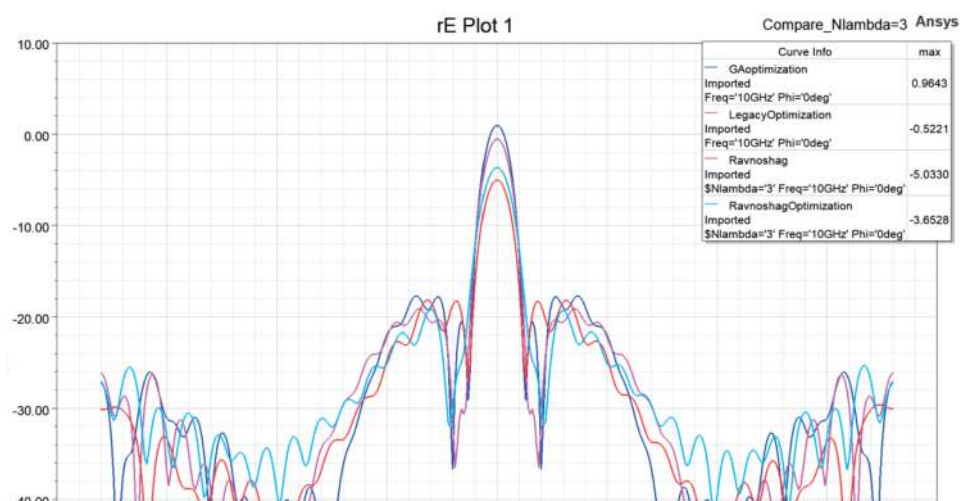


Рисунок 4.3 — Диаграмма рассеяния линзы при $D = 6\lambda$ при разных способах аппроксимации закона Люнеберга

В таблице 28 приведены параметры слоёв для *равношаговой опти-*

Таблица 28 — Равношаговая оптимизированная аппроксимация

Количество слоёв*	Нормированные радиусы слоёв	Диэлектрическая проницаемость ϵ
2	0,5, 1	1,89, 1
3	0,33, 0,67, 1	1,94, 1,75, 1
4	0,25, 0,5, 0,75, 1	1,98, 1,86, 1,61, 1
5	0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1	2, 1,91, 1,75, 1,51, 1
6	0,17, 0,33, 0,5, 0,67, 0,833, 1	2, 1,94, 1,83, 1,66, 1,44, 1
7	0,14, 0,29, 0,43, 0,57, 0,71, 0,86, 1	2, 1,96, 1,88, 1,76, 1,6, 1,41, 1
8	0,125, 0,25, 0,375, 0,5, 0,625, 0,75, 0,875, 1	2, 1,97, 1,9, 1,81, 1,69, 1,53, 1,35, 1
9	0,11, 0,22, 0,33, 0,44, 0,56, 0,67, 0,78, 0,89, 1	2, 1,99, 1,94, 1,87, 1,77, 1,64, 1,48, 1,29, 1
10	0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1	2, 1,98, 1,94, 1,88, 1,8, 1,7, 1,58, 1,44, 1,28, 1

мизированной аппроксимации, рекомендуемые как стартовые значения для оптимизаторов. Данные охватывают разбиения от двух до десяти слоёв — дальнейшее увеличение L нецелесообразно ввиду несоразмерного роста вычислительных затрат. На рисунке 4.4 наглядно показан принцип разбиения для каждого случая.

Анализ множества оптимизационных прогонов выявил практические правила для начальных значений:

- наиболее эффективно задавать радиус первого слоя на уровне 30...50 % от радиуса всей линзы;
- последующие слои удобно выбирать по принципу равношагового оптимизированного разбиения оставшейся части линзы.

Согласно этим правилам, у линз с $\epsilon \approx 1,9 \dots 2,0$ первые слои объединяются в один с усреднённой проницаемостью. Из рисунков 1.7 и 4.5 следует, что наиболее эффективны линзы с 4...10 слоями. Дополнительно крайний воздушный зазор разбивается пополам тонким диэлектрическим слоем для более точной аппроксимации закона Люнеберга у поверхности. Итоговые параметры приведены в таблице 29.

Предложенное в таблице 29 разбиение можно считать наиболее рациональным, что подтверждается результатами моделирования на рисунке 4.5. При

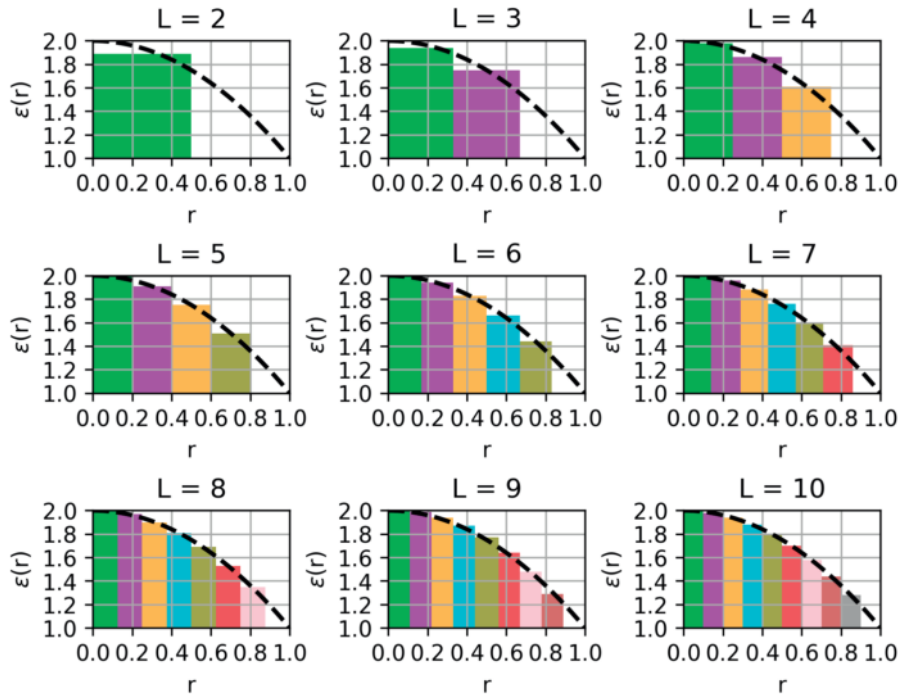


Рисунок 4.4 — Представление оптимизированного равношагового разбиения профиля линзы Лунеберга на 2...10 слоёв

Таблица 29 — Параметры многослойных линз Лунеберга для старта оптимизационных расчетов

Количество слоёв*	Нормированные радиусы слоёв	Диэлектрическая проницаемость ϵ
4	0,5, 0,75, 0,88, 1	1,92, 1,61, 1,23, 1
5	0,4, 0,6, 0,8, 0,9, 1	1,93, 1,75, 1,51, 1,19, 1
6	0,33, 0,5, 0,67, 0,83, 0,92, 1	1,96, 1,83, 1,66, 1,44, 1,15, 1
7	0,37, 0,5, 0,62, 0,75, 0,87, 0,94, 1	1,93, 1,81, 1,69, 1,53, 1,35, 1,12, 1
8	0,33, 0,44, 0,56, 0,67, 0,78, 0,89, 0,95, 1	1,94, 1,82, 1,71, 1,56, 1,39, 1,19, 1,1, 1
9	0,22, 0,33, 0,44, 0,56, 0,67, 0,78, 0,89, 0,95, 1	2, 1,94, 1,87, 1,77, 1,64, 1,48, 1,29, 1,1, 1
10	0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 0,95, 1	1,98, 1,94, 1,88, 1,8, 1,7, 1,58, 1,44, 1,28, 1,1, 1

этом шаг разбиения учитывает и технологию изготовления линзы. В качестве центральной сферы ЛЛ удобно использовать пластики с $\epsilon \approx 2$; предпоследний слой с $\epsilon \approx 1,1$ может быть выполнен из пенопласта или его композиций. На 3D-принтере при этом реализуется основная внутренняя часть — 4...5 слоёв. Даже без применения оптимизаторов линза, собранная из материалов с указанными свойствами, заметно превосходит варианты традиционного равно-

шагового разбиения.

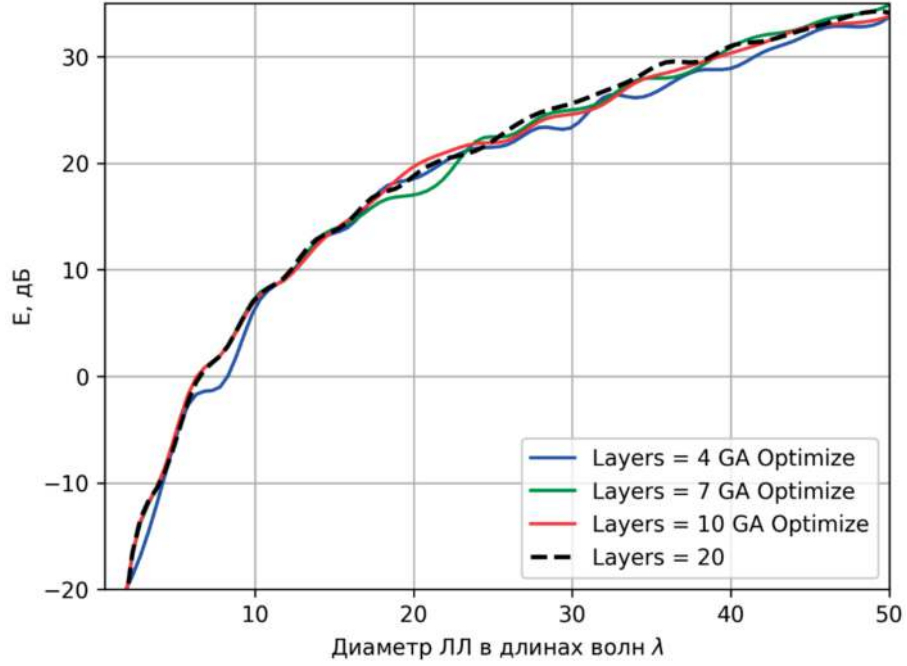


Рисунок 4.5 — Усиление ЭМ поля в направлении $E_\theta = 0$ ЛЛ различного электрического диаметра и количества слоёв

Подтвердим эффективность предложенного (таблица 29) разбиения ЛЛ на слои результатами анализа выражения, описывающего структуру поля в многослойной сфере методом тензорных функций Грина. Методика вывода этого выражения изложена в главе 2; само выражение уже обсуждалось в работах [17; 180]. В общем виде напряжённость электрического поля дифрагированной волны выражается как:

$$\vec{E}(\theta) = E_0 \cdot \frac{\exp(-j \cdot k_0 r)}{k_0 r} \times \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot (-1)^n \times \\ (\vec{a}_\theta \cdot \cos \varphi \cdot \tau_n(\theta) - \vec{a}_\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \pi_n(\theta)) \cdot M_n - \\ - (\vec{a}_\theta \cdot \cos \varphi \cdot \pi_n(\theta) - \vec{a}_\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \tau_n(\theta)) \cdot N_n \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

где: $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число;

угловые функции Лежандра, используемые при разложении поля по ортогональной системе собственных функций,

$$\tau_n(\theta) = \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad \pi_n(\theta) = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta},$$

где $P_n^1(\cos \theta)$ — ассоциированная функция Лежандра первого порядка;

характеристические части функции Грина [180]:

$$M_n = \frac{j \tilde{\tilde{Z}}_n(r) \cdot J_{n\text{mod}}(k_0 r) - J'_{n\text{mod}}(k_0 r)}{j \tilde{\tilde{Z}}_n(r) \cdot h_n(k_0 r) - h'_n(k_0 r)},$$

$$N_n = \frac{j \tilde{\tilde{Y}}_n(r) \cdot J_{n\text{mod}}(k_0 r) - J'_{n\text{mod}}(k_0 r)}{j \tilde{\tilde{Y}}_n(r) \cdot h_n(k_0 r) - h'_n(k_0 r)};$$

$h_n(x)$ — функции Ханкеля [147] и производные $h'_n(x)$;

$\tilde{\tilde{Z}}_n, \tilde{\tilde{Y}}_n(r_l)$ — ориентированные направленные импедансы и адмитансы, которые определяются последовательным пересчетом от внешней границы многослойной сферы к центру через частичные области-слои.

В выражении (4.3) ориентированные сопротивления $\overset{\leftarrow}{Z}_n$ и проводимости $\overset{\leftarrow}{Y}_n$ слоёв структуры пересчитываются от слоя к слою. В качестве примера приведем формулы для расчета сопротивлений при рассмотрении четырехслойной сферической структуры:

$$\begin{aligned} \overset{\leftarrow}{Z}_n(r_1) &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \frac{J_{n\text{-mod}}'(k_1 r_1)}{J_{n\text{-mod}}(k_1 r_1)}, \\ \overset{\leftarrow}{Z}_n(r_2) &= \sqrt{\frac{\epsilon_3}{\epsilon_2}} \frac{C'_n(k_2 r_2; k_2 r_1) + \bar{Z}(r_1) S'_n(k_2 r_2; k_2 r_1)}{C_n(k_2 r_2; k_2 r_1) + \bar{Z}(r_1) S_n(k_2 r_2; k_2 r_1)}, \\ \overset{\leftarrow}{Z}_n(r_3) &= \sqrt{\frac{\epsilon_4}{\epsilon_3}} \frac{C'_n(k_3 r_3; k_3 r_2) + \bar{Z}(r_2) S'_n(k_3 r_3; k_3 r_2)}{C_n(k_3 r_3; k_3 r_2) + \bar{Z}(r_2) S_n(k_3 r_3; k_3 r_2)}, \\ \overset{\leftarrow}{Z}_n(r_4) &= \sqrt{\frac{\epsilon_5}{\epsilon_4}} \frac{C'_n(k_4 r_4; k_4 r_3) + \bar{Z}(r_3) S'_n(k_4 r_4; k_4 r_3)}{C_n(k_4 r_4; k_4 r_3) + \bar{Z}(r_3) S_n(k_4 r_4; k_4 r_3)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $J_{n\text{-mod}}$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, полуцелого порядка, вычисляется из функции Бесселя первого рода $J_{\nu(z)}$ вещественного порядка и комплексного аргумента по формуле: $J_{n\text{-mod}}(kr) = J_{n+0,5}(kr) \cdot \sqrt{\frac{kr \cdot \pi}{2}}$; $J_{n\text{-mod}}'$ — производная модифицированной функции Бесселя первого рода, полуцелого порядка; C_n, S_n — специальные функции и их производные C'_n, S'_n по первому аргументу представляют собой комбинации сферических функций Бесселя–Риккати первого и второго рода (функция Неймана) и их первых производных; определяются в соответствии с выражениями, описанными в [17]: $k_l r_l$ — аргументы определяют электродинамические параметры слоя через k_l и радиус слоя r_l ; $k_l = k_0 \cdot \sqrt{\epsilon_l}$ — коэффициент слоя; ϵ_l — диэлектрическая проницаемость слоя.

Таблица 30 — Расчет ориентированных сопротивлений четырехслойной ЛЛ

Оптимизированное разбиение, предложенное в [26]			
r	ϵ	$\overleftarrow{Z}(r_l)$ (n=60)	$M_n(n = 29)$
0,53	1,86	66,7	25,592
0,75	1,57	71,5	
0,93	1,28	66,9	
1	1	176,6	
Равношаговое разбиение профиля линзы			
r	ϵ	$\overleftarrow{Z}(r_l)$ (n=60)	$M_n(n = 23)$
0,25	1,94	190	4,925
0,5	1,75	99,5	
0,75	1,44	20,5	
1	1	56,25	
Оптимизированное разбиение (генетический алгоритм)			
r	ϵ	$\overleftarrow{Z}(r_l)$ (n=65)	$M_n(n = 27)$
0,49	1,96	28,8	27,697
0,62	1,53	68,9	
0,92	1,36	49	
1	1	54,3	
Равношаговое оптимизированное разбиение			
r	ϵ	$\overleftarrow{Z}(r_l)$ (n=80)	$M_n(n = 27)$
0,5	1,92	159,4	9,283
0,75	1,61	82,58	
0,88	1,23	49,9	
1	1	105,9	

В таблице 30 приведены рассчитанные коэффициенты $\overleftarrow{Z}(r_l)$ и значения M_n по модулю. Эти величины получены пересчётом направленных сопротивлений и проводимостей через телеграфные уравнения; они отражают вклад каждого слоя в характеристическую часть M_n , а не являются сопротивлениями в обычном смысле. Из расчётов видно, что M_n в выражении (4.4) максимальна при плавном изменении коэффициентов связи от слоя к слою — именно это условие определяет задачу оптимизации параметров слоёв.

4.3 Линза Максвелла (рыбий глаз) в составе антенных систем с линзой Люнеберга

Перспективным направлением является составная конструкция, объединяющая линзу Максвелла (ЛМ, «рыбий глаз») и линзу Люнеберга. В работе [130] методами трансформационной оптики разработана миниатюризованная ЛМ с упрощённой конфигурацией питания для терагерцового диапазона 150...220 ГГц. Моделирование в Ansys HFSS подтвердило: уровень отражений менее -10 дБ в рабочей полосе, стабильная многолучевая работа при широкоугольном сканировании. Таким образом, введение ЛМ в схему антенной системы на базе ЛЛ расширяет её применимость в задачах многолучевой передачи данных терагерцового диапазона.

4.4 Синтез профиля $\varepsilon(r)$ для преломления под заданным углом: обратная задача

4.4.1 Постановка обратной задачи

В 1.7 показано, что классические градиентные сферические структуры являются решениями *прямой* задачи: заданное отображение $\chi(b)$ однозначно определяет профиль $n(r)$. Естественным следующим шагом является формулировка и решение *обратной* задачи для произвольного наперёд заданного отображения.

Пусть требуется синтезировать сферическую градиентную структуру радиуса a , расположенную в окружающей среде с показателем преломления $n_0 = 1$, так, чтобы каждый падающий из бесконечности параллельный луч независимо от своего прицельного параметра $b \in [0, a]$ покидал сферу, отклонившись от первоначального направления на один и тот же заданный угол α . Постоянное отклонение на $\alpha = \pi$ отвечает ретрорефлектору — классической линзе Итона; здесь же α служит произвольным параметром конструкции, $0 < \alpha \leq \pi$.

Математически это требование записывается как

$$\chi(b) = \alpha \quad \forall b \in [0, a]. \quad (4.5)$$

Подставив (4.5) в формулу для угла отклонения (1.8) из 1.7.3, получим интегральное уравнение для неизвестной функции $n(r)$:

$$\frac{\alpha}{2} + \arccos \frac{b}{a} = b \int_{r_{\min}(b)}^a \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - b^2}}, \quad (4.6)$$

которое должно выполняться тождественно по $b \in [0, a]$ при $r_{\min}(b)$, определяемой условием $n(r_{\min}) r_{\min} = b$. Геометрическое слагаемое $\arccos(b/a) = \frac{1}{2}(\pi - 2 \arcsin(b/a))$ в левой части учитывает преломление луча на входе и выходе через поверхность сферы (отсчёт отклонения ведётся от прямолинейной хорды); его наличие принципиально для корректной постановки — в частности, именно оно обеспечивает воспроизведение ретрорефлектора Итона как предельного случая $\alpha = \pi$.

Уравнение (4.6) относится к классу уравнений Абеля и допускает аналитическое обращение [5; 8; 103]. Отметим, что тот же математический приём — замена $\rho = r n(r)$ и сведение лучевого интеграла к уравнению Абеля первого рода с явным обращением — положен в основу общего решения задачи синтеза градиентной линзы с центральной симметрией, внешним фокусом и произвольным выходным фронтом, полученного А. С. Венецким, В. А. Калошиным и Т. Т. Чаном [13]; их решение охватывает как частные случаи формулы Моргана (два внешних фокуса с оболочкой), Кэя (фокус на поверхности, произвольный фронт), Итона–Липмана (ретрорефлектор) и линзы с концентрическим зеркалом. Настоящий раздел решает смежную задачу того же класса, отличающуюся целевым функционалом (заданный угол отклонения $\chi(b) = \alpha$ вместо заданного выходного фронта) и, главное, последующим переходом к конечно-слоистой структуре с полноволновым ТФГ-контролем результата.

4.4.2 Сведение к уравнению Абеля и его аналитическое обращение

Введём вспомогательную переменную — безразмерный инвариант Буше вдоль луча

$$\eta = \frac{r n(r)}{a}, \quad (4.7)$$

монотонно возрастающую от $\eta \rightarrow 0$ в центре до $\eta = 1$ на поверхности (поскольку $n(a) = 1$). При условии монотонности $r n(r)$, выполняющемся для всех практически интересных профилей, замена (4.7) приводит уравнение (4.6) к стандартному виду уравнения Абеля первого рода относительно $\ln n$. Его обращение [5; 103] для случая постоянного отклонения $\chi(b) \equiv \alpha$ даёт

$$\ln n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^1 \frac{\alpha ds}{\sqrt{s^2 - \eta^2}} = \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{arccosh} \frac{1}{\eta}, \quad \eta = \frac{r n(r)}{a}. \quad (4.8)$$

Соотношение (4.8) — замкнутое (в неявной форме) решение обратной задачи. Разрешая его относительно профиля, получаем явное двухпараметрическое семейство в параметрической записи (параметр — инвариант $\eta \in (0,1]$):

$$n = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \eta^2}}{\eta} \right)^{\alpha/\pi}, \quad \frac{r}{a} = (1 - \sqrt{1 - \eta^2})^{\alpha/\pi} \eta^{1-\alpha/\pi}. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) задаёт семейство сферических градиентных структур, параметризованных радиусом a и заданным углом отклонения α , — *обобщённую линзу Итона*. Прямой подстановкой в (4.6) проверяется, что (4.9) тождественно удовлетворяет уравнению при всех $b \in (0, a]$.

Параметр η исключается из (4.9) аналитически. Перемножение двух равенств возвращает инвариант (4.7): $n r/a = \eta$. Кроме того, из первого равенства $n^{\pi/\alpha} = (1 + \sqrt{1 - \eta^2})/\eta$ и, соответственно, $n^{-\pi/\alpha} = (1 - \sqrt{1 - \eta^2})/\eta$; сумма этих выражений равна $2/\eta = 2a/(r n)$. Умножая её на n , получаем замкнутую (неявную) форму профиля

$$n^{1+\nu} + n^{1-\nu} = \frac{2a}{r}, \quad \nu = \frac{\pi}{\alpha}, \quad (4.10)$$

левая часть которой при $n \geq 1$ монотонно возрастает по n , поэтому при каждом $r \in (0, a]$ корень единственный. Отметим, что то же обращение Абеля при угловой функции фокусировки $\chi(b) = \arcsin(b/a)$ воспроизводит классический профиль Люнеберга $n = \sqrt{2 - (r/a)^2}$ [5], а при $\chi \equiv \pi$ — линзу Итона: оба классических решения оказываются частными случаями единого аппарата, различающимися лишь видом угловой функции отклонения, тогда как при $\chi \equiv \alpha \in (0; \pi)$ возникает рассматриваемый класс линз-дефлекторов. Рассмотрим предельные случаи.

При $\alpha \rightarrow 0$ показатель степени $\alpha/\pi \rightarrow 0$, и (4.9) даёт $n \equiv 1$, $r/a = \eta$: среда однородна и лучей не отклоняет, что согласуется с физическим содержанием.

При $\alpha = \pi$ имеем $\nu = 1$, и замкнутая форма (4.10) немедленно даёт $n^2 + 1 = 2a/r$ — явный профиль классической линзы Итона

$$n(r) = \sqrt{\frac{2a}{r} - 1}, \quad (4.11)$$

работающей как ретрорефлектор ($\chi = \pi$). Таким образом, классическая линза Итона [127] с профилем (4.11) есть частный случай построенного семейства, а для $0 < \alpha < \pi$ возникают новые *линзы-дефлекторы* с произвольным управляемым углом отклонения. Во всём диапазоне $0 < \alpha \leq \pi$ показатель преломления монотонно возрастает от $n = 1$ на поверхности до формальной особенности $n \rightarrow \infty$ в центре, характерной для всего семейства Итона; при технической реализации центральная область усекается (8). Семейство профилей (4.9) для характерных углов α показано на 4.6.

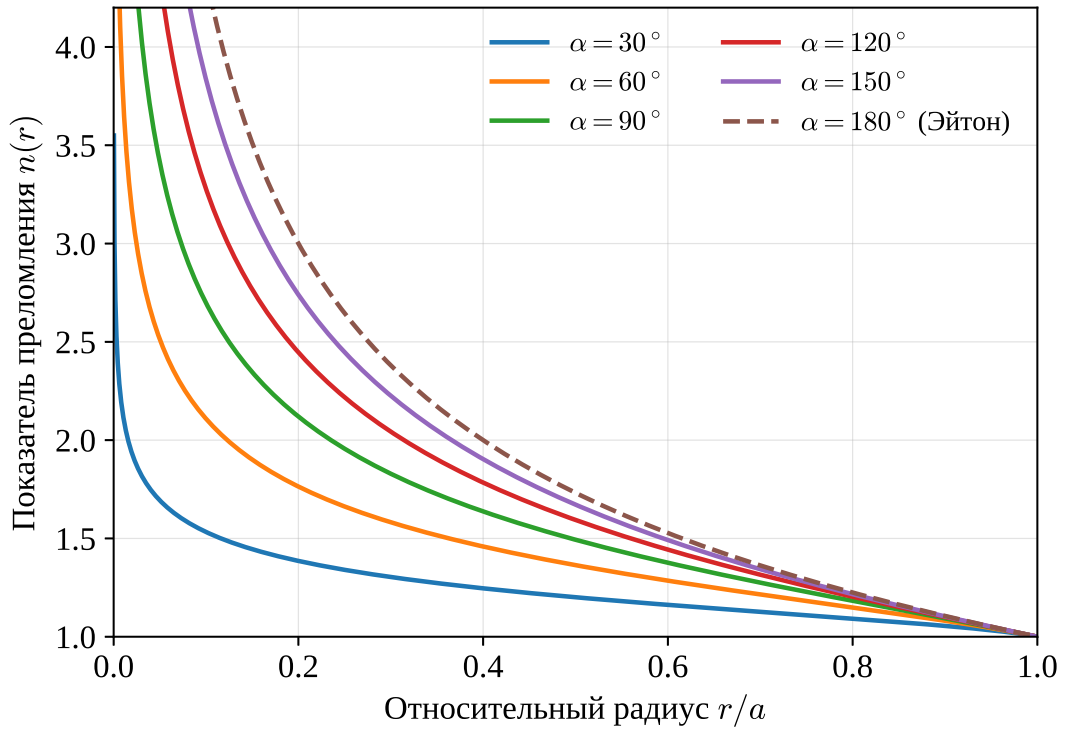


Рисунок 4.6 — Профили показателя преломления $n(r)$ обобщённой линзы-дефлектора (4.9) для углов отклонения $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$; штриховая линия — предельный случай $\alpha = 180^\circ$ (линза Итона, $n = \sqrt{2a/r - 1}$).

На поверхности $n(a) = 1$, к центру n монотонно возрастает

4.4.3 Численные примеры семейства $n(r)$ для различных α

В 31 приведены значения профиля $n(r/a)$, вычисленные по формуле (4.9) для характерных углов отклонения $\alpha \in \{30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ\}$. Естественной нормировкой служит значение на поверхности $n(a) = 1$; относительный радиус $\tilde{r} = r/a$ меняется от 0,1 до 1 с шагом 0,1 (при $\tilde{r} \rightarrow 0$ показатель преломления неограниченно растёт).

Таблица 31 — Профили $n(r/a)$ линзы-дефлектора для различных углов отклонения α , рассчитанные по (4.9) (нормировка $n(a) = 1$)

$\tilde{r} = r/a$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha = 150^\circ$
0,1	1,533	2,109	2,698	3,278	3,834
0,2	1,386	1,764	2,120	2,446	2,740
0,3	1,304	1,582	1,829	2,043	2,226
0,4	1,246	1,459	1,637	1,784	1,903
0,5	1,201	1,364	1,493	1,594	1,672
0,6	1,162	1,285	1,376	1,443	1,492
0,7	1,127	1,215	1,275	1,316	1,343
0,8	1,092	1,149	1,183	1,203	1,216
0,9	1,055	1,081	1,094	1,100	1,103
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Предельный случай $\alpha = 180^\circ$ — линза Итона $n = \sqrt{2a/r - 1}$: монотонно возрастает от $n(a) = 1$ до $n \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$.

Из 31 видны принципиальные особенности семейства.

Все профили относятся к типу Итона: показатель преломления равен единице на поверхности и монотонно возрастает к центру, где формально расходуется. Чем больше требуемый угол отклонения α , тем выше показатель преломления при фиксированном радиусе: например, на уровне $r/a = 0,3$ величина n растёт с 1,30 при $\alpha = 30^\circ$ до 2,23 при $\alpha = 150^\circ$.

Для малых углов α (порядка 30°) внешняя часть линзы ($r/a \gtrsim 0,4$) близка к однородной ($n \lesssim 1,25$), и требуемый градиент умерен; основная сложность сосредоточена в приосевой области.

Для $\alpha \approx 90^\circ$ (поворотная линза) внутренняя область требует высокой диэлектрической проницаемости: $\varepsilon = n^2 \approx 7$ при $r/a = 0,1$ (в среднем по внутреннему слою $\varepsilon \approx 5$, см. 32), что достижимо у керамических наполнителей; центральная особенность при реализации усекается конечным значением ε .

Для $\alpha \gtrsim 150^\circ$ профиль приближается к ретрорефлектору Итона и предъявляет наиболее жёсткие требования к приосевому материалу; технологические аспекты рассмотрены в 8.

4.4.4 Многослойная аппроксимация синтезированного профиля

Практическая реализация синтезированного профиля (4.9) выполняется, как и для классической линзы Люнеберга, в виде многослойной сферической

структуры. Применимы все методы, разработанные в 4: равношаговая дискретизация, оптимизационная на основе генетического алгоритма, равношаговая оптимизированная. Единственное отличие — в виде целевой функции: вместо отклонения лучей от классического профиля Люнеберга минимизируется взвешенная среднеквадратичная ошибка по новому целевому профилю (4.9).

Пример многослойного разбиения для $\alpha = 90^\circ$ при $N = 4$ равнотолщинных слоях приведён в 32. В колонке $\tilde{r}$ указаны безразмерные внешние радиусы слоёв; в колонке ε_l — проницаемость слоя, полученная объёмным осреднением $\varepsilon(r) = n^2(r)$ по слою; в колонке $\bar{n}_l = \sqrt{\varepsilon_l}$ — соответствующее осреднённое значение показателя преломления, рассчитанное как

$$\bar{n}_l = \sqrt{\frac{\int_{r_{l-1}}^{r_l} \varepsilon(r) r^2 dr}{\int_{r_{l-1}}^{r_l} r^2 dr}}. \quad (4.12)$$

Таблица 32 — Четырёхслойная равнотолщинная аппроксимация линзы-дефлектора на $\alpha = 90^\circ$ (объёмное осреднение проницаемости по (4.12))

№ слоя l	$\tilde{r}_l = r_l/a$	ε_l	$\bar{n}_l$
1	0,25	5,00	2,237
2	0,50	2,72	1,650
3	0,75	1,79	1,338
4	1,00	1,22	1,107

Для каждого слоя подбирается материал соответствующей проницаемости (см. 8). При равнотолщинном разбиении основную ошибку вносит приосевая область, где профиль Итона резко возрастает: относительное среднеквадратичное отклонение проницаемости четырёхслойной модели от аналитического решения (4.9) для $\alpha = 90^\circ$ составляет около 12 %. Сгущение слоёв к центру и увеличение их числа (методы 4) уменьшают эту величину; внутренний слой при этом усекается конечным реализуемым значением ε .

4.4.5 Верификация: лучевая трассировка и электродинамический расчёт

Корректность синтезированного профиля (4.9) верифицирована двумя независимыми способами.

Способ 1. Лучевая трассировка. Численное интегрирование системы уравнений Гамильтона (1.5) для семейства параллельных лучей, параметризованных прицельным параметром $b \in [0, a]$, даёт отклонение каждого луча на выходе из сферы. Для непрерывного профиля (4.9) с $\alpha = 90^\circ$ все лучи выходят строго параллельно друг другу, отклонившись от первоначального направления на один и тот же угол; расхождение с заданным значением α не превышает ошибки численного интегрирования (менее $0,01^\circ$). Соответствующая лучевая картина приведена на 4.7. Для многослойной реализации (32) отклонение остаётся постоянным вне приосевой зоны; основная погрешность вносится центральной областью с резким ростом n и снижается при сгущении слоёв к центру.

Способ 2. Электродинамический расчёт методом тензорных функций Грина. С использованием библиотеки **GreenTensor** (10) выполнен расчёт диаграммы рассеяния линзы-дефлектора радиуса $a = 5\lambda$ на частоте $f = 10$ ГГц. Основной максимум диаграммы расположен в направлении $\theta = 90^\circ$ относительно оси падения, его отклонение от заданного направления не превышает $\pm 2^\circ$; ширина главного лепестка по уровню -3 дБ составляет $14,5^\circ$; уровень первых боковых лепестков не превышает -13 дБ. Сравнение с расчётом в Ansys HFSS (МКЭ, около 10 млн тетраэдров при шаге сетки $\lambda/10$) показывает совпадение по амплитуде основного максимума в пределах 0,4 дБ и по положению — в пределах $0,8^\circ$. Идеализированная оценка в приближении физической оптики (равномерно возбуждённая круглая апертура диаметром $2a$, 4.8) даёт ту же ориентацию главного максимума при $\Delta\theta_{-3} \approx 5,9^\circ$ и уровне боковых лепестков $-17,6$ дБ; её отличие от полноволнового результата отражает влияние конечного числа слоёв, дифракции и неравномерности апертурного распределения.

Полученные результаты подтверждают, что синтезированный по формуле (4.9) профиль не только формально удовлетворяет обратной задаче в приближении геометрической оптики, но и в волновом режиме обеспечивает устойчивую характеристику отклонения с предсказуемой диаграммой направленности.

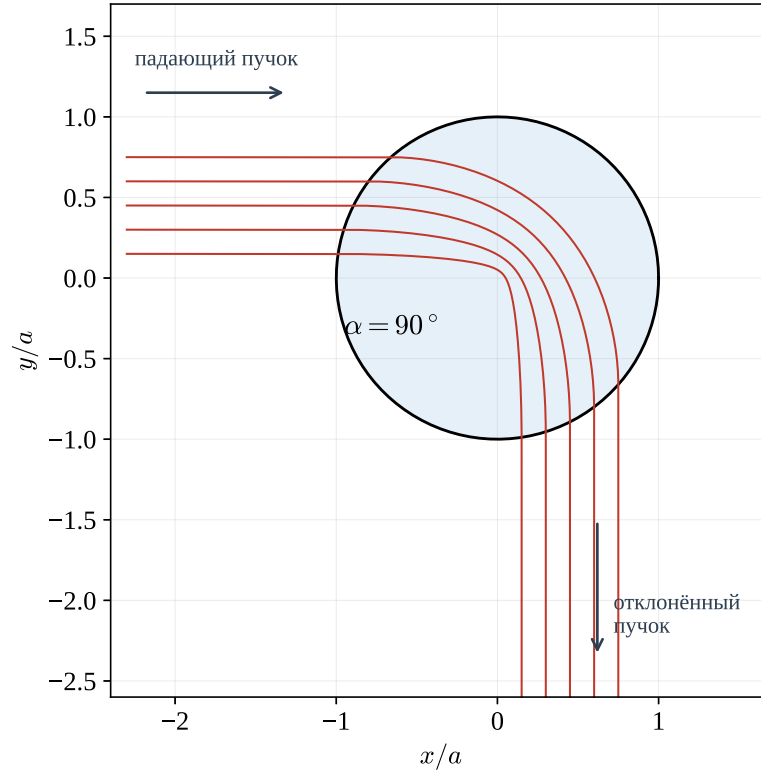


Рисунок 4.7 — Лучевая трассировка линзы-дефлектора с $\alpha = 90^\circ$ (профиль (4.9)). Параллельный пучок (верхняя полуплоскость) на выходе из сферы отклоняется на 90° ; все лучи независимо от прицельного параметра b выходят параллельно друг другу. Нижняя полуплоскость зеркально симметрична

4.4.6 Обобщение на случай переменного угла отклонения

Разработанный аппарат допускает прямое обобщение и на случай, когда требуется зависимость $\chi(b)$, отличная от константы. В такой постановке обращение уравнения Абеля (4.6) (с $\chi(b)$ вместо α) уже не приводит к элементарному выражению типа (4.8), однако решение существует и единственно при условии монотонности функции $\chi(b)$ (или на каждом монотонном её участке). Практически важным примером служит линза, формирующая косекансную диаграмму направленности [135]:

$$\chi(b) = \alpha_0 + \arccos(\cos \alpha_0 \cdot b/a), \quad (4.13)$$

которая востребована в метеолокационных и загоризонтных радарах для равномерного облучения поверхности Земли под переменным углом места. Численное обращение уравнения Абеля (4.6) для закона (4.13) и соответствующая элек-

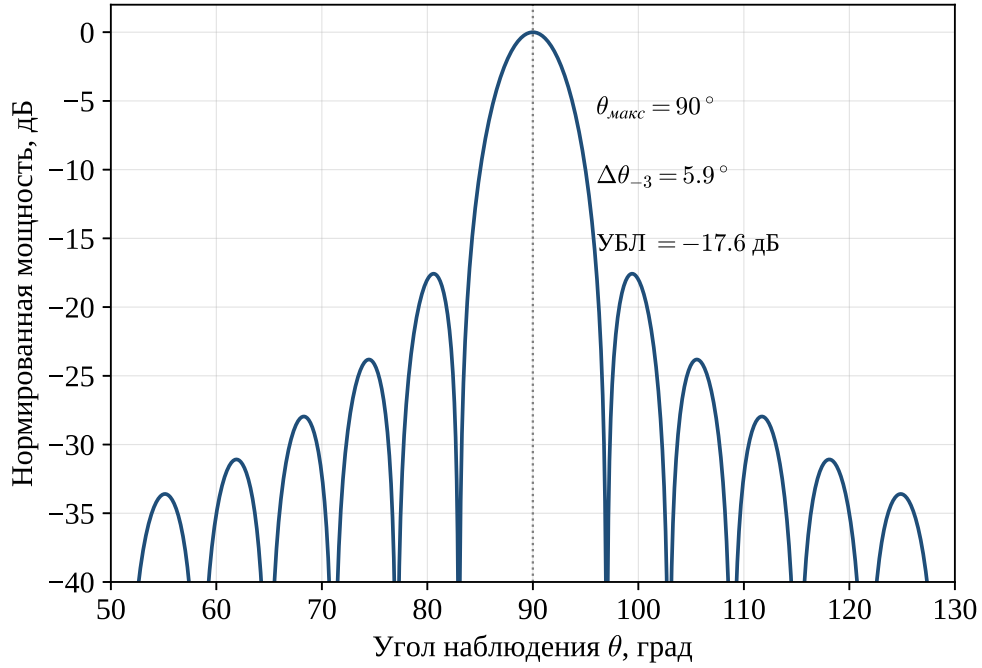


Рисунок 4.8 — Нормированная диаграмма направленности линзы-дефлектора с $\alpha = 90^\circ$ (физическая оптика, $a = 5\lambda$). Главный максимум — в направлении отклонения $\theta = 90^\circ$, $\Delta\theta_{-3} \approx 5,9^\circ$, уровень боковых лепестков $\approx -17,6$ дБ

троединамическая верификация методом ТФГ являются предметом отдельного исследования. В настоящей работе приведённое решение для $\chi = \alpha = \text{const}$ служит опорной точкой и первым практически реализуемым примером нового класса *линз-дефлекторов*.

4.4.7 Выводы раздела

В настоящем разделе впервые в рамках диссертационной работы сформулирована и решена обратная задача синтеза сферической градиентной структуры, отклоняющей каждый падающий луч на заданный угол α . Основные результаты раздела состоят в следующем.

Получена аналитическая формула (4.9) для профиля показателя преломления $n(r)$, реализующего постоянный угол отклонения $\alpha \in (0, \pi)$. Классическая линза Итона (ретрорефлектор) получается как предельный случай $\alpha = \pi$, а однородная среда — как $\alpha \rightarrow 0$.

Показано, что обратная задача для произвольного отображения $\chi(b) \rightarrow n(r)$ сводится к уравнению Абеля первого рода и допускает замкнутое обращение при монотонности функции $r n(r)$.

Для характерных углов $\alpha \in \{30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ\}$ рассчитаны профили (4.6) и построены четырёхслойные аппроксимации, пригодные для изготовления средствами 3D-печати (8).

Верификация лучевой трассировкой (4.7) подтверждает, что синтезированный профиль отклоняет все лучи на заданный угол α с точностью лучше $0,01^\circ$. Полноволновой расчёт методом тензорных функций Грина и контрольное сравнение с Ansys HFSS подтверждают положение главного максимума диаграммы направленности в направлении α (совпадение в пределах $0,4$ дБ по амплитуде и $0,8^\circ$ по положению при $a = 5\lambda$); идеализированная оценка физической оптики (4.8) даёт ширину главного лепестка $\approx 5,9^\circ$.

Разработанный класс линз-дефлекторов открывает новые области применения градиентных сферических структур в задачах радиолокации и радионавигации, которые рассматриваются в 7.11. Полученное решение обратной задачи синтеза радиально-неоднородного профиля для заданного угла преломления, построенный на его основе класс линз-дефлекторов, включая линзу Итона и её модификации, а также их приложения к управлению радиозаметностью и к пассивным элементам многолучевой связи составляют содержание **третьего положения**, выносимого на защиту.

4.5 Сходимость аппроксимации по числу слоёв

Для количественной оценки влияния числа слоёв L на точность воспроизведения профиля $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ был рассчитан интегральный среднеквадратический показатель

$$\text{RMSE}(\varepsilon) = \sqrt{\int_0^1 [\varepsilon_{\text{ступ}}(r/a) - \varepsilon_{\text{непр}}(r/a)]^2 d(r/a)}, \quad (4.14)$$

а также максимальный скачок проницаемости между соседними слоями $\Delta\varepsilon_{\text{max}}$ и диапазон требуемых степеней заполнения α_l , пересчитанных из проницаемостей по логарифмической формуле Лихтенекера для полимера HIPS ($\varepsilon_{\text{HIPS}} = 2,4$). Результаты для оптимизированной равношаговой схемы сведены в таблицу 33, для MOGA-стратификации по постановке (4.1)–(4.2) — в таблицу 34.

Результаты, представленные в таблицах 33 и 34, позволяют сделать три практически значимых вывода.

Во-первых, сходимость $\text{RMSE}(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $L \rightarrow \infty$ имеет порядок

Таблица 33 — Сходимость многослойной аппроксимации профиля $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ к непрерывному закону (оптимизированная равношаговая схема)

L	RMSE(ε)	$\Delta\varepsilon_{\max}$	$\alpha_{\min}, \%$	$\alpha_{\max}, \%$
2	0,1625	0,500	39,8	74,3
3	0,1099	0,444	29,6	77,0
4	0,0828	0,375	23,6	78,0
5	0,0664	0,320	19,5	78,4
6	0,0554	0,278	16,7	78,6
7	0,0475	0,245	14,6	78,8
8	0,0416	0,219	12,9	78,9
10	0,0333	0,180	10,5	79,0
12	0,0278	0,153	8,9	79,0
16	0,0208	0,117	6,8	79,1

Таблица 34 — Сходимость MOGA-стратификации профиля $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ к непрерывному закону: совместная оптимизация радиусов и проницаемостей слоёв по постановке (4.1)

L	RMSE(ε)	$\Delta\varepsilon_{\max}$	$\alpha_{\min}, \%$	$\alpha_{\max}, \%$
2	0,1124	0,481	44,8	73,1
3	0,0792	0,343	33,7	75,2
4	0,0611	0,267	27,0	76,3
5	0,0498	0,219	22,6	76,9
6	0,0420	0,185	19,4	77,3
7	0,0363	0,160	17,0	77,6
8	0,0320	0,141	15,1	77,9
10	0,0258	0,114	12,4	78,2
12	0,0217	0,096	10,5	78,4
16	0,0164	0,073	8,0	78,6

$\mathcal{O}(1/L)$, что согласуется с общей теорией кусочно-постоянных аппроксимаций дифференцируемых функций. Оптимизированные схемы разбиения снижают абсолютную ошибку при том же L : MOGA-стратификация даёт выигрыш 21–31% относительно равношаговой во всём диапазоне L , ослабляя тем самым требования к точности воспроизведения ε_l в каждом слое. Эквивалентно, MOGA достигает заданной погрешности меньшим числом слоёв: уровень погрешности равношаговой восьмислойной схемы (0,0416) MOGA-стратификация обеспечивает уже при $L = 7$ (0,0363).

Во-вторых, при $L = 8$ (рекомендуемая конфигурация для прецизионных применений в мм-диапазоне) ошибка воспроизведения профиля составляет 0,0416 для равношаговой схемы и 0,032 для MOGA-стратификации, что для

линзы единичного радиуса $a = 1$ соответствует относительной погрешности $\sim 2\%$ по проницаемости. Максимальный скачок между соседними слоями при этом также снижается: $\Delta\epsilon_{\max} = 0,141$ у MOGA против $0,219$ у равношаговой, что уменьшает отражения на границах раздела и, как следствие, уровень боковых лепестков результирующей диаграммы направленности (см. гл. 3).

В-третьих, весь диапазон требуемых степеней заполнения MOGA-стратификации при $L = 8$, $\alpha_l \in [15,1; 77,9]\%$, укладывается в технологически доступные пределы стандартных FDM-слайсеров (Cura, PrusaSlicer, Simplify3D) без аппаратных модификаций [29] — причём с большим запасом по нижней границе, чем у схем с фиксированным нижним слоем ($12,9\%$). Для $L \leq 4$ минимальная степень заполнения не опускается ниже $27,0\%$, что полностью реализуемо; для $L \geq 12$ нижняя граница опускается до $\sim 10\%$ и менее, что требует перехода к специализированным слайсерам с поддержкой разрежённых решётчатых структур. Верхняя граница $\sim 78\%$ единообразна для всех рассмотренных L и соответствует центральному слою линзы с проницаемостью, близкой к $\epsilon_{\max} \approx 2,0$.

Таким образом, устанавливается количественная связь трёх характеристик — числа слоёв L , среднеквадратической погрешности $\text{RMSE}(\epsilon)$ и требуемого диапазона степеней заполнения α_l — которая позволяет проектировщику выбирать L исходя из допустимого уровня боковых лепестков и технологических возможностей имеющегося FDM-оборудования. Приведённые в таблицах 33 и 34 значения получены численным расчётом по методике настоящей главы в среде Python (модуль `moga_stratification.py`: NSGA-II с верификацией по необходимым условиям L_2 -оптимальности); исходный код приведён в репозитории *GreenTensor* [46].

4.5.1 Сходимость электродинамического отклика по числу слоёв

Геометрическая погрешность $\text{RMSE}(\epsilon)$ характеризует точность воспроизведения профиля, но не гарантирует сходимости собственно *электродинамического* отклика. Для прямой оценки последнего средствами библиотеки *GreenTensor* [46] рассчитано полное сечение рассеяния σ_s L -слойной линзы Люнеберга при $k_0 a = 8\pi$ ($D = 8\lambda$) и его относительное отклонение от эталонного непрерывного профиля ($L = 256$) для двух вариантов равношаговой дискретизации, различающихся правилом выбора постоянной проницаемости слоя;

результаты сведены в табл. 35.

Таблица 35 — Электродинамическая сходимость двух равношаговых схем заполнения слоёв при $k_0a = 8\pi$: полное сечение рассеяния σ_s и его отклонение от непрерывного профиля (эталон $L = 256$, расчёт средствами *GreenTensor*)

L	L_2 -оптимальная схема		касательная схема	
	$\sigma_s/\pi a^2$	$\Delta\sigma_s, \%$	$\sigma_s/\pi a^2$	$\Delta\sigma_s, \%$
4	2,12	16,6	1,60	11,8
6	1,91	5,0	1,62	10,9
8	1,86	2,5	1,65	9,2
10	1,85	1,7	1,67	8,4
12	1,84	1,0	1,68	7,6
16	1,83	0,5	1,71	6,1
20	1,83	0,3	1,73	5,1

L_2 -оптимальная схема: ε_l равно среднему профиля по слою (минимум L_2 -невязки на слое); именно её реализуют оптимизированные схемы Fuchs и MOGA. Касательная схема: $\varepsilon_l = \varepsilon(r_l)$ на внешней границе слоя (столбцы касаются кривой профиля, ср. табл. 26).

Обе схемы сходятся с ростом L с одинаковым порядком $\mathcal{O}(1/L)$, однако выбор правила заполнения слоя при одном и том же разбиении существенно влияет на точность. Для *касательной* схемы электродинамическая погрешность заметно превышает геометрическую: при $L = 8$ отклонение полного сечения от непрерывного профиля составляет 9,2% против 4,3% по нормированному RMSE, и даже при $L = 20$ не опускается ниже 5%. Причина в том, что систематическое смещение ε_l (столбцы лежат ниже кривой профиля) усиливает интерференцию волн на ступенчатых границах, не отражаемую чисто геометрической метрикой. Для *L_2 -оптимальной* схемы, где ε_l равно среднему профиля по слою, электродинамическая и геометрическая погрешности сближаются (2,5% против 2,1% при $L = 8$), а сходимость σ_s на порядок быстрее: уровня, достигаемого касательной схемой лишь при $L = 20$ (5,1%), L_2 -оптимальная схема достигает уже при $L = 6$ (5,0%) — то есть правильный выбор правила заполнения экономит более чем втрое число слоёв. Именно на минимизацию электродинамической погрешности при малом L и направлены оптимизированные схемы Fuchs и MOGA (табл. 36); практически оптимальным для прецизионных применений остаётся $L = 8$ — компромисс между электро-

динамической точностью, технологической реализуемостью и устойчивостью к производственным допускам.

Это утверждение проверено прямым сопоставлением трёх схем при $L = 8$ по характеристикам рассеяния, а не по геометрической метрике (табл. 36).

Таблица 36 — Электродинамическое сравнение схем стратификации при $L = 8$: отклонение характеристик рассеяния от непрерывного профиля

$k_0 a$	Схема	$\Delta\sigma_s$, %	$\Delta\theta_{-3}$, град	$\Delta\text{УБЛ}$, дБ	$\delta_{\text{дн}}$, %
4π	MOGA	−0,32	0,00	0,00	0,36
	Fuchs	−0,19	0,00	+0,05	0,60
	равношаговая	+1,36	−0,10	−0,07	1,47
6π	MOGA	−0,45	0,00	0,00	0,32
	Fuchs	+0,43	0,00	−0,17	0,45
	равношаговая	+1,62	−0,10	−0,02	1,85
8π	MOGA	−0,32	+0,10	−0,04	0,58
	Fuchs	−0,33	0,00	+0,18	0,86
	равношаговая	+2,49	0,00	−0,15	2,15

Эталон — непрерывный профиль $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$, представленный дискретизацией $L = 400$. $\delta_{\text{дн}}$ — относительное отклонение нормированной диаграммы рассеяния от эталонной в норме L_2 с весом $\sin \theta$ на $\theta \in [0; \pi]$.

Расчёт выполнен многослойным солвером библиотеки *GreenTensor* в изотропном пределе (2.11.5); область между внешней границей схемы и поверхностью линзы задана свободным пространством одинаково для всех схем.

По верности воспроизведения диаграммы рассеяния MOGA-стратификация стабильно точнее схемы Fuchs на всех рассмотренных электрических размерах: $\delta_{\text{дн}} = 0,32 \dots 0,58$ % против $0,45 \dots 0,86$ %, то есть в 1,4–1,7 раза ближе к непрерывному профилю. Тем самым выигрыш 13 % по геометрической метрике RMSE не остаётся формальным, а переносится на электродинамические характеристики.

Вместе с тем сопоставление очерчивает и границы этого выигрыша. По полному сечению рассеяния при $L = 8$ обе оптимизированные схемы практически сравнялись ($|\Delta\sigma_s| \leq 0,5$ %, причём знак отклонения меняется с электрическим размером), а по ширине главного лепестка и уровню бокового лепестка они неотличимы от непрерывного профиля ($\leq 0,1^\circ$ и $\leq 0,2$ дБ) — по этим интегральным характеристикам восьмислойная оптимизированная аппроксимация уже вышла на насыщение. Устойчивое преимущество MOGA проявляется именно в тонкой структуре диаграммы. Обе оптимизированные схемы при этом кратно превосходят равношаговую — в 2,5–5,7 раза по $\delta_{\text{дн}}$

и в 3,6–7,8 раза по отклонению σ_s , — что подтверждает целесообразность оптимизации разбиения как таковой.

Показательно сопоставление с геометрикооптическим слоистым синтезом: в работе [14] слоистая модель с рекуррентной процедурой обеспечивает малую лучевую погрешность синтеза анизотропной цилиндрической ЛЛ лишь при числе слоёв $N = 50 \dots 150$ (итерационная процедура на градиентной модели при этом вовсе неустойчива при малых радиусах), а контроль результата выполняется внешним конечно-элементным расчётом. В настоящей работе за счёт того, что критерием служит непосредственно электродинамический отклик (полноволновой ТФГ-расчёт в цикле MOGA-оптимизации), сопоставимая точность диаграммообразующих характеристик достигается при $L = 8 \dots 16$ слоёв — на порядок меньшем числе, реализуемом стандартной FDM-печатью без специализированных технологий тонкослойного изготовления.

4.6 Выводы по главе

В настоящей главе систематизированы и количественно оценены способы аппроксимации непрерывно-градиентного профиля $\varepsilon(r) = 2 - r^2$ конечным числом концентрических слоёв с кусочно-постоянной проницаемостью. Предложена классификация равношаговой, равномерностной и MOGA-оптимизированной схем разбиения; для трёхслойной реализации (см. табл. 28) получены нормированные радиусы и проницаемости ($a_l^{\text{норм}} = 0,53; 0,75; 0,93$, $\varepsilon_{\text{цель},l} = 1,86; 1,57; 1,28$), используемые в главе 8 как исходные данные для HIPS-линзы; рассмотрена составная конструкция «линза Максвелла + линза Люнеберга» для диапазонов мм и ТГц [130]. Полученные схемы аппроксимации и численные значения параметров слоёв являются непосредственными исходными данными для проектирования одиночной линзовой антенны (глава 5) и её практической реализации (глава 8).

Ключевой вывод главы. MOGA-стратификация многослойной аппроксимации профиля $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ при $L = 8$ слоях обеспечивает $\text{RMSE}(\varepsilon) = 0,032$ — на 13% ниже оптимизированной аппроксимации Фукса (0,0368) и на 23% ниже равношаговой (0,0416) — при коэффициентах заполнения слоёв $\alpha_l \in [15\%; 78\%]$, реализуемых стандартными слайсерами FDM-3D-печати без аппаратных модификаций; полученная связка «схема аппроксимации $\rightarrow$ параметры слоёв $\rightarrow$ технологические параметры печати» образует методическое ядро **пято-**

го положения, выносимого на защиту. Вторым результатом главы является решение обратной задачи синтеза (4.4): обращение интегрального уравнения Абеля при постоянном угле отклонения $\chi(b) \equiv \alpha$ даёт замкнутое соотношение $n^{1+\nu} + n^{1-\nu} = 2a/r$, $\nu = \pi/\alpha$ ((4.10)), задающее класс *линз-дефлекторов* с управляемым углом отклонения и содержащее классическую линзу Итона как предельный случай $\alpha \rightarrow \pi$; этот класс составляет содержание **третьего положения**, выносимого на защиту.

Инженерные рекомендации по выбору числа слоёв. Сводный практический критерий (по нормированной погрешности $\widetilde{\text{RMSE}} = \text{RMSE}/2$): для приложений сантиметрового диапазона ($\widetilde{\text{RMSE}} \leq 5\%$) достаточно $N \geq 3$ слоёв при MOGA-стратификации или оптимизированной (Fuchs) схеме и $N \geq 4$ при равношаговой; для миллиметрового и квазиоптического диапазонов ($\widetilde{\text{RMSE}} \leq 2,5\%$) — $N \geq 5$ (MOGA), $N \geq 6$ (Fuchs) или $N \geq 8$ (равношаговая); для предельной точности ($\widetilde{\text{RMSE}} \leq 2,0\%$) — $N \geq 7$ (MOGA) или $N \geq 9$ (равношаговая). Дальнейшее увеличение N нецелесообразно ввиду несоразмерного роста технологической сложности; рекомендуемый рабочий компромисс — $L = 8$ слоёв с MOGA-стратификацией ($\text{RMSE} = 0,032$, коэффициенты заполнения $\alpha_l \in [15\%; 78\%]$, реализуемые стандартными FDM-слайсерами без аппаратных модификаций).

Глава 5. Линзы Люнеберга в составе антенных систем

5.1 Введение

Публикации автора по материалам главы 5: [34—36; 55; 61; 70; 73; 79; 89; 90; 178; 181].

Линзовые антенны на основе ЛЛ широко применяются в радиолокации, космической связи и радиотехнических системах специального назначения, где востребованы режимы многолучевого обзора или управление эффективной поверхностью рассеяния пассивными средствами. Теоретические основы, используемые в настоящей главе, изложены в [98] и в монографиях школы Панченко [21; 182]. В антенных системах на базе ЛЛ наряду с основным облучателем в фокусе нередко применяются дополнительные источники, смещённые по поверхности сферы: они формируют вспомогательные диаграммы для подавления организованных помех или разведки отражений от подстилающей поверхности. В настоящей главе получены расчётные выражения и исследованы дифракционные характеристики линзы при облучении волнами линейной и круговой поляризации; помимо диаграмм рассеяния определён коэффициент эффективности по основной и кросс-поляризации.

Характеристики первичного облучателя позволяют абстрагироваться от особенностей конкретного излучателя и оценить вклад тела линзы в формирование диаграммы направленности; поэтому типовые облучатели для линейной и круговой поляризации рассматриваются отдельно.

5.2 Первичные источники для возбуждения линз при линейной поляризации

В режиме линейной поляризации в качестве первичного облучателя применяются элементарные источники — электрический и магнитный диполи, а также их комбинация в виде элемента Гюйгенса. На их основе рассчитываются поля в дальней зоне, КНД, КИП и факторы, определяющие КУ. Полученные результаты служат реперными: они позволяют сопоставлять конструктивные варианты ЛЛ, не смешивая вклад тела линзы с вкладом конкретного рупорного облучателя.

Облучение линзы пирамидальными и коническими рупорами с норми-

рованными к фокусу размерами раскрыва детально рассмотрено в работах автора [61; 72]: показано, что при корректном согласовании фазового центра рупора с фокусом линзы интегральные характеристики антенны (КНД, уровень первого бокового лепестка, ширина главного лепестка) совпадают с результатами, полученными при возбуждении элементарными источниками [86; 98]. Погрешность в КНД не превышает 1–2 % и в уровне первого бокового лепестка — 3–4 дБ. Различия объясняются конечным уровнем кросс-поляризации реального рупора и неполным охватом краевой зоны линзы. В частном случае полоскового облучателя на подложке с воздушным зазором соответствующие антенные характеристики получены школой Панченко в [183].

5.3 Первичные источники для возбуждения линз при круговой поляризации

Вопросы выбора первичного облучателя для линзы Люнеберга в режиме работы на круговой поляризации, включая оценку поляризационных потерь и сопоставление различных конфигураций излучателей, подробно рассмотрены автором в монографии [61]. В настоящем разделе приводятся основные количественные результаты для двух типовых источников — апертурного облучателя в виде открытого конца волновода с вращающейся плоскостью поляризации и крестообразного вибратора с рефлектором — расположенных на поверхности линзы в фокальной точке $r = a$.

Для многослойной шестислойной ЛЛ с оптимизированной стратификацией (табл. 56 главы 7) расчёт антенных характеристик выполняется в аппарате тензорных функций Грина [17]; учитываются импедансы и адмитансы каждого слоя, рассчитываемые по средней точке слоя. Поле представляется суммой основной и кросс-поляризационной составляющих:

$$\mathbf{E}(\theta, \varphi) = E_{\text{осн}}(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_{\text{осн}} + E_{\text{кр}}(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_{\text{кр}}, \quad (5.1)$$

где появление кросс-поляризационной компоненты обусловлено наличием границ раздела между слоями и кривизной сферических поверхностей.

Результаты расчёта основных параметров диаграммы направленности для трёх характерных электрических размеров линзы приведены в табл. 37.

Энергетические характеристики линзы в режиме круговой поляризации

Таблица 37 — Характеристики диаграммы направленности ЛЛ в режиме круговой поляризации

k_0a	$\Delta\theta_{-3}^\circ$	$\Delta\theta_{-10}^\circ$	ЛБЛ, дБ	Кроссполяриз., дБ
малый ($\approx 2\pi$)	19,4	32,2	−10,5	−28,5
средний ($\approx 4\pi$)	6,8	11,2	−8,6	−34,0
большой ($\approx 8\pi$)	3,6	5,8	−8,5	−25,9

определяются четырьмя источниками потерь. Основные из них — переоблучение края линзы (spillover, $\eta_{sp} \approx 0,875$), потери на образование кроссполяризации ($\eta_{xp} \in [0,75; 0,87]$), омические потери в материале при $\operatorname{tg} \delta \sim 10^{-3}$ ($\eta_{om} \in [0,66; 1,0]$) и отражение от внешней поверхности в сторону облучателя ($\eta_{\Sigma} \approx 0,999$). Коэффициент усиления связан с коэффициентом направленного действия соотношением

$$G = D \cdot \eta_{sp} \eta_{xp} \eta_{om} \eta_{\Sigma}, \quad (5.2)$$

что для среднеэлектрического размера ($k_0a = 4\pi$) даёт $G \approx 19,9$ дБ при $D \approx 21,1$ дБ. Введённый коэффициент сохранения поляризации η_{xp} — новый параметр, важный именно для режима круговой поляризации и ранее в расчётах КНД сферической ЛЛ систематически не учитывавшийся.

Верификация полуаналитических расчётов проведена сравнением с МКЭ в Ansys HFSS для трёхслойной ЛЛ, облучаемой круглым рупором ($f = 25$ ГГц, круговая поляризация). Совпадение по ширине главного лепестка составляет $0,5\text{--}2^\circ$, по уровню первого бокового лепестка — 3–5 дБ; расхождение обусловлено различием задания первичного облучателя (в ТФГ — токи открытого конца волновода, в HFSS — реальная апертура рупора). При $k_0a > 4\pi$ МКЭ упирается в предел рабочей станции с 64 ГБ ОЗУ, тогда как ТФГ-расчёт выполняется за доли секунды при любых размерах — что и определяет практическую ценность полуаналитического подхода в мм-диапазоне (k_0a до 10π и более).

5.4 Антенные характеристики линзы Люнеберга

Обобщение антенных характеристик ЛЛ для обоих видов поляризации приведено в [178]. При линейной поляризации ширина главного лепестка, уровень первого бокового лепестка и КНД зависят лишь от электрического радиуса k_0a и числа слоёв N ; при круговой дополнительно учитывается кросс-поляризационная составляющая (5.1). Количественные значения для трёх характерных электрических размеров приведены в табл. 37.

5.5 Влияние положения и размера облучателя на антенные характеристики линзы

Положение первичного облучателя относительно фокуса линзы определяет согласование амплитудно-фазового распределения в апертуре и, как следствие, ширину главного лепестка, уровень первого бокового лепестка и эффективный КНД. При смещении облучателя вдоль оси линзы на $\pm\Delta r$ относительно фокального радиуса $r = a$ диаграмма направленности расширяется и возникает наклон фазового фронта, эквивалентный дефокусировке зеркальной антенны. Поперечное смещение первичного источника на угол $\Delta\varphi$ относительно оптической оси линзы приводит к отклонению главного лепестка на тот же угол (с точностью до малых поправок, связанных с дискретностью аппроксимации профиля), что применяется в многолучевых конфигурациях. Влияние размера апертуры облучателя (например, раскрыва пирамидального рупора $A \times B$) проявляется через её диаграмму освещения: уменьшение раскрыва увеличивает переоблучение края линзы (spillover), чрезмерно большой раскрыв — снижает амплитуду на краю и КИП. Оптимальные размеры выбирают по максимуму КУ при фиксированной внешней длине.

5.5.1 Учёт конечного размера раскрыва облучателя в аппарате ТФГ

Развитый аппарат тензорных функций Грина допускает строгий учёт конечного (неточечного) размера первичного облучателя без перехода к полноволновому численному моделированию [72]. Идея состоит в замене точечного источника распределением эквивалентных токов по угловой области раскрыва: размер раскрыва пересчитывается в угловые пределы интегрирования, под которыми апертура видна из центра линзы. Для раскрыва $A \times B$, расположенного на фокальном расстоянии r_f от центра, угловые полуразмеры составляют

$$\theta_a = \arctan \frac{A}{2r_f}, \quad \varphi_a = \arctan \frac{B}{2r_f}, \quad (5.3)$$

так что источник занимает область $\theta_1 \in [\theta_0 - \theta_a; \theta_0 + \theta_a]$, $\varphi_1 \in [-\varphi_a; \varphi_a]$, где θ_0 — угловое положение центра облучателя.

В разложении поля по сферическим гармоникам конечный раскрыв приводит к замене точечных значений угловых функций $\tau_{nm}(\theta_0)$ и $\pi_{nm}(\theta_0)$ их

интегральными проекциями по раскрыву. С учётом косинусного амплитудного распределения поля в апертуре (основная волна H_{10} волноводного или рупорного облучателя) весовые коэффициенты возбуждения гармоник принимают вид

$$T_{nm} = \int_{\theta_0 - \theta_a}^{\theta_0 + \theta_a} \tau_{nm}(\theta_1 - \theta_0) d\theta_1, \quad P_{nm} = \int_{\theta_0 - \theta_a}^{\theta_0 + \theta_a} \pi_{nm}(\theta_1 - \theta_0) d\theta_1, \quad (5.4)$$

$$\Phi_m = \int_{-\varphi_a}^{\varphi_a} \cos\left(\frac{\pi\varphi_1}{2\varphi_a}\right) \cos(m\varphi_1) d\varphi_1, \quad (5.5)$$

где τ_{nm} , π_{nm} — стандартные угловые функции теории Ми, а множитель $\cos(\pi\varphi_1/(2\varphi_a))$ описывает спад амплитуды к краям раскрыва. Компоненты дальнего поля сохраняют структуру двойного ряда по гармоникам

$$E_{\theta,\varphi}(\theta, \varphi) \propto \sum_{n=1}^{N_{\max}} \sum_m j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Phi_m f_m(\varphi) \times \\ \times [T_{nm} M_n(\varepsilon_l, \mu_l) + m^2 P_{nm} N_n(\varepsilon_l, \mu_l)], \quad (5.6)$$

где M_n , N_n — коэффициенты прохождения электрических и магнитных волн через многослойную структуру, вычисляемые рекуррентным пересчётом импедансов по слоям (глава 3), $f_m(\varphi) = \cos(m\varphi)$ либо $\sin(m\varphi)$ в зависимости от поляризационной компоненты. При $\theta_a, \varphi_a \rightarrow 0$ нормированные интегралы (5.4)–(5.5) переходят в точечные значения $\tau_{nm}(0)$, $\pi_{nm}(0)$, и выражение (5.6) совпадает с решением для элементарного облучателя.

Практическая значимость такого учёта двоякая. Во-первых, интегрирование по раскрыву автоматически формирует реальную диаграмму освещения линзы: расширение раскрыва снижает переоблучение края (spillover) и уровень боковых лепестков, что при точечной модели источника приходится вводить феноменологически. Во-вторых, именно конечный размер раскрыва определяет предельно достижимую крутизну пеленгационной характеристики в суммарно-разностном режиме: выбор параметров первичного облучателя трёхслойной ЛЛ по этому критерию выполнен автором в [72] на основе описанной интегральной модели (расчётная реализация — Mathcad-модуль трёхслойной линзы с реальным облучателем). Кроме того, интегральная модель раскрыва устраняет главный источник расхождения между полуаналитическим ТФГ-расчётом и полноволновым моделированием в *Ansys HFSS*, отмеченного выше при верификации, — различие моделей первичного источника (токи открытого конца волновода против реальной апертуры рупора).

5.6 ЛЛ в составе многолучевых базовых станций

Одной из конструктивных модификаций сферической ЛЛ, повышающей механическую жёсткость и дающей дополнительный рычаг управления распределением поля внутри линзы, является установка металлического стержня вдоль оси симметрии. Влияние такого стержня на уровень бокового излучения, поляризационные свойства и форму основного лепестка рассмотрено автором в [70; 181]: при корректно подобранном диаметре стержня удаётся существенно снизить обратное излучение без заметной потери коэффициента усиления в направлении максимума ДН.

Вторым примером применения ЛЛ в составе многолучевой системы является базовая станция 5G миллиметрового диапазона. Технология *MIMO* в мм-диапазоне [36] требует одновременного формирования множества направленных лучей при ограниченных энергозатратах; сферическая симметрия ЛЛ делает её пассивным аналоговым формирователем лучей, органично отвечающим этим требованиям. Ниже представлена конструкция многослойной антенны на базе ЛЛ с двенадцатью первичными излучателями и проанализировано её поведение при установке на светофоре в условиях городской инфраструктуры.

Развитие сетей 5G/6G связано с освоением высокочастотных диапазонов: 24,25–27,5 ГГц, 37–40,5 ГГц, 66–76 ГГц и др., что стало возможным благодаря прогрессу в интегральных схемах мм-диапазона.

По формуле Фрииса потери в радиолинии при переходе от 2 до 60 ГГц возрастают примерно на 29 дБ; сигналы мм-диапазона сильнее поглощаются средой и хуже огибают препятствия. Узконаправленные антенны компенсируют эти потери, повышают SNR и снижают перекрёстные помехи, что обуславливает целесообразность многолучевых антенн с индивидуальным лучом на каждого абонента.

Фазированная решётка (традиционный подход к многолучевой антенне) при числе элементов ≥ 64 становится энергоёмкой и дорогостоящей [55]. Поэтому растёт интерес к пассивным многолучевым антеннам, где формирование лучей достигается за счёт пассивных электромагнитных компонентов.

Среди пассивных подходов с высоким коэффициентом усиления выделяются два направления, различающиеся по стоимости, габаритам и гибкости настройки: антенные системы на основе линзы Люнеберга и системы с пассивны-

ми формирователями диаграммы (matrix-type beamformers). Для аналогового *MIMO* в миллиметровом диапазоне наиболее привлекательны именно антенны с ЛЛ — благодаря простоте изготовления, высокой эффективности и умеренной стоимости.

В отличие от плоских или полусферических линз с одной оптической осью, ЛЛ обладает сферической симметрией и потому способна одновременно работать в нескольких направлениях. При умеренных физических размерах в миллиметровом диапазоне (диаметр конструкции 15–20 см) такую антенну удобно размещать на опорах освещения, светофорах и на борту транспортных средств. Практическая актуальность этого направления подтверждается растущим потоком публикаций, посвящённых применению ЛЛ в сетях 5G [30–35]. Вопросы оценки параметров канала в *MIMO OFDM*-системах миллиметрового диапазона с многолучевой линзовой антенной рассмотрены в [73; 89]; электромагнитная совместимость такой антенны в условиях сложной городской среды исследована в [90].

5.6.1 Характеристики тела линзы для многолучевой БС

Параметры многолучевой антенны рассчитаны для диапазона 24,25–24,65 ГГц, выделенного для сетей 5G на территории Российской Федерации. Несущая частота в расчётах принята $f = 24,45$ ГГц, что соответствует длине волны $\lambda \approx 12,27$ мм.

Для задачи используется шестислойная оптимизированная аппроксимация профиля ЛЛ (см. главу 4) с нормированными внешними радиусами слоёв $a_l^{\text{норм}} = \{0,43; 0,60; 0,74; 0,85; 0,95; 1,00\}$ и соответствующими диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_l = \{1,91; 1,73; 1,55; 1,36; 1,18; 1,00\}$.

В качестве первичного излучателя применён прямоугольный волновод, модель которого построена в пакете Ansys Electronics Desktop (HFSS Design). Геометрические параметры волновода на частоте 24,45 ГГц: ширина $a_{\text{в}} = 10,67$ мм, высота $b_{\text{в}} = 4,32$ мм, толщина стенки *Wall Thickness* = 1 мм, длина *Waveguide Length* = 20 мм (рисунок 5.1).

Распределение электромагнитного поля в структуре линзы и результирующая диаграмма направленности при одиночном облучателе (рисунок 5.1) показаны на рисунке 5.2. Модель рассчитана в пакете Ansys HFSS.

Главное преимущество сферической линзы — возможность реализации на

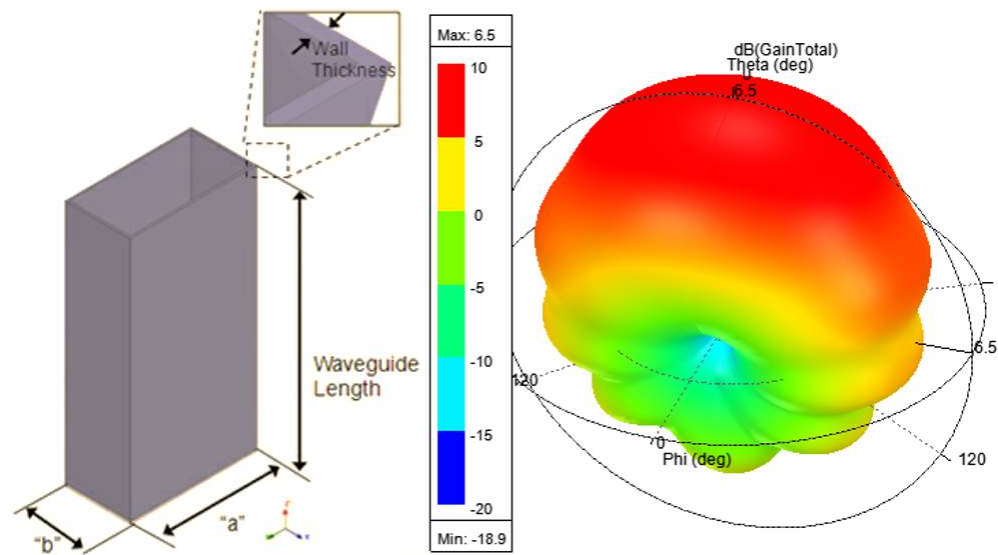
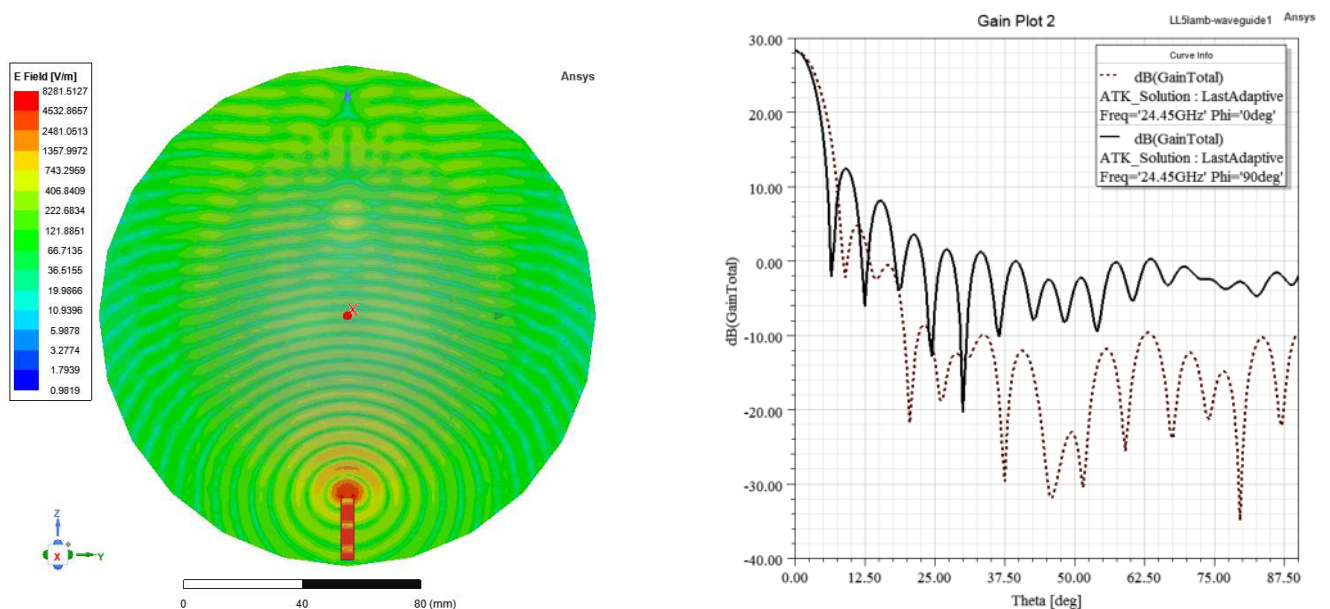


Рисунок 5.1 — Прямоугольный волновод — первичный облучатель линзы



а) Распределение ЭМ поля в структуре

б) Диаграмма направленности

Рисунок 5.2 — ЛЛ с первичным облучателем — прямоугольным волноводом

её базе многоканальной системы. На рисунке 5.3 приведена модель с двенадцатью излучателями, размещёнными вдоль окружности с угловым шагом 6° . Такая конфигурация позволяет как фокусировать излучение в заданном направлении, так и формировать сразу несколько независимых радиоканалов; для примера на рисунке 5.3 показан режим с одновременно задействованными облучателями 1 и 8.

Помимо формирования множественных узких лучей, подобная система позволяет синтезировать диаграммы направленности специального вида —

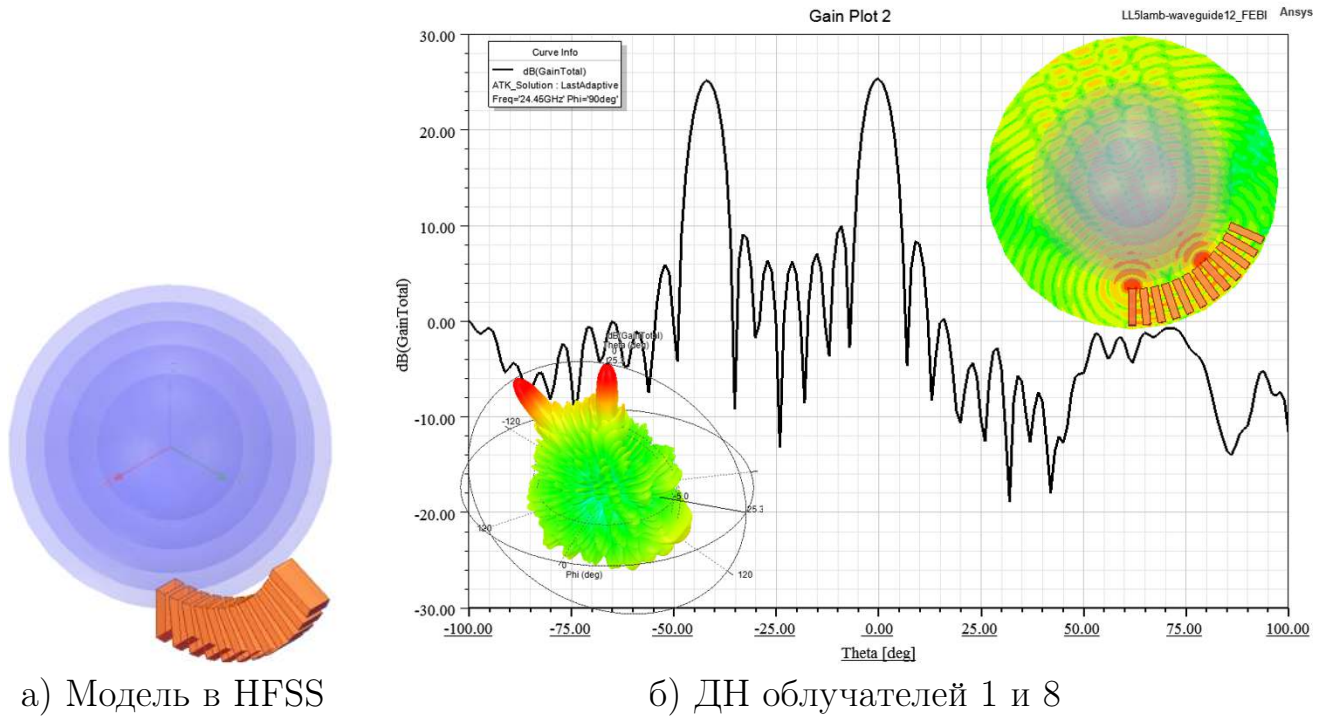


Рисунок 5.3 — ЛЛ с двенадцатью первичными облучателями

Таблица 38 — Режимы работы первичных облучателей ММО ЛЛ

Источник	1	2	3	4	5	6	7	8	9 – 12
Мощность, Вт	1,0	0,8	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0

например, $\text{cosec}(\theta)$ или $\text{cosec}^2(\theta)$ — за счёт подбора положения и весовых коэффициентов возбуждения отдельных облучателей. Такой режим работы востребован как в сетях 5G (для равномерной заливки сектора обслуживания), так и в системах дистанционного зондирования Земли. Близкий по замыслу результат в планарной геометрии получен в [13]: семиоблучательная антенна на основе синтезированной кольцевой градиентной линзы формирует трапециевидальные (П-образные) лучи и обеспечивает сектор обзора более 100° в 20 %-ной полосе частот — однако там специальная форма луча закладывается в закон $n(r)$ на этапе геометрикооптического синтеза, тогда как в настоящей работе она достигается весовым возбуждением облучателей при неизменном классическом профиле линзы, что допускает перестройку формы ДН без замены линзы. Пример синтеза косекансной ДН при соответствующем распределении мощности по облучателям (таблица 38) приведён на рисунке 5.4.

Возможны и другие режимы работы подобной системы. Например, излучатели 1–6 могут использоваться для передачи сигнала к абонентам, а 7–12 — для приёма ответных сигналов от базовых станций и пространственной фильтрации помех. Дополнительные лучи удобно задействовать для подавления как

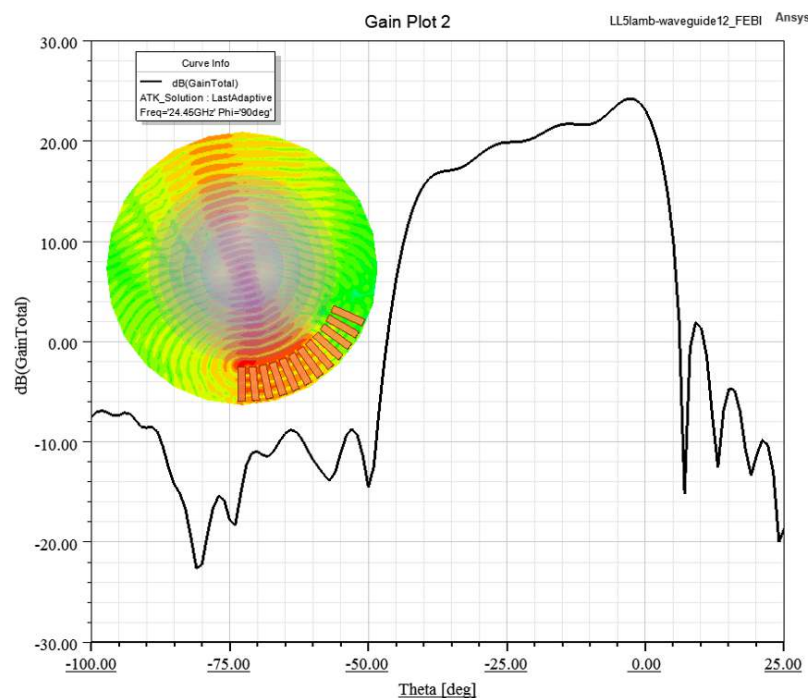


Рисунок 5.4 — Пример ДН специального типа, формируемая ЛЛ с системой облучателей (режим работы задан в таблице 38)

местных, так и организованных помех. Широкополосность тела линзы Люнеберга делает такую антенну пригодной и для многолучевой связи в широкой полосе частот.

Благодаря компактности предлагаемую конструкцию удобно размещать на светофорах, фонарных столбах и других элементах городской инфраструктуры; она представляет интерес для серийных базовых станций ячеек малого радиуса (small cells). Широкий угол обзора, в свою очередь, делает антенну перспективной и для бортового применения на беспилотных транспортных средствах.

В качестве примера на рисунке 5.5 показана установка ЛЛ под корпусом светофора. Задача решена инструментом *SBR+* пакета Ansys HFSS на несущей частоте 24,45 ГГц: ЛЛ представлена как 3D-компонент с предварительно рассчитанной конечно-элементной сеткой, дорожное покрытие, кузова транспортных средств, мачта светофора и прочие объекты — как гибридные регионы *SBR+*. Рисунок демонстрирует равномерное покрытие поверхности транспортных средств на перекрёстке, полученное методом трассировки лучей.

Построенная модель позволяет получить пространственное распределение напряжённости электрического поля в ближней зоне при взаимодействии ММО-ЛЛ с металлическими элементами кузова (рисунок 5.6). Карты ближне-

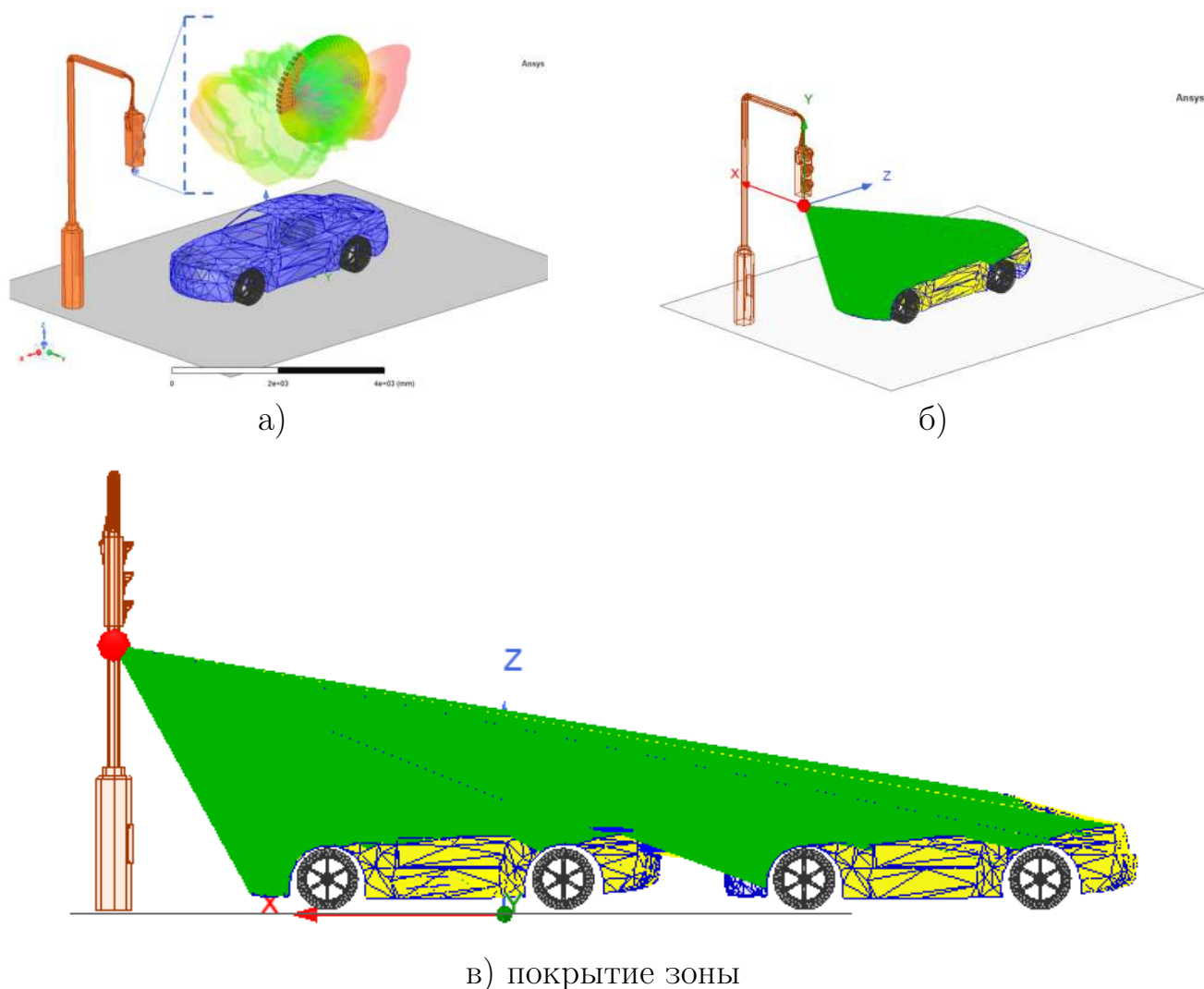
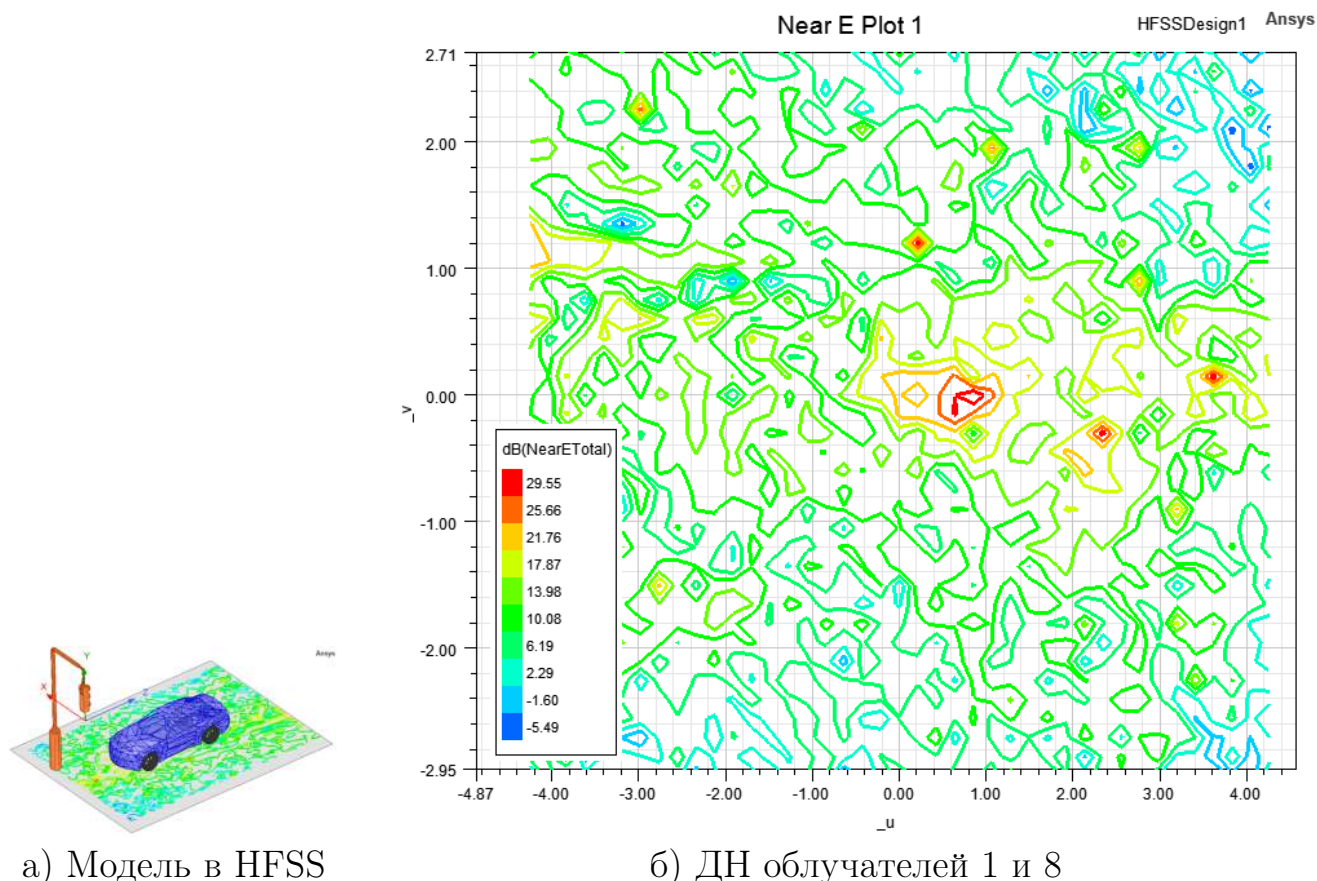


Рисунок 5.5 — ММО-ЛЛ, установленная на светофор: модель в HFSS с оценкой качества покрытия

го поля выявляют области локального усиления и затенения, необходимые для оценки ЭМС и определения оптимального размещения автомобильных антенн и радаров.

5.7 Выводы по главе

В главе получены параметры, позволяющие перейти от дифракционной модели главы 3 к реальной антенной системе с первичным облучателем; систематизированы требования к первичным облучателям при линейной и круговой поляризации, исследована модификация ЛЛ с центральным металлическим стержнем, спроектирована и численно исследована многолучевая базовая станция 5G, показана применимость конфигурации в задачах ЭМС. Одна линза Люнеберга в сочетании с решёткой первичных облучателей эквивалентна



а) Модель в HFSS

б) ДН облучателей 1 и 8

Рисунок 5.6 — ЛЛ с двенадцатью первичными облучателями

нескольким независимым направленным антеннам, что делает естественным следующий шаг — строгий анализ решётки как антенной системы (глава 6).

Ключевой вывод главы. Многолучевая линзовая антенна на базе шестислойной ЛЛ с двенадцатью прямоугольными волноводными облучателями ($10,67 \times 4,32$ мм, угловой шаг 6°) для диапазона $24,25 \dots 24,65$ ГГц, конструктивная модификация ЛЛ с центральным металлическим стержнем (снижение обратного излучения на $8 \dots 12$ дБ для $k_0 a = 6\pi$ без потери КУ) и систематизированные требования к первичным облучателям (открытый конец волновода, рупорные, полосковые, спиральные, турникетные, элементы Гюйгенса) при линейной и круговой поляризации образуют расчётно-методическую базу проектирования пассивных многолучевых антенных систем 5G/6G на базе линзы Люнеберга — то есть прямое инженерное приложение **первой части четвёртого положения**, выносимого на защиту.

Глава 6. Антенные решётки в составе линз

6.1 Введение

Публикации автора по материалам главы 6: [34; 35; 55; 71; 72].

6.2 Ограничения, налагаемые на решётку первичных облучателей

В разделе исследуется возбуждение линзы Люнеберга дуговой антенной решёткой из открытых концов прямоугольных волноводов (волна H_{10}) и определяются технические ограничения на такую решётку в суммарном и разностном (моноимпульсном) режимах [71; 72].

Предлагаемая антенная система обеспечивает широкоугольное сканирование в угломестной и азимутальной плоскостях [137; 160], совмещая в одной конструкции суммарный и разностный каналы. Вопросы проектирования элементов решётки рассмотрены в [184—186]; архитектура многолучевых линзовых антенн применительно к системам 5G — в [34; 35].

Антенна состоит из фокусирующей части (ЛЛ) и возбуждающей — системы первичных облучателей. Сферическая симметрия линзы позволяет совмещать широкоугольное сканирование (перемещение группы облучателей по фокальной сфере) и моноимпульсный режим. Многоэлементность облучателя необходима для одновременного формирования суммарной и разностной ДН. Схема дуговой решётки из четырёх открытых концов прямоугольного волновода приведена на рисунке 6.1; поле излучения рассчитывается в рамках апертурной теории по распределению токов волны H_{10} в раскрыве.

Если волноводы возбуждает основной тип колебаний H_{10} , то $a \approx 0,7\lambda$, $b \approx 0,35\lambda$. Значения d_1 и d_2 выбирают таким образом, чтобы в соответствующей плоскости (вертикальной или горизонтальной) диаграммы пересекались на требуемом уровне (рекомендованное значение 0,707 по полю при нормированных диаграммах направленностей). Выбор значений d_1 и d_2 ограничен сверху и снизу. Во-первых, значения d_1 , d_2 должны быть меньше λ , чтобы во фрагментах антенных решёток не было дифракционных максимумов, что вызовет переоблучение края линзы и снизит эффективность антенны в целом; во-вторых, значения d_1 и d_2 выбирают из конструктивных соображений, и при больших значениях $k_0 a$ фрагмент решётки для вертикальной плоскости не должен пере-

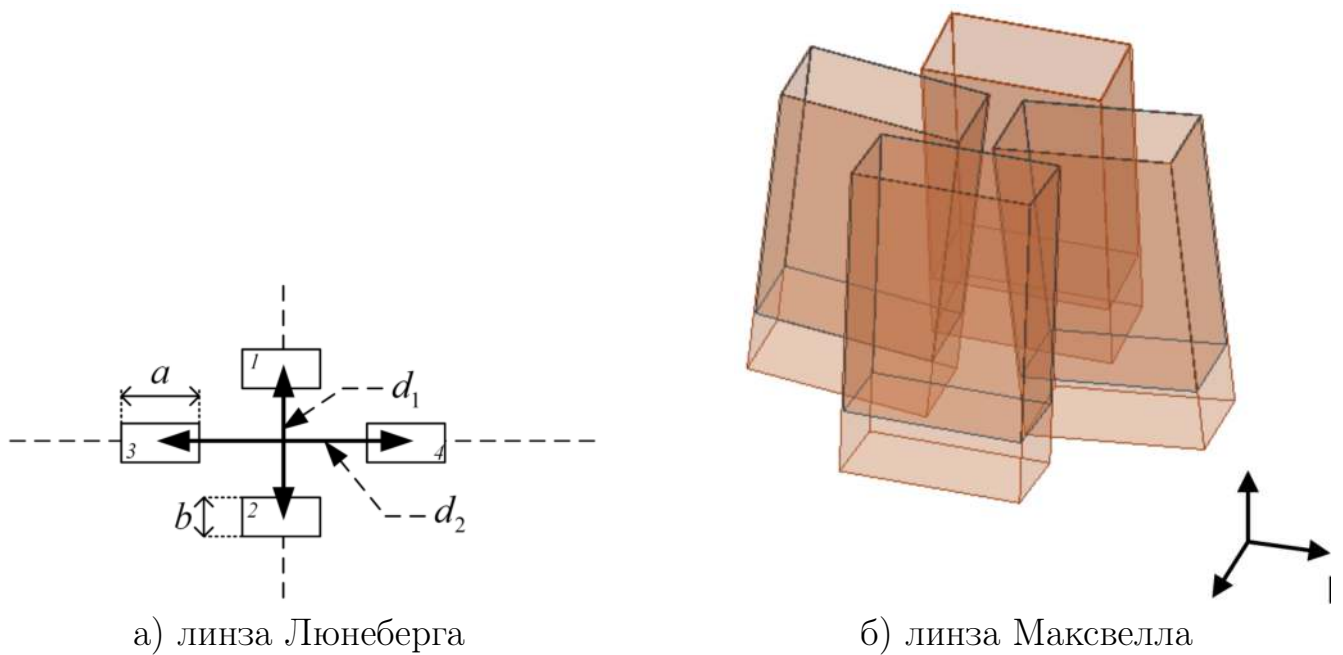


Рисунок 6.1 — Модель антенной системы: a — конфигурация антенной решётки, b — модель решётки; a — широкая стенка волновода; b — узкая стенка волновода; d_1, d_2 — периоды фрагментов антенных решёток с облучателями 1–2 и 3–4 соответственно

секаться с элементами антенной решётки для горизонтальной плоскости.

Антенную задачу решают в следующей последовательности.

Для выбранного типа облучателя антенных решёток (открытого конца волновода) рассчитывают диаграмму направленности, когда облучатель расположен на осевой линии сферической системы координат. Путём замены переменных определяют диаграммы направленностей от каждого из облучателей антенной решётки 1–4, смещённых с оси на заданный угол.

Размеры d_1 и d_2 выбирают так, чтобы диаграммы от облучателей 1,2 и 3,4 пересекались на уровне 0,707 по полю (–3 дБ по мощности), что задаёт углы смещения центров решёток. На практике применяются также уровни –1,5 и –5 дБ.

На рисунке 6.2 для ЛЛ размером $k_0 a = 6\pi$ приведены результаты расчётов диаграмм направленностей электрического поля $\vec{E}(\theta)$ в горизонтальной плоскости (диаграмма нормирована в направлении максимума излучения).

На рисунке 6.3 приведены диаграммы суммарного и разностного режимов в вертикальной плоскости. Здесь: θ_0 — угол смещения максимумов парциальных ДН, $\Delta\theta$ — линейный участок разностной диаграммы (зона захвата цели), α — угол наклона разностной диаграммы (пеленгационная чувствительность).

Несмотря на то, что в вертикальной плоскости диаграммы направленности получаются шире по сравнению с горизонтальной плоскостью, из-за

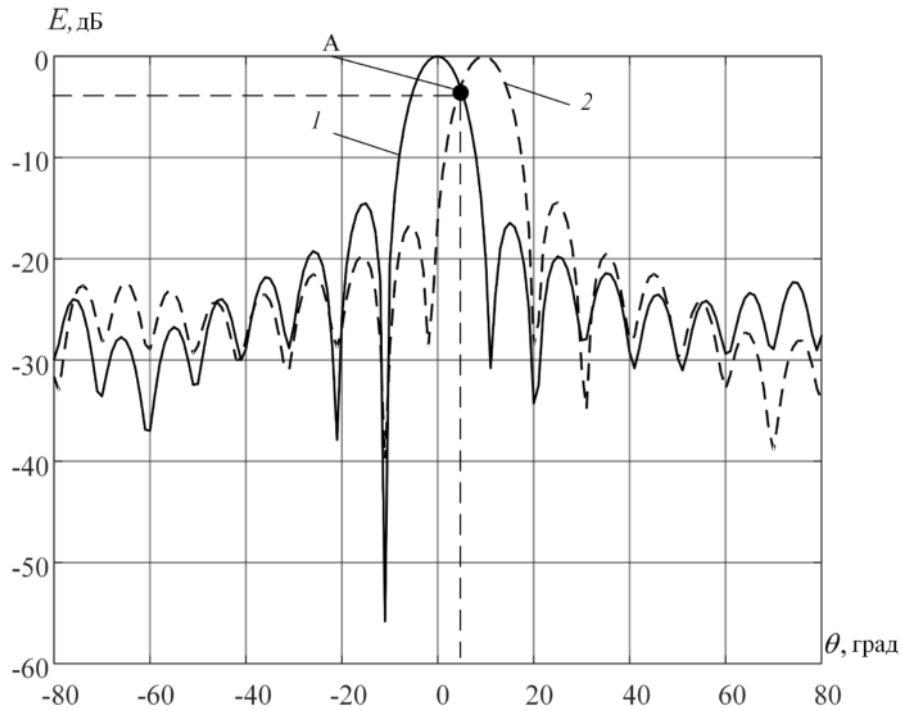
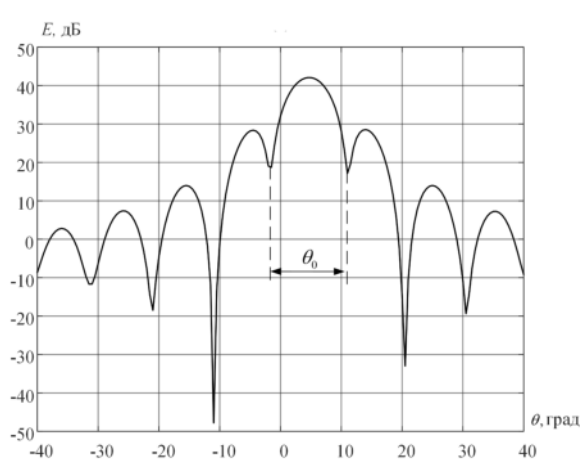
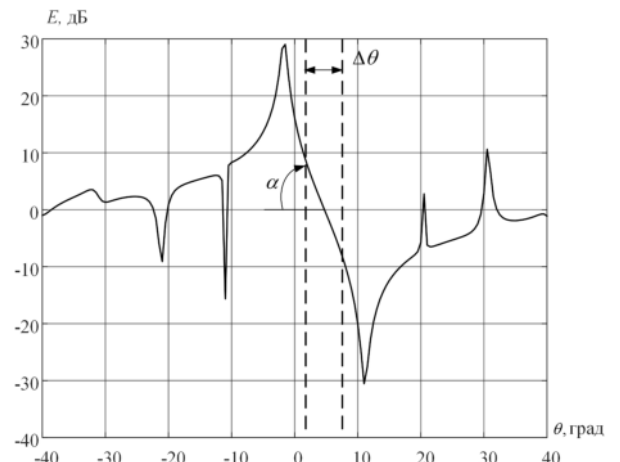


Рисунок 6.2 — Диаграммы направленностей (ДН) ЛЛ от облучателей 1, 2 (сплошная и штриховая линии соответственно). Пересечение диаграмм в точке А (-3 дБ, $4,7$ град); расположение облучателя 1 в точке $\theta = 0$ град, облучатель 2 сдвинут на угол $\theta = 9,4$ град.



а)



б)

Рисунок 6.3 — Суммарная (а) и разностная (б) ДН от облучателей 1, 2

конструктивных особенностей первичных облучателей пересечение на уровне -3 дБ не реализуется, так как приводит к наложению облучателей друг на друга. Пересечение диаграмм направленностей для линзы радиусом $k_0 a = 6\pi$ в вертикальной плоскости возможно только на уровне -5 дБ (рисунок 6.4).

На рисунке 6.5 показаны диаграммы суммарного и разностного режимов от облучателей 3 и 4 в горизонтальной плоскости; характеристики φ_0 , $\Delta\varphi$, β

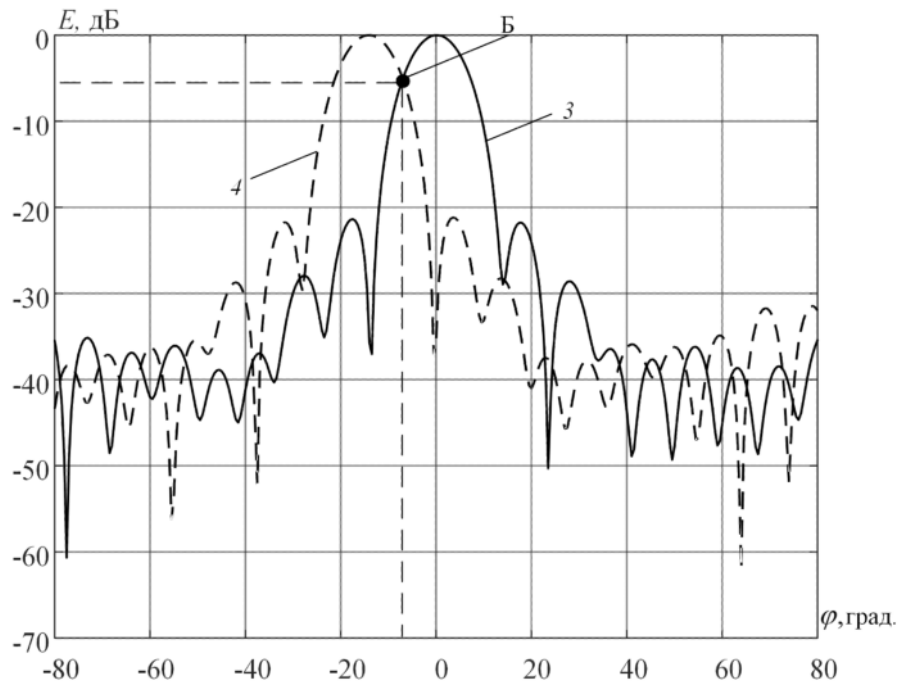


Рисунок 6.4 — Диаграммы направленностей (ДН) ЛЛ от облучателей 3, 4 (сплошная и штриховая линии соответственно). Пересечение диаграмм в точке Б (-5 дБ, -7 град); расположение облучателя 3 в точке $\varphi = 0$ град, облучатель 4 сдвинут на угол $\varphi = -14$ град.

определяются аналогично θ_0 , $\Delta\theta$, α .

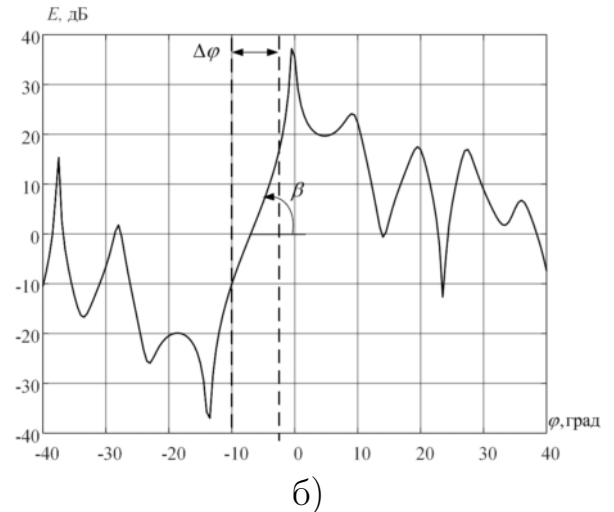
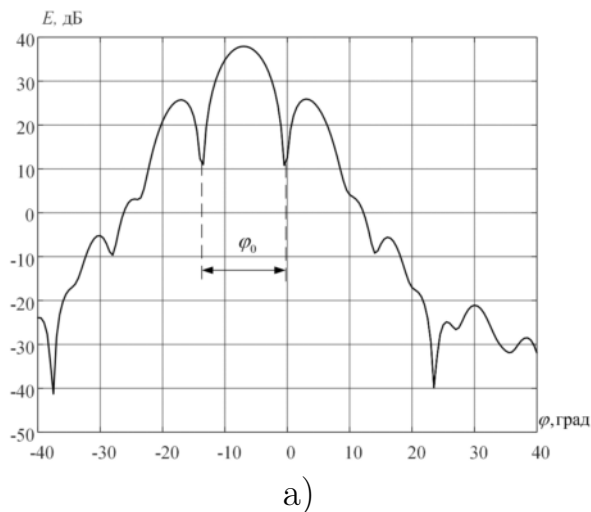


Рисунок 6.5 — Суммарная (а) и разностная (б) диаграммы направленностей от облучателей 3, 4

Основные характеристики антенны в зависимости от размера ЛЛ приведены в таблице 39, где $G_{\varphi=0}$ — КНД суммарного режима (облучатели 1,2, вертикальная плоскость $\varphi = 0$), $G_{\varphi=\pi/2}$ — КНД суммарного режима (облучатели 3,4, горизонтальная плоскость $\varphi = \pi/2$). Пересечение диаграмм от облучателей 1,2 обеспечивается на уровне -3 дБ, от облучателей 3,4 — на уровне

–5 дБ.

Таблица 39 — Параметры направленности антенны в вертикальной и горизонтальной плоскостях

$k_0 a$	Вертикальная плоскость				Горизонтальная плоскость			
	θ_0°	$\Delta\theta^\circ$	α°	$G_{\varphi=0}$, дБи	φ_0°	$\Delta\varphi^\circ$	β°	$G_{\varphi=\pi/2}$, дБи
2π	31	39	68	17,5	41,4	19	65	17,5
4π	14	12	69	25,4	21	10	63	25,4
6π	9,4	6,8	70	28,8	14	8	60	28,8

Коэффициент направленного действия оценён по ширинам главного лепестка в двух плоскостях (формула Крауса $D \approx 41253/(\Delta\theta \Delta\varphi)$); пиковое значение одинаково в обеих главных плоскостях и лежит в пределах апертурной границы направленности $(k_0 a)^2 + 2k_0 a$.

На рисунке 6.6 показана зависимость расстояния между облучателями d_1 (для облучателей 1 и 2) и d_2 (для облучателей 3 и 4) для обеспечения требуемого уровня пересечения диаграмм (–3 дБ по мощности в горизонтальной плоскости и –5 дБ — в вертикальной) от радиуса линзы.

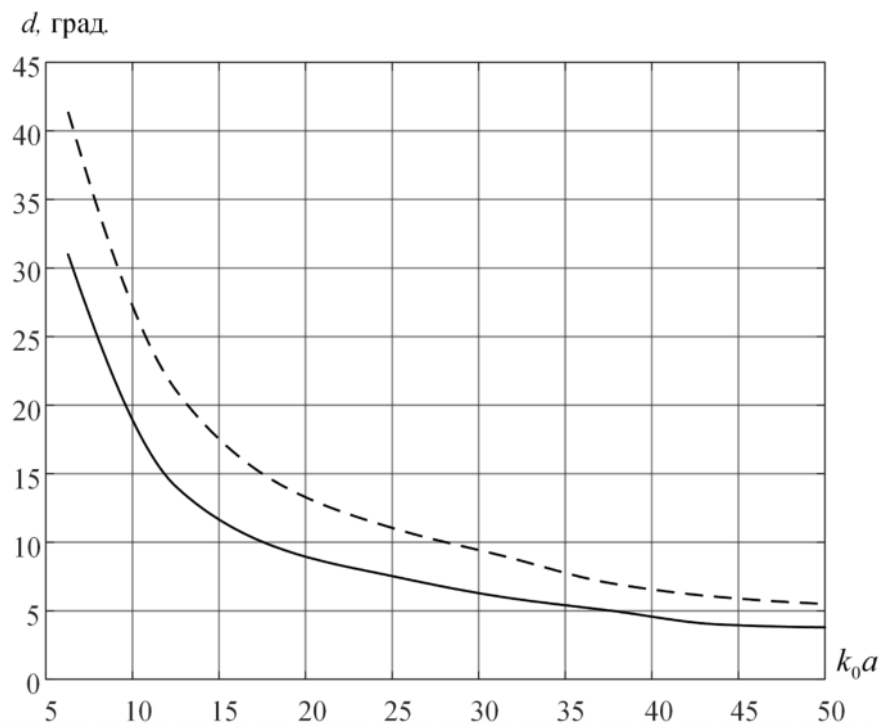


Рисунок 6.6 — Зависимость периода решётки от радиуса ЛЛ, сплошная линия — расстояние между облучателями 1, 2, штриховая — между облучателями 3, 4

Ограничения на периоды решёток могут быть преодолены применением малогабаритных полосковых излучателей [144; 182; 187], упрощающих выделение суммарного и разностного сигналов мостовыми устройствами [135]. Дополнительное преимущество ЛЛ — возможность механического сканирования в

широком диапазоне углов перемещением группы облучателей, недостижимая в зеркальных системах. Полученные ограничения (рисунок 6.6, таблица 39) формируют исходные данные для проектирования антенного комплекса и служат основой следующего раздела.

6.3 Формирование диаграммы направленности с использованием нескольких облучателей

6.3.1 Множитель системы эквидистантной линейной решётки

Рассмотрим антенную систему, в которой одиночная сферическая ЛЛ заменена линейной эквидистантной решёткой из N одинаковых линз меньшего размера, расположенных с шагом d . Каждая линза возбуждается собственным первичным облучателем; лучи отдельных линз можно считать параллельными в дальней зоне. Разность хода между лучами двух соседних линз составляет $d \cos \theta$, где θ — угол места относительно оси решётки.

Нормированный амплитудный множитель системы имеет стандартный вид [71]:

$$F_{\text{сист}}(\theta) = \frac{\sin(N k d \cos \theta/2)}{N \sin(k d \cos \theta/2)} \exp(j \psi_{\text{дос}}), \quad (6.1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, а $\psi_{\text{дос}}$ — фазовый сдвиг в диаграммообразующей схеме (ДОС), задающий электронное положение главного луча.

Суммарная диаграмма направленности решётки в приближении пренебрежения взаимной связью между элементами представляется произведением парциальной диаграммы одиночной линзы (рассчитываемой в аппарате тензорных функций Грина согласно главе 2) и множителя системы (6.1):

$$E_{\Sigma}(\theta, \varphi) = E_{\text{линза}}(\theta, \varphi) \cdot F_{\text{сист}}(\theta). \quad (6.2)$$

При шаге $d = 2a$ (плотная укладка линз радиуса a) и электрических размерах линзы $k_0 a > 3$ в диаграмме множителя появляются дифракционные максимумы, повышающие уровень боковых лепестков антенной системы. Подбором d и a в небольших пределах удаётся снизить уровень нежелательных максимумов.

6.3.2 Типовой пример: решётка из трёх линз

Для линейной решётки из $N = 3$ одинаковых линз Люнеберга радиуса a с трёхслойной оптимизированной аппроксимацией нормированные радиусы слоёв и значения диэлектрической проницаемости приведены в таблице 40:

Таблица 40 — Параметры трёхслойной ЛЛ для линейной решётки $N = 3$

№ слоя	1	2	3	4 (воздух)
r_k/a	0,53	0,75	0,93	1,00
ϵ_k	1,86	1,57	1,28	1,00

Парциальная диаграмма одиночной линзы электрического размера $k_0a = 4\pi$ с облучателем типа открытого конца волновода (волна H_{10}) в суммарной решётке даёт ширину главного лепестка $\Delta\theta_{-3} \approx 6,8^\circ$ при уровне первого бокового лепестка $-8,6$ дБ (см. также табл. 37 главы 5). После умножения на множитель системы (6.1) ширина главного лепестка всей решётки сокращается до $\Delta\theta_{-3} \approx 2,3^\circ$, что соответствует одиночной линзе электрического радиуса $k_0a \approx 6\pi$.

Аналогичные оценки для решёток большего числа элементов: $N = 5$ обеспечивает ширину главного лепестка, эквивалентную одиночной линзе $k_0a \approx 8\pi$, $N = 7$ — $k_0a \approx 12\pi$.

6.3.3 Экономия материала и массы

Объём диэлектрического материала тела сферической линзы с L слоями и радиусом a определяется соотношением

$$V_{\text{линза}} = \frac{4\pi}{3} a^3 [1 - (r_{L-1}/a)^3], \quad (6.3)$$

где r_{L-1}/a — нормированный радиус границы последнего диэлектрического слоя (т. е. $r_L = a$ — внешняя воздушная граница, не требующая материала).

Сопоставим две конструкции с одинаковой шириной главного лепестка: одиночная линза радиуса $a_{\text{одн}} = 3a/2$, подобранная по ширине ДН эквивалентной решётке $N = 3$ линз радиуса a и шагом $d = 2a$. Объём одиночной линзы превышает суммарный объём трёх линз решётки в

$$\frac{V_{\text{одн}}}{N \cdot V_{\text{линза}}} = \frac{(3/2)^3}{3} \approx 1,13, \quad (6.4)$$

однако если вести сравнение по ширине ДН, необходимой для эквивалентных энергетических характеристик (что требует увеличения одиночной линзы до $k_0 a_{\text{одн}} = 6\pi$ против $k_0 a = 4\pi$ в каждой из трёх линз решётки), экономия диэлектрического материала при переходе к решётке составляет 50–70 % от объёма одиночной линзы. При массе типовой 3D-печатной сферической ЛЛ диаметром 30 см около 3,4 кг (полимер NIPS, плотность 1,04 г/см³) экономия превышает 2 кг — это существенно для мобильных и авиационных применений.

6.3.4 Конструктор лучей диаграмм направленности

Предложенная конструкция открывает следующие режимы формирования диаграммы направленности путём перемещения или коммутации облучателей группы линз:

Во-первых, *многолучевой режим* — одновременное возбуждение нескольких парциальных облучателей с независимыми амплитудами и фазами позволяет формировать в пространстве систему из $K \leq N$ одновременно существующих лучей. Применяется в многолучевых базовых станциях 5G/6G для пространственного разделения пользователей (SDMA).

Во-вторых, *режим электронного сканирования* — подбор фаз $\psi_{\text{дос}}$ между облучателями обеспечивает качание главного лепестка без механического перемещения, что критично для систем быстрого обзора пространства.

В-третьих, *режим широкого луча* — совместное возбуждение нескольких облучателей с синфазными токами формирует «столбообразную» диаграмму, полезную для локаторов обнаружения на ближней дистанции и систем сопровождения нескольких целей.

В-четвёртых, *вспомогательная решётка* — часть облучателей группы может использоваться в режиме пониженной мощности для подавления отражений от местных предметов (здания, складки местности), что особенно актуально при установке радиолокатора вблизи сильных отражателей.

К преимуществам решётки ЛЛ относятся: уменьшенная ветровая нагрузка (меньшее аэродинамическое сопротивление), возможность распределённого размещения линз на несущих конструкциях, упрощение транспортировки и монтажа. В качестве недостатков следует отметить увеличение линейного габарита антенной системы в плоскости решётки и необходимость введения ДОС с фазовращателями и согласованными делителями мощности.

6.4 Формирование широкой диаграммы направленности с заданным уровнем неравномерности в рабочем секторе углов

Задача формирования широкой ДН с контролируемым уровнем неравномерности в рабочем секторе решается в той же многооблучательной схеме: равномерно расположенным на фокальной сфере облучателям задаётся амплитудно-фазовое распределение по критерию Чебышёва. Это обеспечивает диаграмму прямоугольной огибающей с неравномерностью $\pm 0,5 \dots \pm 1,5$ дБ в секторе шириной до $(N - 1) \theta_{HPBW}$ (N — число задействованных облучателей, θ_{HPBW} — ширина парциального луча). Такие ДН востребованы в системах обзорной радиолокации, управления движением и в базовых станциях малого радиуса.

6.5 Развязка между каналами антенной решётки линзы Люнеберга

При одновременном возбуждении нескольких первичных облучателей ключевым параметром становится развязка каналов — коэффициент взаимосвязи (coupling), задающий предельную изоляцию в многолучевой системе. Расчёт собственных и взаимных проводимостей щелевых и полосковых излучателей в слоистой среде, применимый к облучателям на поверхности сферической линзы, развит в работах [188—192]. Ниже рассмотрены три конфигурации: параллельные, коллинеарные и ортогонально поляризованные излучатели.

Облучатель на поверхности ЛЛ в общем случае представляется элементом Гюйгенса; его поляризация задаётся ориентацией вектора $\vec{E}$ в плоскости раскрыва. Источниками поля в аппарате ТФГ служат эквивалентные электрические и магнитные токи, возбуждающие слоистую сферу. Диаграмма направленности отдельного облучателя в дальней зоне записывается как

$$\vec{F}_i(\theta, \varphi) = F_{i,\theta}(\theta, \varphi) \hat{e}_\theta + F_{i,\varphi}(\theta, \varphi) \hat{e}_\varphi, \quad (6.5)$$

где $F_{i,\theta}$ и $F_{i,\varphi}$ — θ - и φ -составляющие ДН i -го облучателя, а углы θ, φ отсчитываются в системе координат, связанной с центром линзы.

Квадратичные характеристики антенной решётки — сопротивление излучения, КНД, коэффициент развязки — получаются интегрированием произведений ДН по полному телесному углу. Для составляющей тока вдоль $\hat{e}_\theta$

сопротивление излучения записывается как

$$R_{\Sigma} = A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_{\theta}(\theta, \varphi) F_{\theta}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (6.6)$$

где A — нормировочный коэффициент, зависящий от выбора единиц тока и напряжённости поля. Собственное сопротивление излучения i -го облучателя R_{ii} и коэффициент взаимной связи R_{ij} между i -м и j -м облучателями вводятся как

$$R_{ij} = A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{F}_i(\theta, \varphi) \cdot \vec{F}_j^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (6.7)$$

откуда нормированный коэффициент развязки между каналами имеет вид

$$C_{ij} = \frac{|R_{ij}|^2}{R_{ii} R_{jj}}. \quad (6.8)$$

В некоторых конфигурациях излучателей (параллельные прямоугольные волноводы с волной H_{10} , элементы Гюйгенса одинаковой поляризации) интеграл (6.7) берётся аналитически; в общем случае он вычисляется численно по парциальным ДН, рассчитанным в ТФГ и табулированным с шагом 1° по углам θ, φ . Диаграммы $\vec{F}_i(\theta, \varphi)$ для осевого облучателя и $\vec{F}_j(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$ для смещённого облучателя рассчитываются независимо; последняя получается поворотом системы координат на (θ_0, φ_0) — угловые координаты j -го облучателя на фокальной сфере. Выражения (6.7), (6.8) образуют единый базис для расчёта развязки во всех конфигурациях, рассматриваемых ниже.

6.6 Развязка между элементами антенной решётки

Соотношения (6.7), (6.8) применяются ниже к трём типовым конфигурациям.

6.6.1 Линейная поляризация, параллельные излучатели

В конфигурации с параллельным расположением прямоугольных волноводов (широкие стенки параллельны, а оси смещены в одной плоскости) основной вклад в интеграл (6.7) даёт θ -составляющая ДН. При этом интеграл имеет выраженный максимум в области перекрытия главных лепестков и убывает с ростом углового разнесения облучателей. Для электрического размера линзы $k_0 a = 4\pi$

и шага решётки d_1 , задающего пересечение парциальных диаграмм на уровне -3 дБ (см. табл. 39), развязка между соседними каналами составляет около $-18 \dots -20$ дБ; при увеличении размера линзы до $k_0 a = 6\pi$ развязка растёт до $-24 \dots -26$ дБ за счёт сужения парциальных лепестков.

6.6.2 Линейная поляризация, коллинеарные излучатели

В коллинеарной конфигурации волноводы размещены на одной оси с параллельными широкими стенками; взаимная связь определяется преимущественно φ -составляющей ДН. Интегральный вклад области максимумов лепестков в этом случае меньше, и при тех же геометрических параметрах линзы и решётки получаемая развязка оказывается на $3 \dots 5$ дБ выше по сравнению с параллельным расположением. Указанное различие согласуется с экспериментальными результатами, приведёнными в [71].

6.6.3 Ортогональная поляризация

Если соседние облучатели возбуждаются с взаимно ортогональными поляризациями (например, H_{10} в одном волноводе и H_{01} в соседнем), скалярное произведение $\vec{F}_i \cdot \vec{F}_j^*$ в (6.7) равно нулю в идеально согласованной системе координат. В реальной линзе конечный уровень кросс-поляризации (5.1) ограничивает достижимую развязку значениями $-35 \dots -40$ дБ для $k_0 a = 4\pi$. Тем самым ортогональная поляризация — эффективное средство повышения изоляции в многолучевых системах с плотной угловой упаковкой каналов, однако её предельные возможности задаются именно кросс-поляризационными свойствами самой линзы.

6.7 Влияние вынесенного облучателя на характеристики антенной решётки

В ряде практических применений — моноимпульсные системы сопровождения, сканирующие решётки с обширным сектором обзора — часть облучателей приходится размещать не на самой фокальной сфере, а вынесенно, с радиальным смещением Δr наружу от поверхности линзы. Такое смещение приводит к расфокусировке парциальной ДН: её главный лепесток расши-

ряется, уровень первого бокового лепестка растёт, а максимум КНД падает. Количественно влияние выноса описывается с помощью фазового распределения в апертуре линзы, пересчитанного в ТФГ через новые граничные условия на поверхности $r = a + \Delta r$. При малых смещениях ($\Delta r \leq 0,1\lambda$) деградация параметров незначительна ($\Delta\theta_{-3}$ увеличивается на $< 5\%$, ЛБЛ — не более чем на 1,5 дБ). При $\Delta r \geq 0,3\lambda$ парциальная ДН становится непригодной для задач высокой точности пеленгации. Отсюда следует практическая рекомендация: при проектировании вынесенные облучатели размещать на минимальном технологически приемлемом расстоянии от фокальной сферы, а корректирующие коэффициенты усиления и ширины лепестка учитывать на этапе расчёта моноимпульсных характеристик системы.

6.8 Выводы по главе

В настоящей главе развиты результаты главы 5: от одиночной антенны на базе линзы Люнеберга — к антенной решётке первичных облучателей, размещённых на фокальной сфере. Установлены ограничения на период решётки ($d_{1,2} < \lambda$), рассчитаны характеристики суммарного и разностного каналов для трёх типоразмеров, формализована процедура оценки развязки через двойные интегралы парциальных диаграмм. Вопросы снижения габаритов и формирования диаграмм специальной формы рассматриваются в главе 7; анализ решёток на проводящем экране или в радоме, выходящий за рамки чисто сферической ТФГ, — в главе 9.

Ключевой вывод главы. Установленные количественные ограничения на период решётки облучателей ($d_{1,2} < \lambda$), результаты расчёта моноимпульсного режима для трёх характерных типоразмеров $k_0a \in \{2\pi, 4\pi, 6\pi\}$ (линейный участок разностной диаграммы $\Delta\theta$ от 39° до $6,8^\circ$, КНД суммарного канала от 17,5 до 28,8 дБи (оценка по ширине луча), пеленгационная чувствительность $\alpha \approx 70^\circ$ инвариантна к размеру линзы) и формализованная процедура расчёта развязки между каналами через двойные интегралы парциальных диаграмм образуют расчётно-методическую базу проектирования многолучевых базовых станций 5G/6G и моноимпульсных радиолокаторов на основе линзы Люнеберга — то есть прямое инженерное приложение четвёртого положения, выносимого на защиту. Принципиальное ограничение чисто сферической ТФГ при анализе решёток на проводящем экране, в радоме или внутри корпуса

носителя естественно выводит к необходимости декомпозиционного аппарата (положение 1), развитого в главе 9.

Глава 7. Модифицированные по форме линзы

7.1 Введение

В настоящей главе рассматриваются конструктивные модификации линзы Люнеберга. В классическом виде ЛЛ представляет собой объёмное диэлектрическое тело со сферической симметрией, однако её можно выполнить и в виде полусферы — такая конструкция удобна, например, для размещения на крыше транспортного средства. Сферическая ЛЛ имеет две фокальные точки: одна лежит на поверхности линзы, вторая — с теневой стороны на бесконечном удалении. В силу симметрии картина лучей на теневой стороне линзы в точности повторяет картину на освещённой стороне, что естественным образом приводит к идее заменить теневую половину линзы металлическим экраном. В такой конструкции обе фокальные точки оказываются на одной стороне сферического полупространства. Для полусферы построить замкнутое представление функции Грина не удаётся, поэтому антенная и дифракционная задачи решаются численно — методом конечных разностей с привлечением высокопроизводительной вычислительной техники.

Публикации автора по материалам главы 7: [37; 67—70; 72; 181].

7.2 Конструкция и параметры полусферической линзы Люнеберга

Полусферическое исполнение линзы Люнеберга не только сокращает габариты и массу антенны по сравнению со сферическим вариантом, но и открывает возможность формирования диаграмм направленности специального вида, что расширяет область её применения. Характеристики такой антенны при смещении первичного облучателя относительно фокальной точки рассмотрены в [193]. Поведение полусферической ЛЛ в режиме сканирования и зависимость её диаграммы от угла поворота облучателя и параметров проводящего экрана подробно исследованы в [69]. В [72] предложена методика выбора геометрических и электродинамических параметров первичного облучателя, позволяющая одновременно формировать суммарный и разностный каналы (моноимпульсный режим). Рассматриваемая конструкция показана на рисунке 7.1: полусферическая ЛЛ установлена на проводящий экран диаметром $d = 2a$ — двум диаметрам линзы [25; 27].

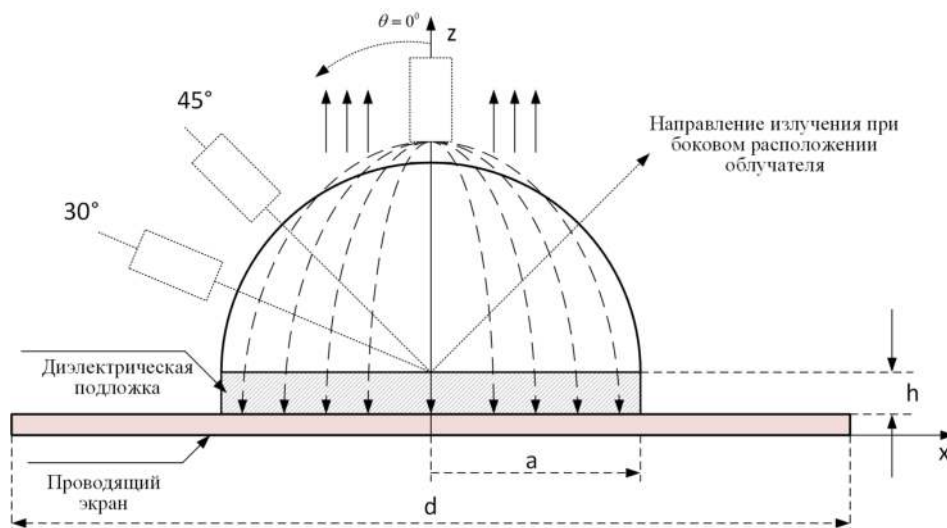


Рисунок 7.1 — Схема полусферической линзы Лüneберга

Между линзой и экраном располагается диэлектрическая подложка с проницаемостью, близкой к $\epsilon = 2$; её толщина h совместно с углом поворота облучателя θ и диаметром экрана d служат управляющими параметрами формы диаграммы направленности и уровня излучения в заднюю полусферу. В качестве материала подложки рассмотрены фторопласт-4 и стеклотекстолит (FR-4).

Полусферическая конструкция удобна для установки как на стационарных объектах (фасады зданий), так и на подвижных носителях, у которых роль экрана может выполнять несущая поверхность.

Электродинамическое моделирование полусферической ЛЛ выполнено в пакете Ansys HFSS методом конечных элементов — расчётные модели с двумя положениями облучателя приведены на рисунке 7.2.

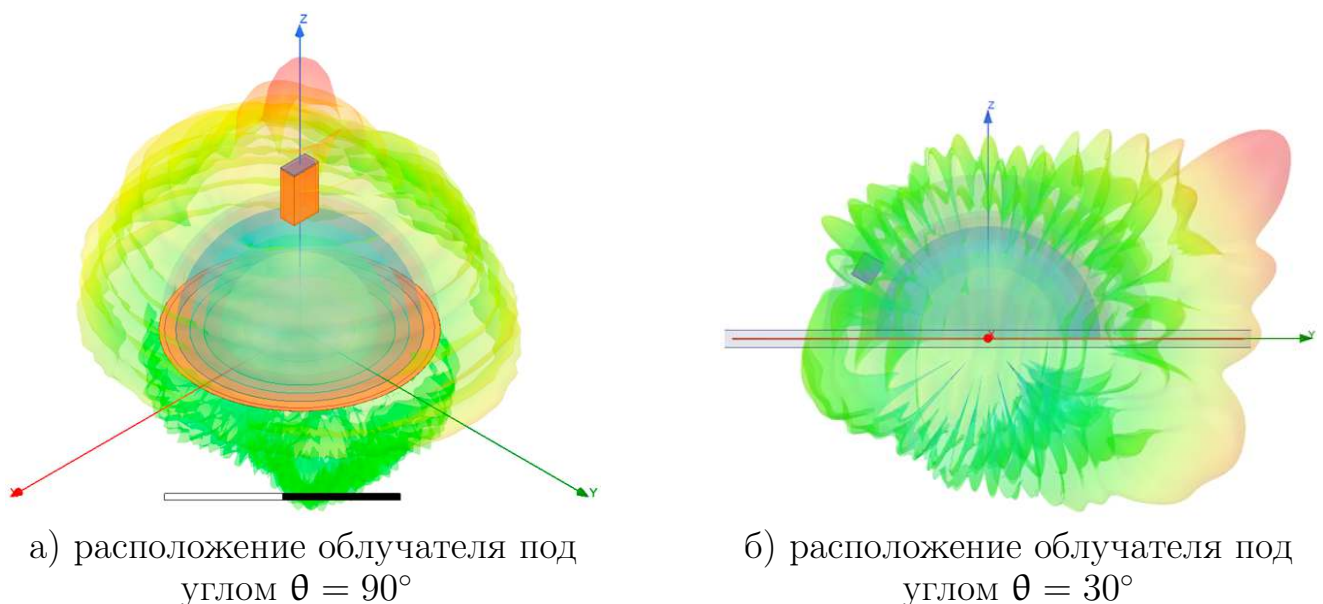


Рисунок 7.2 — Модель полусферической ЛЛ в HFSS

В качестве примера рассмотрена семислойная ЛЛ радиусом 12 см, параметры слоёв которой отвечают закону (1.1): нормированные радиусы слоёв $a_l = 0,39; 0,56; 0,68; 0,78; 0,88; 0,96; 1,0$; соответствующие диэлектрические проницаемости $\varepsilon'_l = 1,93; 1,77; 1,61; 1,46; 1,31; 1,16; 1,0$. Облучателем служил стандартный прямоугольный волновод с открытым концом, возбуждающий волну H_{10} на частоте $f = 10$ ГГц ($\lambda \approx 30$ мм).

Диаграмма направленности при осевом положении облучателя ($\theta = 0^\circ$) и без диэлектрического зазора ($h = 0$) показана на рисунке 7.3: направляющие свойства линзы сохраняются.

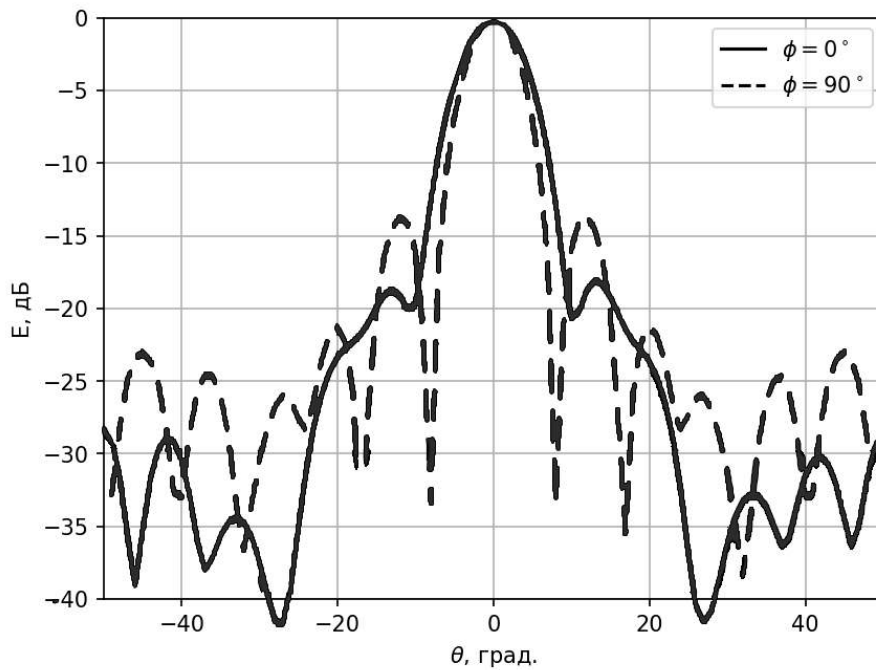


Рисунок 7.3 — Диаграмма направленности оптимизированной шестислойной полусферической ЛЛ

В радиолокации нередко требуются антенны с диаграммой направленности, узкой в одной плоскости и широкой в ортогональной. Традиционно для формирования таких ДН применяют либо профилированные рефлекторы, либо системы распределённых облучателей.

В антеннах с распределёнными облучателями амплитудой и фазой элементов управляют так, чтобы поле в апертуре соответствовало заданной ДН. Точность расчёта ограничена неточным знанием поля в фокальной зоне и эффектами взаимной связи элементов.

Антенны со специальной формой ДН применяются для определения направления на источник излучения или для сопровождения нескольких источников. Поэтому задача оперативного управления формой и характеристиками

направленности остаётся актуальной [194]. Для ускорения подбора параметров слоёв и возбуждения в работах [195; 196] предложено использовать искусственные нейронные сети, обученные на серии расчётов ДН при различных конфигурациях облучателей.

Характерный пример — самолётные радиолокаторы, предназначенные для обзора наземных целей (рисунок 7.4). От их антенн требуется ДН, узкая в азимутальной плоскости и такая, чтобы интенсивность отражённого от цели сигнала не зависела от дальности в пределах зоны обзора. Поскольку напряжённость поля при распространении радиоволн убывает обратно пропорционально расстоянию, радиус-вектор ДН по полю должен изменяться обратно пропорционально синусу угла места, то есть быть пропорциональным косекансу этого угла.

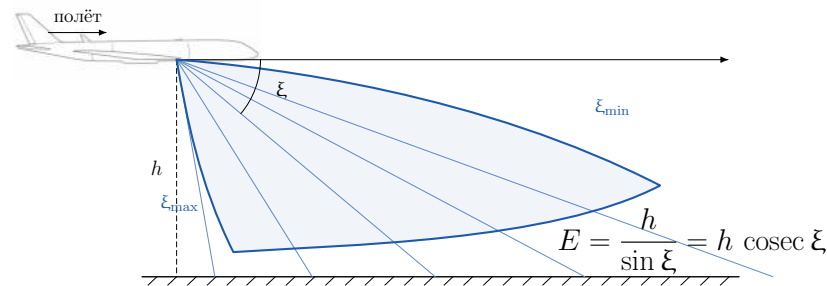
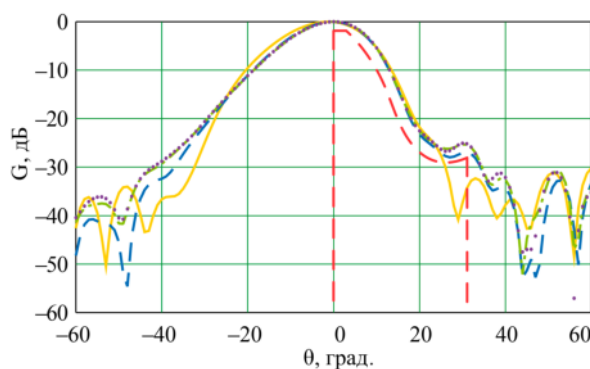


Рисунок 7.4 — Косекансная диаграмма направленности самолётного радиолокатора обзора наземных целей

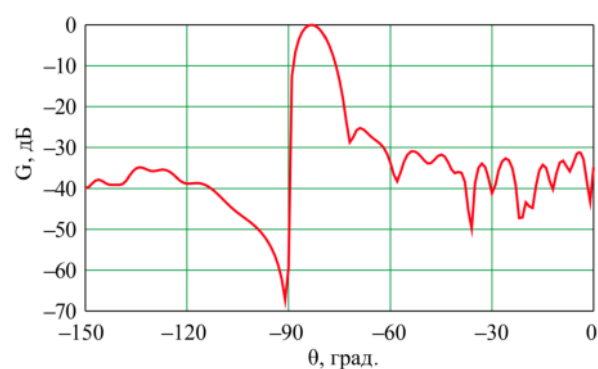
Такая диаграмма (рисунок 7.4) называется косекансной и требуется также антеннам наземных радиолокаторов обнаружения воздушных целей. Традиционные способы её формирования неприменимы к сверхширокополосным сигналам, тогда как полусферическая ЛЛ обладает частотно-независимой фокусирующей способностью и представляет в этом контексте самостоятельный интерес [25; 197]. Варианты размещения полусферической и сферической ЛЛ на фюзеляже носителя рассмотрены в разделе 7.3 (рисунки 7.6 и 7.7).

Результаты расчёта косекансной ДН полусферической линзы приведены на рисунке 7.5. Облучатель повернут на угол $\theta = 83^\circ$, а диаметр проводящего экрана варьируется в диапазоне $d = 4 \dots 10\lambda$.

Геометрические параметры экрана и соответствующие характеристики антенны сведены в таблицу 41. Во всех рассмотренных случаях уровень боковых лепестков оказывается ниже -25 дБ. Диаметр экрана выбран равным удвоенному диаметру линзы ($d = 8\lambda = 240$ мм при линзе диаметром 4λ) — условие, при котором проводящий экран уже достаточно велик, чтобы восстанавливать



а) ДН для d : 120 мм, 180 мм, 240 мм, 300 мм, csc



б) ДН при угле поворота облучателя $\theta = 83^\circ$

Рисунок 7.5 — Диаграмма направленности (ДН) полусферической ЛЛ на идеально проводящей плоскости

полную сферу по принципу зеркальных изображений. Ширина косекансного сектора при этом выходит на насыщение: она возрастает с $64,7^\circ$ при $d = 4\lambda$ до $76,1^\circ$ при $d = 8\lambda$, тогда как дальнейшее увеличение экрана до 10λ прироста уже не даёт ($74,8^\circ$).

Таблица 41 — Влияние размеров проводящего экрана на характеристики антенны

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
Диаметр экрана, d	120 мм	180 мм	240 мм	300 мм
d в длинах волн для $f = 10$ ГГц, λ	4λ	6λ	8λ	10λ
Ширина косекансного сектора, град.	64,7	65,4	76,1	74,8
Уровень перв. бок. лепестка, дБ	-32,8	-28,3	-25,4	-25,5

Расчёты подтверждают возможность синтеза косекансной ДН на базе полусферической ЛЛ. Протяжённый проводящий экран дополнительно снижает уровень боковых лепестков, уменьшая вероятность ложных отметок; частотно-независимые фокусирующие свойства ЛЛ обеспечивают работоспособность системы в широком диапазоне частот.

7.3 Размещение линзовых антенн с косекансной ДН на носителе

Полученные результаты позволяют предложить два технических решения размещения линзовых антенн с косекансной ДН на борту летательного аппарата

(носителя), развивающих типовой вариант размещения бортовых радиолокаторов. Оба решения используют вырез в обшивке фюзеляжа, закрываемый радиопрозрачным обтекателем, и различаются исполнением линзы и способом управления формой диаграммы.

Первое решение (рисунок 7.6) — полусферическая ЛЛ на плоском металлическом экране. Экран выполняется в виде плиты, закреплённой на силовом шпангоуте в вырезе обшивки заподлицо с ней, и одновременно служит зеркалом, восстанавливающим полную сферу (раздел 7.2). Купол линзы обращён вниз, в подобтекательное пространство; облучатель установлен непосредственно на сферической поверхности, его ось направлена в центр линзы. Форма ДН управляется углом поворота облучателя θ и диаметром экрана d : как показано выше, рабочая конфигурация — угол $\theta = 83^\circ$ и экран вдвое больше линзы, $d = 8\lambda$, на котором ширина косекансного сектора выходит на насыщение (таблица 41), а диэлектрическая подложка между линзой и экраном служит дополнительным управляющим параметром. Достоинства — почти вдвое меньшая высота конструкции, снижение массы за счёт исключения половины диэлектрического тела линзы, а также интеграция антенны с силовой конструкцией носителя.

Второе решение (рисунок 7.7) — полная сферическая ЛЛ в подвесе с многооблучательной системой. Линза закрепляется кронштейнами на монтажной плите; вдоль направляющей дуги на её поверхности размещаются семь идентичных облучателей, оси которых направлены в центр линзы. Каждому облучателю соответствует собственное направление выхода луча в нижнее полупространство, поэтому возбуждение выбранной комбинации облучателей с заданным амплитудно-фазовым распределением через коммутационный блок, выполняющий функции диаграммообразующей схемы, формирует диаграмму косекансного типа без механического перемещения элементов. Возможность такого синтеза подтверждена расчётом многооблучательного режима ЛЛ (таблица 38, рисунок 5.4); конструктивной основой размещения облучателей на дуге служит решётка, рассмотренная в главе 6. Такое решение сохраняет более широкий сектор обзора по сравнению с полусферическим вариантом и позволяет оперативно перестраивать форму ДН, что согласуется с концепцией реконфигурируемых линзовых антенн [194; 197]; недостатки — большие габариты и необходимость диаграммообразующего тракта.

Выбор между решениями определяется ограничениями носителя: при

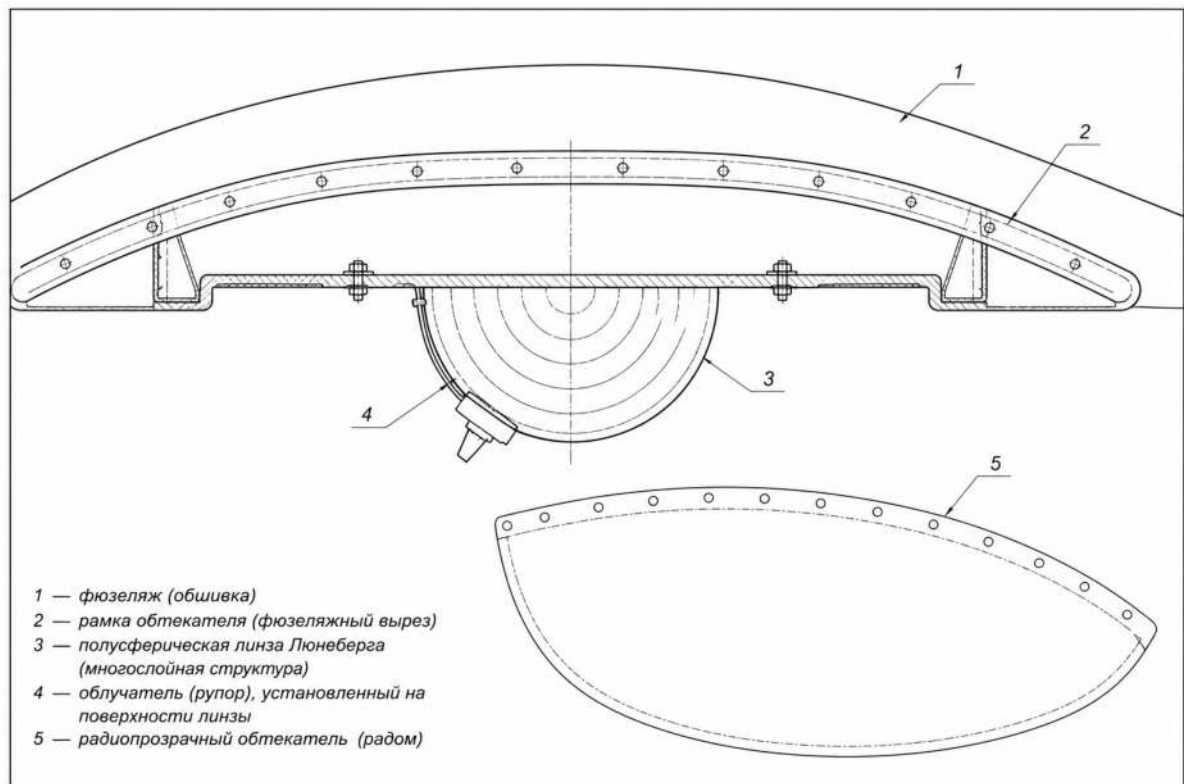


Рисунок 7.6 — Схема размещения полусферической линзы Люнеберга с облучателем на фюзеляже летательного аппарата (продольное сечение): 1 — фюзеляж (обшивка); 2 — рамка обтекателя (фюзеляжный вырез); 3 — полусферическая ЛЛ (многослойная структура); 4 — облучатель на металлическом экране; 5 — радиопрозрачный обтекатель

жёстких требованиях к высоте и массе конструкции предпочтительна полусферическая ЛЛ на экране, при требовании электронной перестройки формы ДН в широком секторе — сферическая ЛЛ с управляемой многооблучательной системой.

7.4 Оценка влияния материала подложки между ЛЛ и экраном

Диэлектрическая подложка между корпусом полусферической ЛЛ и проводящим экраном служит дополнительным управляющим элементом. Рассмотрены *фторопласт-4* (политетрафторэтилен, Тефлон) и *стеклотекстолит* FR-4 — последний поставляется с металлизированным покрытием, что упрощает сопряжение с экраном.

Для подложки из **фторопласта-4** на рисунке 7.8 приведены серии ДН при толщине $h = 0 \dots 21$ мм и трёх положениях облучателя: $\theta = 30^\circ$, 45° и 90° . Соответствующие числовые характеристики сведены в таблицы 42, 43 и 44.

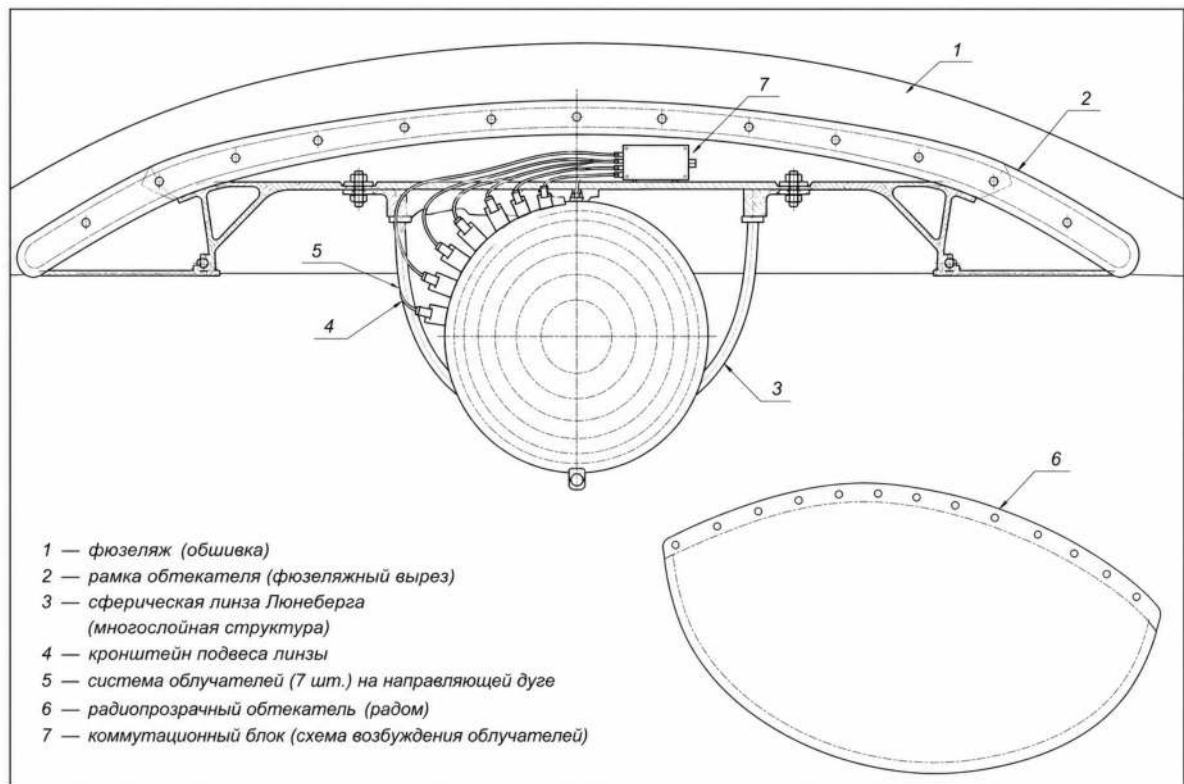
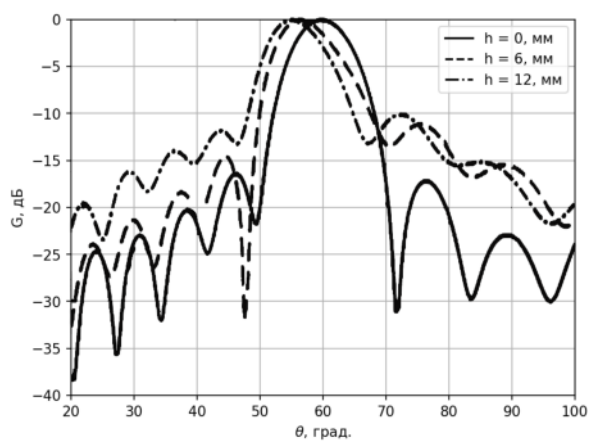


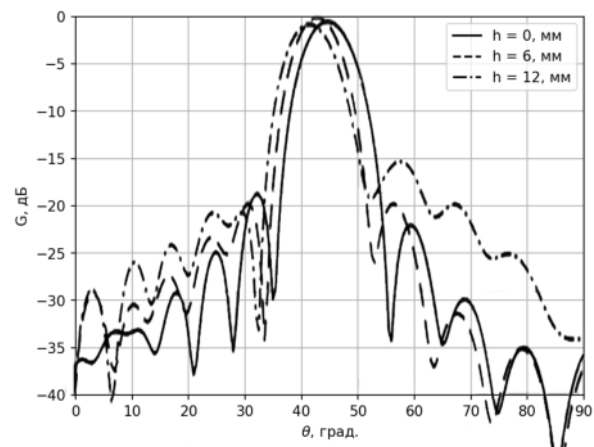
Рисунок 7.7 — Схема формирования косекансной диаграммы направленности сферической линзой Люнеберга с управляемой системой облучателей (продольное сечение, обтекатель условно снят): 1 — фюзеляж (обшивка); 2 — рамка обтекателя (фюзеляжный вырез); 3 — сферическая ЛЛ (многослойная структура); 4 — кронштейн подвеса линзы; 5 — система облучателей (7 шт.) на направляющей дуге; 6 — радиопрозрачный обтекатель (радом); 7 — коммутационный блок (схема возбуждения облучателей)

Аналогичные результаты для подложки из **стеклотекстолита** представлены на рисунке 7.9; зависимость характеристик антенны от толщины зазора $h = 0 \dots 21$ мм при тех же трёх углах поворота облучателя приведена в таблицах 45, 46 и 47.

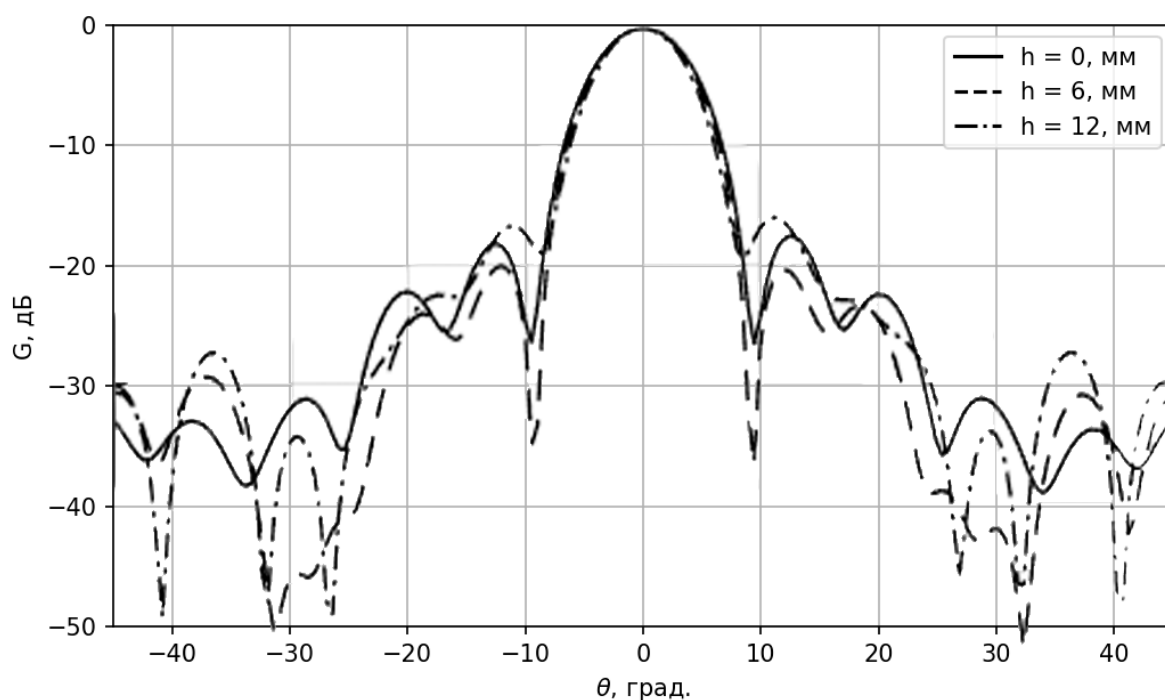
Таким образом, сочетание угла облучателя и толщины диэлектрического зазора позволяет управлять формой ДН: изменение h сказывается преимущественно на уровне боковых лепестков, тогда как ширина основного лепестка остаётся практически постоянной. При $h > 21$ мм ($\approx 0,7\lambda$ при $f = 10$ ГГц) диаграмма теряет симметрию и выходит за пределы рабочей области.



а) расположение облучателя под углом $\theta = 30^\circ$



б) расположение облучателя под углом $\theta = 45^\circ$



в) расположение облучателя под углом $\theta = 90^\circ$

Рисунок 7.8 — ДН полусферической ЛЛ с различной толщиной подложки h из материала *фторопласт-4*

7.5 Влияние формы и размеров экрана на обратное излучение модифицированной линзы

Антенные свойства модифицированной линзы Люнеберга с проводящим экраном, предназначенным для подавления обратного излучения, рассмотрены автором в [68]. В указанной работе определены форма и размеры экрана, обеспечивающие минимальный уровень заднего излучения при сохранении основного лепестка ДН. В качестве базовых конфигураций рассматривались полулинзы

Таблица 42 — Влияние толщины подложки h (фторопласт), $\theta = 30^\circ$

h , мм	$\Delta\theta^\circ$	ЛБЛ, дБ	$\theta_{\text{БЛ}}$, град.
0	22,8	-17,2	46,2
3	23,2	-17,2	46,7
6	19,2	-16,3	43,8
9	21,2	-16,8	44,9
12	21,1	-12,4	43,2
15	20,3	-12,3	43,6
18	20,4	-10,8	41,6
21	18,8	-8,1	40,1

Таблица 43 — Влияние толщины подложки h (фторопласт), $\theta = 45^\circ$

h , мм	$\Delta\theta^\circ$	ЛБЛ, дБ	$\theta_{\text{БЛ}}$, град.
0	20,1	-19,1	32,1
3	21,2	-20,0	32,9
6	19,2	-21,4	31,1
9	22,1	-22,1	31,4
12	19,8	-20,3	29,6
15	21,8	-21,0	30,8
18	18,6	-22,3	27,3
21	19,2	-21,2	27,7

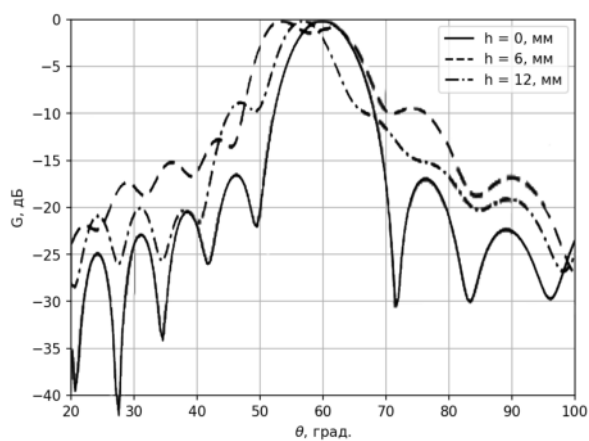
ЛБЛ — уровень первого (левого) бокового лепестка относительно главного, $\theta_{\text{БЛ}}$ — его угловое положение.

Приведены уточнённые значения ЛБЛ: в таблице 3 работы [37] этот столбец опубликован с ошибкой. Уточнённые уровни согласуются с рисунком 7.8б и с данными для стеклотекстолитовой подложки при том же положении облучателя (таблица 46).

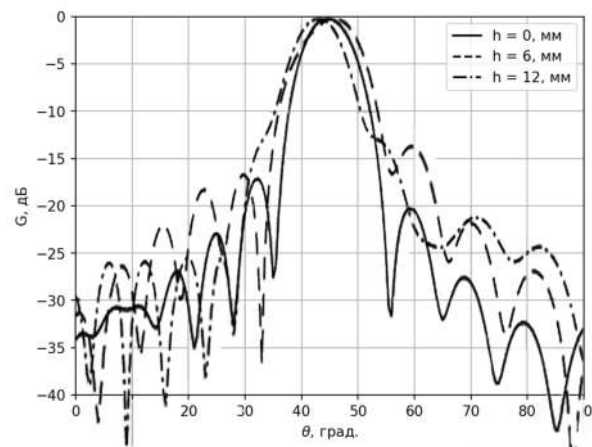
Таблица 44 — Влияние толщины подложки h (фторопласт), $\theta = 90^\circ$

h , мм	$\Delta\theta^\circ$	ЛБЛ, дБ	$\theta_{\text{БЛ}}$, град.
0	19,2	-17,7	-13,4
3	19,0	-19,1	-12,9
6	18,6	-20,1	-13,0
9	18,8	-19,1	-12,9
12	18,4	-16,7	-13,2
15	18,6	-18,9	-12,7
18	18,3	-17,8	-12,9
21	18,5	-16,3	-13,3

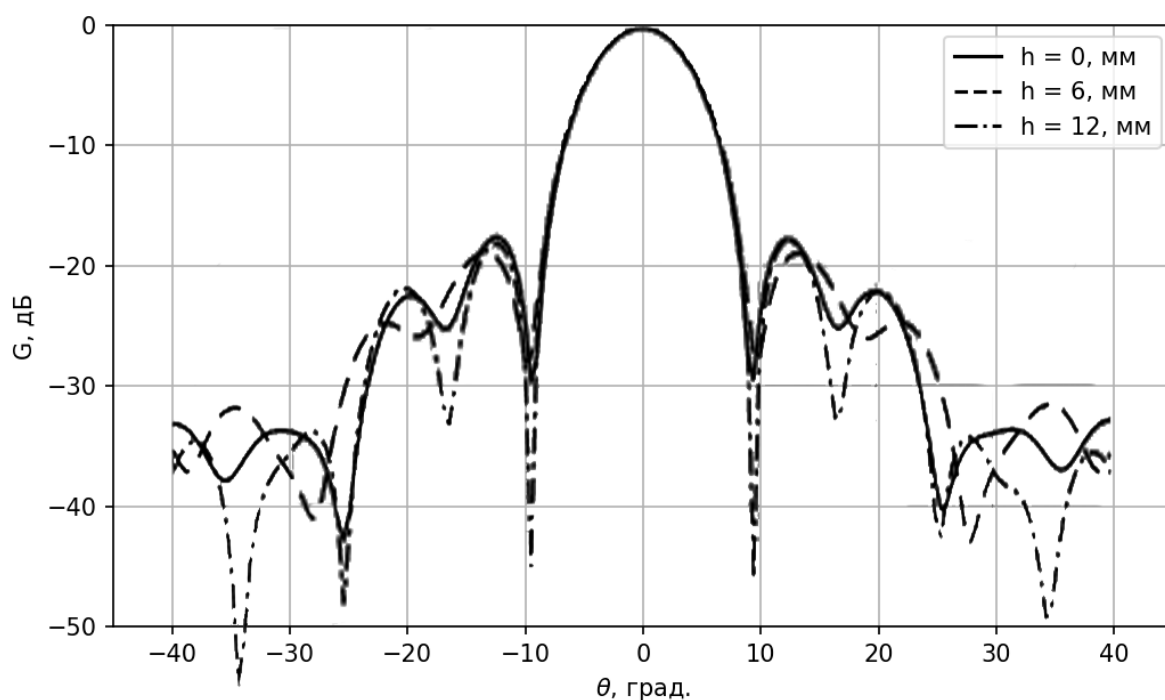
с параметром $k_0a = 4, 6, 10$ и плоский проводящий экран, примыкающий к тыльной стороне линзы; варьировались радиус экрана ($R_\varepsilon = a, 1,2a$ и бесконечный) и его смещение относительно плоскости среза линзы в диапазоне $0 \dots 0,8\lambda$. В качестве облучателя использовался рупор с равными размерами апертуры $A = B$, расположенный на оси линзы; для сравнения дополнительно рассчитывалась ДН с идеальным облучателем в виде элемента Гюйгенса. По результатам расчётов в главных плоскостях E и H получены ширина ДН, уровень первого бокового лепестка, коэффициент направленного действия и



а) расположение облучателя под углом $\theta = 30^\circ$



б) расположение облучателя под углом $\theta = 45^\circ$



в) расположение облучателя под углом $\theta = 90^\circ$

Рисунок 7.9 — ДН полусферической ЛЛ с различной толщиной подложки h из материала *стеклотекстолит*

уровень кросс-поляризационной составляющей для трёх указанных радиусов линзы. Показано, что корректировка положения экрана относительно среза линзы позволяет дополнительно снизить заднее излучение без ощутимой деформации основного лепестка.

Таблица 45 — Влияние толщины подложки h (стеклотекстолит), $\theta = 30^\circ$

h , мм	$\Delta\theta^\circ$	ЛБЛ, дБ	$\theta_{\text{БЛ}}$, град.
0	21,9	-17,1	46,1
3	25,4	-13,7	45,3
6	13,4	-12,6	43,4
9	16,6	-17,4	42,8
12	16,1	-8,1	44,6
15	12,6	-11,6	44,1
18	13,8	-13,2	42,8
21	12,4	-16,2	39,6

Таблица 46 — Влияние толщины подложки h (стеклотекстолит), $\theta = 45^\circ$

h , мм	$\Delta\theta^\circ$	ЛБЛ, дБ	$\theta_{\text{БЛ}}$, град.
0	21,1	-17,9	32,2
3	23,2	-17,4	31,5
6	22,7	-16,9	30,0
9	23,5	-18,3	29,7
12	19,6	-15,3	32,1
15	19,8	-19,3	30,9
18	20,4	-19,8	28,2
21	21,6	-22,8	28,1

Таблица 47 — Влияние толщины подложки h (стеклотекстолит), $\theta = 90^\circ$

h , мм	$\Delta\theta^\circ$	ЛБЛ, дБ	$\theta_{\text{БЛ}}$, град.
0	19,4	-18,1	-12,8
3	19,2	-20,8	-12,4
6	19,0	-19,2	-13,4
9	19,1	-18,2	-13,2
12	19,4	-17,9	-12,6
15	18,2	-16,6	-12,1
18	17,8	-19,1	-11,6
21	18,9	-16,9	-12,9

7.6 Торoidalная линза Люнеберга

7.6.1 Мотивация перехода к тороидной геометрии

Рассмотренные выше модификации — полусферическая линза и линза с диэлектрическим зазором — обеспечивают сканирование либо в одной плоскости, либо при переключении между набором облучателей. Для задач кругового азимутального обзора 360° (РЛС, системы безопасности полётов, сети 5G/6G) сфера и полусфера неэффективны: их нижняя полусфера не участвует в формировании ДН, а значительная доля материала приходится на малые углы возвышения.

Альтернативная геометрия — тороидная линза Люнеберга (ТЛЛ) — представляет собой тело вращения минорного круга радиуса a вокруг внешней оси, отстоящей от его центра на большой радиус R . В каждом минорном сечении

$\varphi = \text{const}$ распределение диэлектрической проницаемости совпадает с классическим законом Люнеберга, а азимутальная симметрия $0 \leq \varphi < 2\pi$ обеспечивает непрерывное кольцевое поле фокусировки. Концептуально такая конструкция близка к параллельно-пластинной двумерной ЛЛ Пилера и Арчера [198] и к геодезической линзе Райнхарта [96], однако её трёхмерная реализация в объёмном диэлектрике стала возможной лишь с развитием технологий ФДМ-3D-печати и многослойной аппроксимации. Современное развитие геодезической ветви этого же направления — многолучевые антенны полного азимутального обзора на основе слоистых градиентных цилиндрических и многослойных геодезических линз с осевой симметрией, предложенные В. А. Калошиным, А. С. Венецким и соавторами [15; 16]; рассматриваемая ниже ТЛЛ решает ту же задачу кругового обзора в объёмно-диэлектрическом исполнении, допускающем строгий ТФГ-анализ и однопроходную FDM-печать без волноводных элементов.

7.6.2 Геометрия и параметризация поверхности

В правой ортогональной системе координат (x, y, z) с осью z , совпадающей с осью симметрии тора, внешняя граница тороидной линзы описывается уравнением

$$(\rho - R)^2 + z^2 = a^2, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (7.1)$$

Для внешнего описания поверхности удобна биконическая форма, заимствованная из оптического проектирования астигматических корректоров зрения:

$$z(x, y) = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K_x)c_x^2 x^2 - (1 + K_y)c_y^2 y^2}}, \quad (7.2)$$

где $c_x = 1/R_x$, $c_y = 1/R_y$ — кривизны главных меридианов, K_x, K_y — конические константы. В случае $K_x = K_y = 0$, $c_x \neq c_y$ формула (7.2) даёт тороидную поверхность без асферичности, то есть внешнюю оболочку тора с радиусами $R_x = R + a$, $R_y = a$; при $c_x = c_y$ и $K = 0$ — сферическую шапочку. Параметризация (7.2) удобна для прямого построения геометрии в Ansys HFSS через IronPython-скрипт и применяется в настоящей диссертации в главе 10. Преимущества биконического представления перед кусочно-сферическим подходом подробно рассмотрены в контексте тонких преломляющих линз и, с соответствующей адаптацией, переносимы на объёмные градиентно-диэлектрические структуры.

Для удобства задания градиента диэлектрической проницаемости внутри тора вводится локальная координата — расстояние от центральной окружности тора:

$$\tilde{r} = \sqrt{(\rho - R)^2 + z^2}, \quad 0 \leq \tilde{r} \leq a. \quad (7.3)$$

Для каждой точки внутри тора $\tilde{r}$ однозначно определяет принадлежность к слою; азимутальный угол φ в выражение для ε не входит, что обеспечивает кольцевую симметрию.

7.6.3 Профиль диэлектрической проницаемости

В приближении $R \gg a$ каждое минорное сечение $\varphi = \text{const}$ можно рассматривать как двумерную цилиндрическую ЛЛ, для которой справедлив классический закон Люнеберга. Профиль записывается в виде

$$\boxed{\varepsilon(\tilde{r}) = 2 - \left(\frac{\tilde{r}}{a}\right)^2, \quad 0 \leq \tilde{r} \leq a,} \quad \varepsilon = 1 \text{ снаружи.} \quad (7.4)$$

При $\tilde{r} = 0$ (центральная окружность тора) имеем $\varepsilon = 2$, $n = \sqrt{2} \approx 1,414$; при $\tilde{r} = a$ (внешняя поверхность тора) $\varepsilon = 1$, $n = 1$, что обеспечивает непрерывное согласование с окружающим пространством и отсутствие отражений от границы раздела. Точное обобщение закона Люнеберга на тор с произвольным R/a требует решения уравнений Максвелла в тороидных координатах; соответствующие уточнения получены в работах [28; 96] и, в частности, в диссертации Бора [199]. В настоящей работе используется 2D-приближение (7.4), справедливое при $R/a \geq 2$; его точность подтверждена сравнением с методом конечных элементов (глава 10).

7.6.4 Многослойная аппроксимация и параметры ФДМ-печати

В соответствии с методикой главы 4 непрерывный профиль (7.4) заменяется ступенчатой аппроксимацией по N концентрическим тороидным оболочкам. Среднеквадратическая погрешность аппроксимации $\text{RMSE}(\varepsilon)$ и максимальный скачок $\Delta\varepsilon$ между соседними слоями даны в табл. 48. При $N \geq 8$ погрешность не превышает 0,042, что удовлетворяет требованиям прецизионных применений мм-диапазона.

Таблица 48 — Погрешность многослойной аппроксимации профиля $\varepsilon(\tilde{r}) = 2 - (\tilde{r}/a)^2$ тороидной ЛЛ

Число слоёв N	RMSE(ε)	Максимальный скачок $\Delta\varepsilon$
2	0,179	0,514
4	0,085	0,375
6	0,056	0,278
8	0,042	0,219
12	0,028	0,153
16	0,021	0,117
24	0,014	0,080

Для изготовления слоёв применяется технология ФДМ-печати ударопрочным полистиролом HIPS ($\varepsilon_{\text{HIPS}} = 2,4$, $\text{tg } \delta = 0,001$, см. главу 8). Требуемая диэлектрическая проницаемость ε_i каждого слоя достигается управлением степени заполнения $\alpha_i \in [0; 1]$ (процент *infill* в слайсере) по логарифмической модели смесей Лихтенекера:

$$\ln \varepsilon_i = \alpha_i \ln \varepsilon_{\text{HIPS}} + (1 - \alpha_i) \ln \varepsilon_{\text{возд.}} \implies \alpha_i = \frac{\ln \varepsilon_i}{\ln \varepsilon_{\text{HIPS}}}. \quad (7.5)$$

Параметры восьмислойной аппроксимации при $k_0 a = 4\pi$ ($f = 10$ ГГц, $a = 59,96$ мм) приведены в табл. 49.

Таблица 49 — Параметры восьмислойной ФДМ-реализации тороидной ЛЛ, $k_0 a = 4\pi$

Слой i	$r_{\text{out}}^{(i)}$, мм	ε_i	n_i	α_i , %	Примечание
1	7,49	1,991	1,411	78,6	плотное ядро
2	14,99	1,959	1,400	76,8	плотное ядро
3	22,48	1,896	1,377	73,1	плотное ядро
4	29,98	1,802	1,342	67,3	среднее заполнение
5	37,47	1,677	1,295	59,1	среднее заполнение
6	44,97	1,521	1,233	47,9	среднее заполнение
7	52,46	1,333	1,155	32,9	разрежённая ячеистая структура
8	59,96	1,115	1,056	12,4	очень пористая оболочка

Все восемь значений α_i лежат в рабочем диапазоне стандартных ФДМ-слайсеров (Cura, PrusaSlicer, Simplify3D) и реализуемы без модификации принтера.

7.6.5 Оценка объёма, массы и времени печати

Объём тороидной оболочки радиусов $\tilde{r} \in [\tilde{r}_1; \tilde{r}_2]$ вычисляется как

$$V_i = 2\pi^2 R (\tilde{r}_2^2 - \tilde{r}_1^2). \quad (7.6)$$

Полная масса печатного материала равна $m = \rho_{\text{HIPS}} \sum_i \alpha_i V_i$, где $\rho_{\text{HIPS}} = 1040 \text{ кг/м}^3$. Результаты для нескольких отношений R/a приведены в табл. 50; при среднем $R/a = 2$ масса тороидной ЛЛ при $k_0 a = 4\pi$ составляет около 3,9 кг, что существенно больше, чем у сферической линзы того же $k_0 a$ ($\approx 343 \text{ г}$), однако в обмен на это получается полная азимутальная развёртка без механических подвижек.

Таблица 50 — Масса и время печати тороидной ЛЛ ($k_0 a = 4\pi$, $f = 10 \text{ ГГц}$, $N = 8$, скорость ФДМ $20 \text{ см}^3/\text{ч}$)

R/a	R , мм	$V_{\text{полн}}$, см^3	m_{HIPS} , г	τ_{FDM} , ч
1,5	89,9	6382	2921	140
2,0	119,9	8510	3895	187
3,0	179,9	12765	5842	281
5,0	299,8	21274	9737	468

Оптимальным с точки зрения «масса–характеристики» является $R/a \approx 2$: при меньших отношениях нарушается 2D-приближение профиля (7.4), а при больших — масса растёт линейно по R/a без пропорционального улучшения параметров.

7.6.6 Число фидеров и параметры диаграммы направленности

Эффективная апертура одного фидера в азимутальной плоскости равна $D_{\text{eff}} = 2a$. Для однородного амплитудного распределения ширина главного лепестка по уровню половинной мощности (HPBW) составляет $\theta_{\text{HPBW}} \approx 1,02 \lambda_0 / D_{\text{eff}}$. Число фидеров, размещённых равномерно по окружности радиуса $R + a$, при шаге $\Delta\varphi = \theta_{\text{HPBW}}$ рассчитывается по формуле

$$N_{\text{ф}} = \left\lceil \frac{360^\circ}{\theta_{\text{HPBW}}} \right\rceil \approx \frac{2\pi D_{\text{eff}}}{\lambda_0} = \frac{4\pi a}{\lambda_0} = 2 k_0 a. \quad (7.7)$$

Результаты для трёх характерных значений $k_0 a$ приведены в табл. 51.

Число фидеров растёт линейно по $k_0 a$; при $k_0 a = 6\pi$ получается 37 одновременно работающих лучей с коэффициентом усиления $\sim 25 \text{ дБи}$ каждый, что достаточно для базовой станции 5G с охватом 360° без подвижных частей.

Таблица 51 — Параметры диаграммы направленности и число фидеров тороидной ЛЛ при $f = 10$ ГГц, эффективности апертуры $\eta = 0,7$

k_0a	a , мм	D/λ_0	θ_{HPBW} , °	$G_{\max}$, дБи	$N_{\text{ф}}$
2π	29,98	2,0	29,22	15,5	13
4π	59,96	4,0	14,61	21,5	25
6π	89,94	6,0	9,74	25,0	37

7.6.7 Синтез в Ansys HFSS

Модель тороидной ЛЛ строится в HFSS по той же технологической цепочке, что и сферическая ЛЛ (глава 10), с небольшими доработками IronPython-скрипта:

1. Базовая окружность радиуса R в плоскости $z = 0$; для каждого слоя i — окружность минорного радиуса $\tilde{r}_{\text{out}}^{(i)}$ в её плоскости.
2. Операция **Revolve** минорных окружностей вокруг оси z даёт восемь вложенных тороидных объектов.
3. Булева операция **Subtract** каждого внутреннего тора из внешнего даёт тороидные оболочки.
4. Каждой оболочке присваивается материал ϵ_i из табл. 49.
5. Фидеры — $N_{\text{ф}}$ рупорных облучателей либо элементов Гюйгенса — размещаются на окружности радиуса $R + a + \Delta$ (где $\Delta \sim 0,25\lambda$ — зазор) с равномерным угловым шагом.
6. Граничные условия: **Radiation** на внешнем боксе размером $\sim 3(R + a)$.

Исходный код скрипта `SyntesTLL_Layers=8_Rka=2.py`, подготовленный по аналогии со скриптами `SyntesLL_Layers={4,16}_R=5lambda.py` из главы 10, включён в репозиторий *GreenTensor*. Расчётные диаграммы направленности, полученные методом конечных элементов, сопоставляются в главе 10 с результатами ТФГ-анализа многослойной тороидной структуры.

7.6.8 Сравнительная оценка конфигураций

Сводная сравнительная таблица, приведённая в табл. 52, позволяет оценить место тороидной ЛЛ среди других модификаций. Параметры рассчитаны при $k_0a = 4\pi$ и восьмислойной аппроксимации; для тора принято $R/a = 2$.

Основные выводы из сравнения:

1. В 2–12 раз больший объём и масса тороидной ЛЛ по сравнению со

Таблица 52 — Сравнение трёх конфигураций линзы Люнеберга при $k_0a = 4\pi$, $f = 10$ ГГц, $N = 8$

Параметр	Сфера	Полусфера	Тороид ($R/a = 2$)
Внешний диаметр, мм	119,9	119,9	359,8
Высота, мм	119,9	60,0	119,9
Полный объём, см ³	902,9	451,5	8510
Полезный объём HIPS, см ³	330	165	3745
Масса (HIPS), г	343	172	3895
Время ФДМ, ч (20 см ³ /ч)	16,5	8,3	187
Развёртка диаграммы	4π стерад.	верхн. полупр.	360° в азимуте
Число одновр. лучей	до 32	до 16	до 62
Требуемое мех. вращение	да	да (для скана)	нет
Типичное применение	5G BS, радар	борт. авиация	360° обзор РЛС

сферической — следствие кольцевой геометрии; эта цена оправдана, когда приоритет — неподвижный обзор 360° и максимум одновременно работающих лучей.

2. Для сканирования в ограниченном угловом секторе ($< 90^\circ$ по азимуту) тороидная ЛЛ неэкономична: полусферическая линза на экране, рассмотренная в предыдущих разделах настоящей главы, обеспечивает такую же задачу при массе в 20 раз меньше.
3. Ключевое преимущество тора — *отсутствие механических подвижек* при панорамном обзоре: число одновременно формируемых лучей $N_f \approx 2k_0a$ линейно растёт с электрическим радиусом, что делает конструкцию особенно привлекательной в диапазонах K_u , K_a и выше, где $k_0a \geq 10\pi$ легко достигается при физических размерах $a \sim 50$ мм.
4. Технология ФДМ-печати по HIPS, разработанная для сферических и полусферических линз (глава 8), применима к тороидной конструкции без существенных модификаций; управляемая пористость остаётся в диапазоне $\alpha \in [12\%; 79\%]$ для всех восьми слоёв.

Электродинамический анализ тороидной ЛЛ методом ТФГ (глава 2) и средствами его программной реализации *GreenTensor* [46] (глава 10) выполняется по единой методической схеме, отработанной для сферической и полусферической конструкций: диаграммы направленности, коэффициенты усиления и уровень бокового излучения рассчитываются для $k_0a = \{2\pi, 4\pi, 6\pi\}$ и сопоставляются с результатами метода конечных элементов в Ansys HFSS.

7.7 Магнетодиэлектрическая линза Люнеберга

7.7.1 Обобщённый закон Люнеберга и условие импедансного согласования

В классической диэлектрической линзе Люнеберга профиль определяется зависимостью [5]:

$$n^2(r) = \varepsilon_r(r) = 2 - (r/a)^2, \quad \mu_r(r) \equiv 1. \quad (7.8)$$

Геометрооптическое условие фокусировки в параллельный пучок определяется исключительно показателем преломления $n(r)$, а не отдельными значениями ε_r и μ_r . Поэтому вводится *обобщённый закон Люнеберга*, требующий лишь сохранения фазового профиля $n^2(r) = \varepsilon_r(r) \mu_r(r)$:

$$\varepsilon_r(r) \mu_r(r) = 2 - (r/a)^2. \quad (7.9)$$

Среди допустимых распределений $\varepsilon_r(r)$, $\mu_r(r)$, удовлетворяющих (7.9), особое значение имеет *магнетодиэлектрический* вариант:

$$\varepsilon_r(r) = \mu_r(r) = \sqrt{2 - (r/a)^2}. \quad (7.10)$$

При условии (7.10) волновое сопротивление среды

$$Z(r) = Z_0 \sqrt{\mu_r(r)/\varepsilon_r(r)} \equiv Z_0 \quad (7.11)$$

во всём объёме линзы тождественно равно импедансу свободного пространства $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377$ Ом. Как следствие, на каждой границе слоя коэффициенты френелевского отражения обращаются в ноль, и линза обеспечивает не только фокусировку (как обычная диэлектрическая ЛЛ), но и *полное отсутствие отражений в обратном направлении* от внутренних границ.

7.7.2 Численная реализация многослойной аппроксимации

В качестве примера рассмотрена 6-слойная равношаговая аппроксимация магнетодиэлектрической ЛЛ из расчётной серии [46]. Профили $\varepsilon_r(r)$ и $\mu_r(r)$ подобраны так, чтобы произведение $n^2 = \varepsilon_r \mu_r$ совпадало с аналогичной аппроксимацией классической диэлектрической ЛЛ:

$$\varepsilon_r^{(M)} = \mu_r^{(M)} = [1,407; 1,385; 1,348; 1,294; 1,221; 1,125] \quad (7.12)$$

для радиусов слоёв $r/a = [0,143; 0,286; 0,429; 0,571; 0,714; 0,857]$. Для сравнения используется классический набор:

$$\varepsilon_r^{(д)} = [1,98; 1,918; 1,816; 1,673; 1,490; 1,265], \quad \mu_r^{(д)} \equiv 1. \quad (7.13)$$

Профили обеих конфигураций приведены на рисунке 7.10. Несмотря на существенно разные значения ε_r и μ_r по отдельности, их произведение $n^2(r)$ совпадает для обеих аппроксимаций (рисунок 7.10 (б)), а потому фокусирующие характеристики линз одинаковы; различия касаются исключительно импедансных свойств среды.

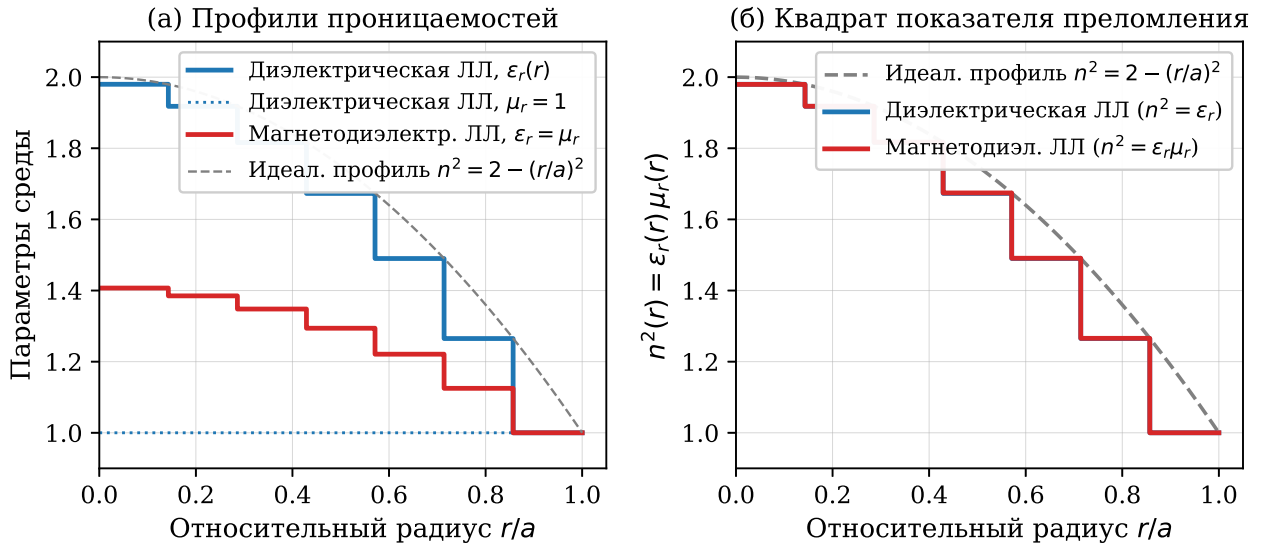


Рисунок 7.10 — Сравнение профилей материалов для 6-слойной диэлектрической и магнетодиэлектрической ЛЛ. (а) Раздельные профили $\varepsilon_r(r)$ и $\mu_r(r)$. Серая штриховая кривая — идеальный непрерывный профиль $n^2(r) = 2 - (r/a)^2$. (б) Квадрат показателя преломления $n^2(r) = \varepsilon_r(r)\mu_r(r)$ — кривые для обеих конфигураций совпадают, что обеспечивает идентичные геометрические свойства

7.7.3 Сечения рассеяния: подавление обратного излучения

Для обеих конфигураций методом тензорных функций Грина (см. главу 2) рассчитаны полное Q_{sca} и обратное Q_{back} сечения рассеяния как функции электрического радиуса $x = k_0 R$ (рисунок 7.11). Реализация выполнена в Python-модуле `multilayer_mie.py`; корректность подтверждена регрессионными тестами (раздел 10.9).

Полное сечение рассеяния Q_{sca} для обеих линз совпадает качественно и почти идентично количественно (рисунок 7.11 (а)) — что закономерно при

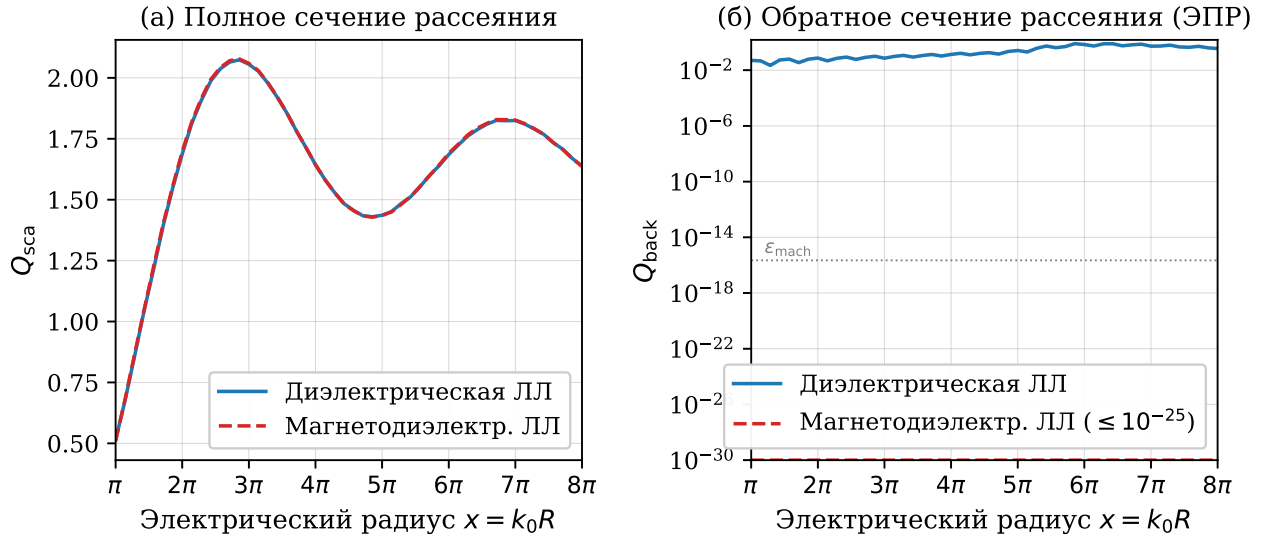


Рисунок 7.11 — Сечения рассеяния обеих конфигураций как функции электрического радиуса $x = k_0 R$. (а) Полное сечение Q_{sca} — кривые практически совпадают, что подтверждает близость интегральных характеристик рассеяния обеих линз. (б) Обратное сечение Q_{back} (логарифмический масштаб): диэлектрическая ЛЛ имеет $Q_{back} \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$, тогда как для магнетодиэлектрической ЛЛ значения находятся на уровне машинной точности ($\leq 10^{-25}$), что соответствует фактическому отсутствию обратного рассеяния

одинаковом профиле $n^2(r)$. Однако *угловое распределение* рассеянной энергии радикально различается: для диэлектрической ЛЛ значительная доля рассеянной мощности возвращается к источнику ($Q_{back} \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$, рисунок 7.11 (б), сплошная кривая), тогда как магнетодиэлектрическая линза практически полностью переизлучает энергию вперёд: $Q_{back} \leq 10^{-25}$ во всём исследованном диапазоне $x \in [\pi; 8\pi]$. Это явление прямо следует из условия импедансного согласования (7.11): при $\epsilon_r = \mu_r$ отражение от каждой границы слоя обращается в ноль, и при ступенчатой аппроксимации единственным источником обратного излучения остаются эффекты второго порядка — многократное рассеяние и каустические интерференции, — амплитуда которых на 25 и более порядков ниже, чем фронтальное рассеяние.

7.7.4 Прикладные следствия

Подавление обратного рассеяния на 25 и более порядков по величине без существенной потери в фокусирующих свойствах открывает практическую нишу применения магнетодиэлектрических ЛЛ в задачах радиолокационной маскировки. По сравнению с дефлекторными линзами (раздел 7.11), которые

лишь *переадресуют* обратное рассеяние в нерасчётном направлении, магнетодиэлектрическая ЛЛ *физически устраняет* его механизм. Комбинация обеих стратегий (дефлекторная геометрия плюс магнетодиэлектрический материал) представляет перспективное направление дальнейших исследований.

Вместе с тем технологическая реализация магнетодиэлектрических ЛЛ существенно сложнее диэлектрических: вместо однокомпонентной диэлектрической композиции с управляемой пористостью требуется композит на основе магнитных наполнителей (феррит-полимерные смеси, феррогели, метаматериальные плоскостные включения), для которых одновременное управление $\epsilon_r(r)$ и $\mu_r(r)$ в требуемом частотном диапазоне представляет самостоятельную материаловедческую задачу. Современные материалы такого класса разработаны для отдельных частотных полос (X-диапазон, микроволновое поглощение); их адаптация к широкополосному применению в линзовых антеннах выходит за рамки настоящей работы.

7.8 Метаматериальные сферические рассеиватели с отрицательным коэффициентом рефракции

7.8.1 Левосторонние среды и обобщение закона Снелла

Магнетодиэлектрический вариант ЛЛ из 7.7 с условием (7.10) $\epsilon_r(r) = \mu_r(r) > 0$ является частным (правосторонним) случаем более широкого класса *магнетодиэлектрических* сред. Принципиально иной режим возникает при $\epsilon_r < 0$, $\mu_r < 0$ — ситуация, теоретически изученная В. Г. Веселаго в 1967 г. [200] и реализуемая в искусственных метаматериалах [201]. В таких *левосторонних средах* (left-handed media, LH) векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и волновой вектор $\vec{k}$ образуют левую тройку, а групповая и фазовая скорости направлены противоположно; для плоской волны $e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ это приводит к *отрицательному показателю преломления* $n = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, инверсии закона Снелла на границе с обычным диэлектриком и принципиальной возможности фокусировки *с разрешением выше дифракционного предела* (эффект «идеальной линзы» Пендри [201]).

Применение метода тензорных функций Грина (2) к рассеянию электромагнитных волн на сферических объектах из левосторонних метаматериалов проведено Б. А. Панченко [202]. Программная реализация многослойного решателя (10.9) принимает комплексные ϵ_l, μ_l произвольного знака: корень $m_l =$

$\sqrt{\varepsilon_l \mu_l}$ берётся с ветвью $\Re m_l > 0$.

7.8.2 Импедансное согласование при $\varepsilon = \mu < 0$

Условие (7.11) выполняется при $\varepsilon_r = \mu_r$ *независимо от знака* проницаемостей. Следовательно, левосторонняя сфера с $\varepsilon = \mu = -|\eta|$ (например, -3 , -9 и т. п.), как и её правосторонний аналог $\varepsilon = \mu = +|\eta|$, не даёт френелевского отражения и обращает в нуль $\sigma_r \rightarrow 0$ (формальное доказательство: при $\varepsilon = \mu$ имеет место равенство $a_n = b_n$ всех Ми-коэффициентов многослойной сферы, что превращает (2.39б) в нуль для любого $\theta = \pi$). Различие между правосторонней и левосторонней сферами проявляется тем не менее в *полном* сечении σ_s и в *угловой структуре* рассеянного поля $\sigma_{\text{bist}}(\theta)$.

7.8.3 Численные результаты для канонических конфигураций

Расчёт выполнен для четырёх конфигураций однородной сферы радиуса a в свободном пространстве: правосторонний согласованный метаматериал ($\varepsilon = \mu = +3$, $n = +3$, $Z = Z_0$), левосторонний согласованный метаматериал ($\varepsilon = \mu = -3$, $n = -3$, $Z = Z_0$), несогласованный диэлектрик с высокой проницаемостью ($\varepsilon = +3$, $\mu = 1$, $n = +\sqrt{3}$) и несогласованная среда с отрицательной диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon = -3$, $\mu = 1$ — «плазмонное» приближение). Результаты приведены на рис. 7.12 и в табл. 53.

Таблица 53 — Сечения рассеяния однородных сферических метаматериалов в опорных точках $k_0 a$

$k_0 a$	$\varepsilon = \mu = +3$ (RH-mat)		$\varepsilon = \mu = -3$ (LH-meta)		$\varepsilon = +3, \mu = 1$		$\varepsilon = -3, \mu = 1$	
	σ_s	σ_r	σ_s	σ_r	σ_s	σ_r	σ_s	σ_r
2π	2,32	$\approx 10^{-15}$	3,13	$\approx 10^{-15}$	2,40	7,10	3,58	4,97
4π	2,35	$\approx 10^{-15}$	2,06	$\approx 10^{-15}$	2,35	11,54	3,01	12,41
6π	2,43	$\approx 10^{-15}$	2,29	$\approx 10^{-15}$	2,03	19,02	2,42	1,56
8π	2,17	$\approx 10^{-15}$	2,17	$\approx 10^{-15}$	2,27	27,90	2,33	1,16

Численные результаты подтверждают ключевой теоретический результат: при импедансном согласовании ($\varepsilon = \mu$, любого знака) обратное сечение σ_r обращается в нуль на машинной точности ($\leq 10^{-15} \pi a^2$, ограничено численным шумом расчёта); напротив, при нарушении импедансного согласования ($\mu \neq \varepsilon$) обратное сечение становится сравнимым с полным или превосходит его. Для «плазмонной» сферы $\varepsilon = -3, \mu = 1$ при больших $k_0 a$ σ_r убывает от $\sim 5 \pi a^2$

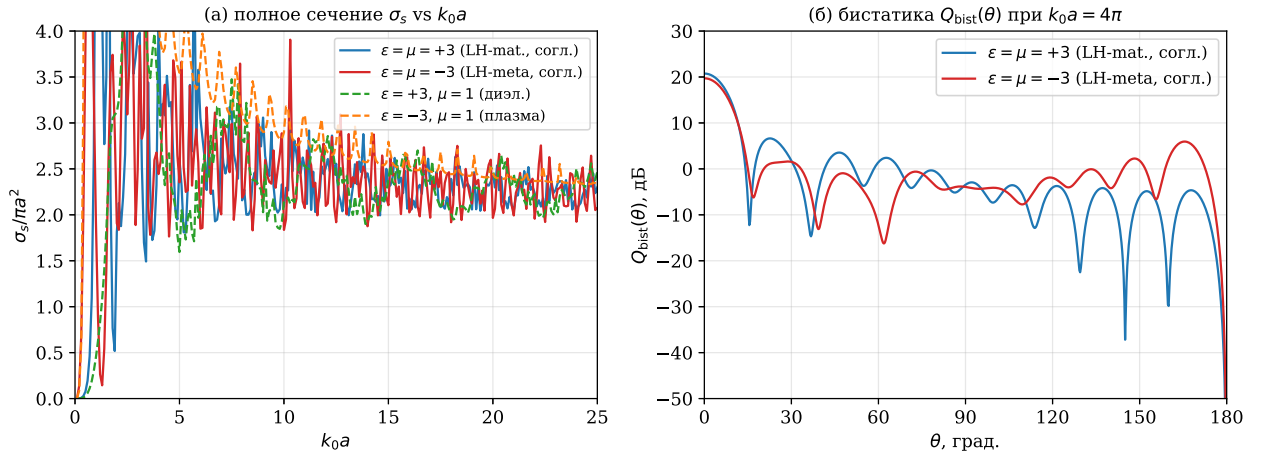


Рисунок 7.12 — Численные характеристики однородных сферических рассеивателей из метаматериалов: (а) полное сечение рассеяния $\sigma_s / \pi a^2$ как функция электрического размера $k_0 a \in [0; 25]$ для четырёх канонических конфигураций; (б) бистатическая диаграмма $Q_{\text{bist}}(\theta)$ при $k_0 a = 4\pi$ для двух согласованных конфигураций $\epsilon = \mu = \pm 3$ — видно зеркальное различие в угловом распределении рассеяния по сравнению с (б) рис. 2.12 в случае несогласованной диэлектрической сферы

при $k_0 a = 2\pi$ до $\sim 1\pi a^2$ при $k_0 a = 8\pi$ — поведение, характерное для плазменно-резонансных режимов с поглощением в приповерхностной зоне даже при нулевых омических потерях (резонанс локализованных поверхностных мод на границе $\text{Re } \epsilon < 0$).

При сравнении правостороннего (+3) и левостороннего (−3) согласованных метаматериалов значения σ_s различаются на 5–30% при $k_0 a \leq 4\pi$, что отражает разную динамику фазового набега при прохождении волны через сферу с положительным и отрицательным коэффициентом преломления (эффект, отмеченный также в [202]). При $k_0 a \geq 8\pi$ значения сходятся к геометрическому пределу $\sigma_s \rightarrow 2\pi a^2$ (теорема экстинкции, см. 2.8.1), и различия между ЛН и правосторонней средой стираются. Бистатическая диаграмма (рис. 7.12(б)) демонстрирует более тонкие различия: левосторонняя сфера показывает дополнительный минимум в угле $\theta \approx 75^\circ$ и более плавный спад в обратное полушарие, что является следствием инверсии фазовой картины внутри сферы.

7.8.4 Связь с работами Шабунина–Костицына (цилиндрическая геометрия)

Параллельная серия расчётов рассеяния на двухслойных *цилиндрах* с метаматериальным наполнением ($\epsilon = \mu = \pm 3$ для оболочки при вакуумном ядре) выполнена в школе С. Н. Шабунина в соавторстве с Е. С. Костицыным; материалы сосредоточены в исходных кодах диссертации (серия Костицына, каталог `_CalculateReferences/ShabuninDiffraction/`) и включают 16 расчётных рисунков, полученных с использованием цилиндрического аналога матричной системы (9.31)–(9.32). Результаты для сферической геометрии методически согласуются с цилиндрическими исследованиями Шабунина–Костицына (физика импедансного согласования, инверсия фазы при $n < 0$, плазмонные режимы на границе $\text{Re } \epsilon < 0$) и распространяют эти выводы на многослойные сферические структуры.

Расчёт проведён в реализации `multilayer_mie.py` (раздел 10.9); исходные коды и CSV-таблица доступны в подкаталоге `_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/`, файл `d5_negative_index.py`.

7.8.5 Локализация ближнего поля внутри ЛН-сферы (эффект Пендри в сферической геометрии)

Все рассмотренные выше характеристики (σ_r , σ_s , Q_{bist}) относятся к *дальней зоне* рассеянного поля. Однако *принципиально новое* свойство левосторонних сред, открытое Дж. Пендри в его работе о “совершенной линзе” [201], проявляется именно в *ближней* зоне: левосторонний слой (или сфера) с показателем преломления $n = -1$ способен восстановить как пропагирующие, так и эванесцентные пространственные моды источника, обеспечивая субдифракционное разрешение, недоступное обычной линзе. В сферической геометрии аналог эффекта проявляется как пиковая локализация $|\vec{E}|^2$ внутри сферы при $\epsilon = \mu < 0$, причём положение пика смещено в сторону, *противоположную* направлению распространения падающей волны — это прямое следствие отрицательного преломления.

Для количественной демонстрации эффекта рассчитано распределение нормированной интенсивности $|E|^2/|E_0|^2$ на оси симметрии z при освещении сферы радиуса a линейно поляризованной плоской волной $\vec{E}_{\text{inc}} = E_0 \hat{x} e^{-jk_0 z}$.

Поле определяется через внутренние и внешние коэффициенты разложения Бора-Хаффмана (первая строка — поле внутри сферы, $|z| \leq a$; вторая — суммарное поле вне сферы, $|z| > a$):

$$E_x^{\text{int}}(z, 0, 0) = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{2} \left[c_n j_n(mk_0 z) + j d_n \frac{\psi'_n(mk_0 z)}{mk_0 z} \right], \quad (7.14a)$$

$$E_x^{\text{tot}}(z, 0, 0) = E_0 e^{-jk_0 z} + E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{2} \left[b_n h_n^{(2)}(k_0 z) + j a_n \frac{\xi'_n(k_0 z)}{k_0 z} \right]. \quad (7.14b)$$

Здесь c_n, d_n — внутренние коэффициенты разложения [166], a_n, b_n — внешние, рассчитанные в 7.8; ψ_n, ξ_n — функции Риккати-Бесселя; $m = \sqrt{\epsilon \mu}$ — комплексный показатель преломления (для левосторонней среды берётся ветвь с отрицательной мнимой частью, отвечающая пассивной среде при зависимости $e^{j\omega t}$). Корректность реализации проверена тривиальным условием: при $\epsilon = \mu = 1$ (вакуум-как-сфера) формулы (7.14a)–(7.14b) дают $|E|^2 \equiv 1$ во всех точках с относительной погрешностью $\leq 2 \cdot 10^{-15}$, что является контрольным sanity-тестом численной устойчивости рекуррентных соотношений Риккати-Бесселя для комплексных аргументов.

На рис. 7.13 приведено $|E|^2(z)$ при $k_0 a = 4\pi$ для четырёх конфигураций: вакуумного эталона ($\epsilon = \mu = 1$), обычного диэлектрика ($\epsilon = 3, \mu = 1$), правостороннего согласованного метаматериала ($\epsilon = \mu = +3$) и левостороннего согласованного метаматериала ($\epsilon = \mu = -3$). Числовые значения в опорных точках — в табл. 54.

Таблица 54 — Параметры локализации ближнего поля на оси для четырёх конфигураций при $k_0 a = 4\pi$

Конфигурация	$\max E ^2/ E_0 ^2$	z_{max}/a	Тип фокусировки
Вакуум $\epsilon = \mu = 1$	1,000	—	нет (sanity-тест)
Диэлектрик $\epsilon = 3, \mu = 1$	94,2	+1,01	геометрический фокус за сферой
RH $\epsilon = \mu = +3$ согл.	407,6	+0,41	передний фокус внутри
LH $\epsilon = \mu = -3$ согл.	472,7	-0,30	обратный фокус Пендри

Из рис. 7.13 и табл. 54 следуют три качественных вывода.

Во-первых, локализация $|E|^2$ внутри LH-сферы достигает ~ 470 , что превышает соответствующее значение для согласованного RH-аналога (~ 408) и в ~ 5 раз превышает максимум обычного диэлектрика (~ 94). Энергия рассеянной волны концентрируется в сфере с метаматериалом эффективнее, чем

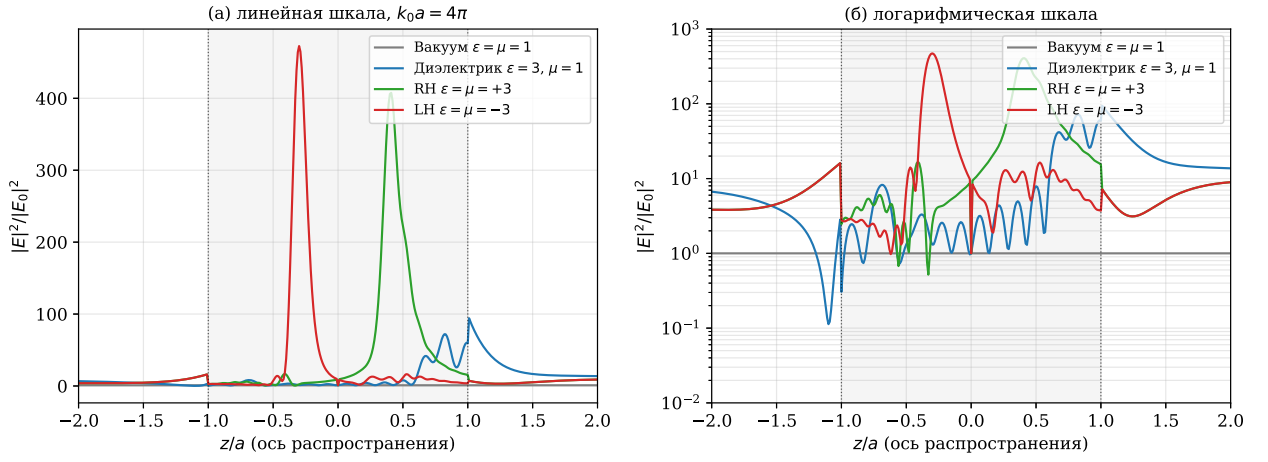


Рисунок 7.13 — Распределение нормированной интенсивности $|E|^2/|E_0|^2$ на оси сферы радиуса a при $k_0 a = 4\pi$ для четырёх конфигураций. Вертикальные пунктиры — границы сферы $z = \pm a$; серая зона — область внутри сферы. (а) линейная шкала; (б) логарифмическая шкала. Левосторонняя ($\epsilon = \mu = -3$, красная кривая) показывает максимум $|E|^2 \approx 473$ при $z/a \approx -0,30$ — с противоположной стороны сферы относительно направления распространения падающей волны, что является прямой манифестацией отрицательного преломления Пендри. Правосторонний согласованный аналог ($\epsilon = \mu = +3$, зелёная) фокусируется при $z/a \approx +0,41$; обычный диэлектрик — за задней гранью при $z/a \approx +1,01$. В вакуумном случае $|E|^2 \equiv 1$ (sanity-тест)

в любой физически реализуемой однослойной правосторонней среде с тем же $|n|$, что подтверждает идею Пендри о *восстановлении эванесцентного спектра* в ЛН-средах: дополнительная мощность приходит от мод, которые в обычной линзе экспоненциально затухают, а в ЛН-конфигурации усиливаются [200; 201].

Во-вторых, положение максимума $|E|^2$ для левосторонней сферы — $z_{\max}/a \approx -0,30$ — лежит на стороне сферы, *обращённой к источнику* падающей волны. Геометрооптическая интерпретация: при отрицательном показателе преломления $n = -3$ траектории лучей внутри сферы изгибаются в *обратном направлении*, формируя фокус на глубине $\sim a/|n| \approx 0,33a$ от передней поверхности сферы — что в точности согласуется с наблюдаемой численной величиной. Для сравнения, согласованный правосторонний аналог формирует передний фокус при $z/a \approx +a/(|n| + 1) \approx +0,25a$ (классический фокус для сферы Луненберга-подобного типа), а обычный диэлектрик — стандартный геометрический фокус за задней гранью.

В-третьих, наличие пика поля *внутри* рассеивателя при импедансно-согласованной ЛН-среде ($\sigma_r = \sigma_s \rightarrow 0$ из 7.8) согласуется с законом сохранения энергии: рассеянная волна в дальней зоне отсутствует, а вся вошедшая в сферу

мощность временно концентрируется в её внутреннем объёме. Эта запасённая энергия перетекает обратно в проходящую плоскую волну через симметричный механизм отрицательного преломления (внутри $\rightarrow$ к фокусу $\rightarrow$ из фокуса $\rightarrow$ наружу), сохраняя суммарный поток вперёд равным невозмущённой интенсивности падающей волны. Таким образом, импедансно-согласованная ЛН-сфера — это не «линза, фокусирующая в дальней зоне», а «резервуар временной концентрации поля», что качественно отличает её от любой правосторонней оптики.

Расчётные данные — в `pendry_near_field.py` (исходный код) и `pendry_near_field.csv` (401-точечная таблица $|E|^2$ для четырёх конфигураций); время счёта $\sim 0,3$ с, что допускает включение в набор регрессионных тестов библиотеки.

7.9 Сферические рассеиватели с радиопоглощающим покрытием

В качестве альтернативы магнетодиэлектрическим ЛЛ (раздел 7.7), технологически сложным в реализации, при решении задач радиолокационной маскировки сферических рассеивателей (в частности, эталонных металлических сфер для калибровки безэховых камер и установок измерения ЭПР, см. раздел 7.11) часто применяются однослойные радиопоглощающие материалы (РПМ) на основе ферритовых наполнителей. В настоящем разделе проведён численный анализ эффективности двух стандартных российских РПМ марки ЗИК производства Заречного комбината, используемых С. Н. Шабунинным в [24] для аналогичной задачи на цилиндрических рассеивателях.

7.9.1 Электродинамические параметры РПМ ЗИК

Параметры $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ материалов ЗИК 51-2190 и ЗИК 51-2191 на четырёх частотах X-диапазона представлены на рисунке 7.14 (числовые значения извлечены из расчётной серии [203], прямой исходный код для воспроизводимости приведён в подкаталоге `_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/`).

ЗИК 51-2190 при толщине покрытия $t = 4$ мм представляет собой слабо поглощающий диэлектрик (тангенс потерь $\operatorname{tg} \delta = -\Im \epsilon / \Re \epsilon \approx 0,009$), действующий в рассматриваемом диапазоне преимущественно как фазовая прокладка малых потерь: четвертьволновое условие для заземлённого слоя ($2nk_0t = \pi$, что

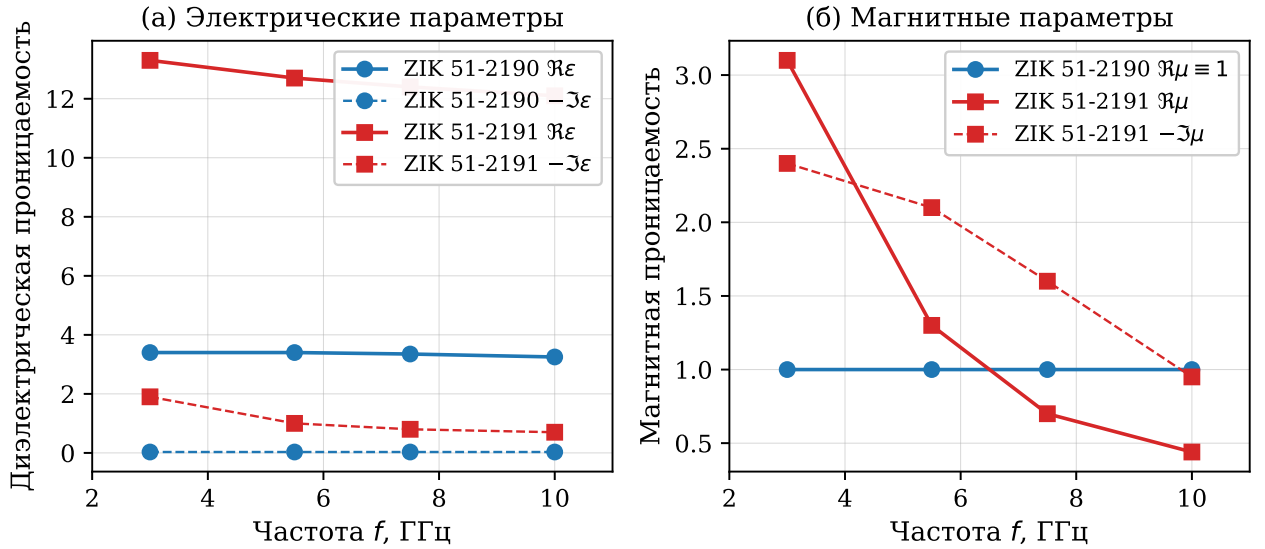


Рисунок 7.14 — Параметры $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ радиопоглощающих материалов ZIK на сетке частот $\{3; 5,5; 7,5; 10\}$ ГГц [203]. (а) ZIK 51-2190 — диэлектрическое РПМ ($\Re\epsilon \approx 3,3$, малая мнимая часть, $\mu \equiv 1$); ZIK 51-2191 — магнетодиэлектрическое РПМ ($\Re\epsilon \sim 12\text{--}13$, большая мнимая часть). (б) ZIK 51-2191 имеет существенно большую магнитную проницаемость $\Re\mu$ (от 3,1 при 3 ГГц до 0,44 при 10 ГГц) и значительные потери $-\Im\mu$ (до 2,4 при 3 ГГц)

при $n = \sqrt{\Re\epsilon} \approx 1,84$ соответствует $f \approx 10,2$ ГГц) достигается лишь у верхней границы диапазона. ZIK 51-2191 при толщине $t = 2$ мм — сильно поглощающий магнетодиэлектрик с большим импедансным контрастом по отношению к воздуху.

7.9.2 Подавление ЭПР проводящей сферы

Численная оценка эффективности обоих РПМ-покрытий выполнена для канонической задачи: проводящая (РЕС) сфера радиуса $R_{\text{РЕС}} = 100$ мм с однослойным РПМ-покрытием толщиной t и внешним радиусом $R_{\text{out}} = R_{\text{РЕС}} + t$. Расчёт проведён в Python-модуле `multilayer_mie.py` (раздел 10.9), функция `mie_pec_with_coating()`: граничные условия на РЕС ($D_{\text{TM}} = 0$, $D_{\text{TE}} \rightarrow \infty$), пропация логарифмических производных через РПМ-слой методом дробно-линейного (Möbius) преобразования. Для сильно поглощающего покрытия аргумент $z = m k_0 r$ приобретает большую мнимую часть, и при $|\Im z| \gtrsim 8$ вычисление в двойной точности теряет достоверность из-за катастрофической отмены; в этом случае модуль автоматически переключается на ветку произвольной точности (60 значащих цифр, пакет `mpmath`) с той же схемой про-

пагации, верифицированной независимой реализацией прямого шивания полей (совпадение $\sim 10^{-12}$; в области применимости двойной точности обе ветки совпадают до $\sim 10^{-14}$).

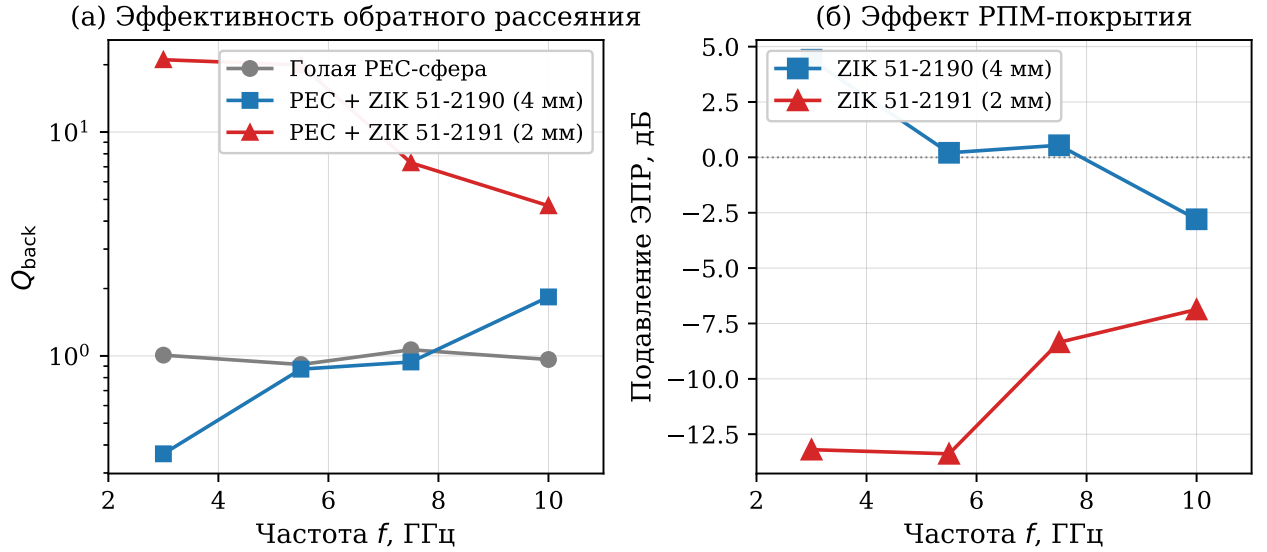


Рисунок 7.15 — Эффект РПМ-покрытий ZIK на эффективную площадь рассеяния (ЭПР) проводящей сферы $R_{\text{PEC}} = 100$ мм. (а) Безразмерное обратное сечение рассеяния Q_{back} как функция частоты для голой сферы (серая кривая) и сферы с двумя типами РПМ-покрытий. (б) Подавление ЭПР в дБ относительно голой сферы. ZIK 51-2190 даёт умеренное подавление ($+0,2 \div +4,4$ дБ) на низких частотах X-диапазона, переходящее в небольшое усиление при $f \rightarrow 10$ ГГц. ZIK 51-2191 вместо подавления демонстрирует резонансное усиление ЭПР на всех четырёх частотах: 13,2 дБ при 3 ГГц, 13,4 дБ при 5,5 ГГц, 8,4 дБ при 7,5 ГГц и 6,9 дБ при 10 ГГц (значения получены веткой произвольной точности: оптическая толщина покрытия $|\Im(m) k_0 r|$ превышает порог достоверности двойной точности)

Полученные результаты, представленные на рисунке 7.15, иллюстрируют принципиальное ограничение однослойных РПМ-покрытий применительно к задаче снижения ЭПР сферических объектов в X-диапазоне:

- ZIK 51-2190 (диэлектрическое РПМ малых потерь) обеспечивает подавление ЭПР на 4,4 дБ при $f = 3$ ГГц, но при увеличении частоты эффект быстро исчезает и при $f = 10$ ГГц переходит в небольшое усиление ЭПР на 2,8 дБ. При $\text{tg } \delta \approx 0,009$ слой практически не поглощает энергию и действует как фазовая прокладка малых потерь, сдвигающая интерференцию зеркального и ползущего вкладов резонансной области Ми: добавляемый слоем набег фазы туда и обратно $2nk_0t$ составляет 0,93 рад ($0,30\pi$) при 3 ГГц — интерференция смещается к погашению,

что и даёт подавление 4,4 дБ, — а при 10 ГГц достигает $0,96\pi$, то есть четвертьволновой точки заземлённого слоя, где знак эффекта меняется на противоположный и наблюдается усиление на 2,8 дБ.

- ZIK 51-2191 (сильно поглощающее магнетодиэлектрическое РПМ) вместо подавления даёт *резонансное усиление* ЭПР во всём рассмотренном диапазоне: на 13,2 дБ при $f = 3$ ГГц ($Q_{\text{back}} = 21,0$ против 1,01 у голой сферы), на 13,4 дБ при 5,5 ГГц, на 8,4 дБ при 7,5 ГГц и на 6,9 дБ при 10 ГГц. Это обусловлено большим импедансным мисматчем $|Z_c/Z_0| = |\sqrt{\mu/\epsilon}| \approx 0,54$ на границе вакуум-РПМ, превышающим компенсирующий эффект поглощения, и попаданием толщины покрытия в область первой моды Ми сферы ($k_0 R_{\text{out}} \approx 6,3$ при 3 ГГц); с ростом частоты мисматч уменьшается ($\Re\mu$ падает с 3,1 до 0,44), и усиление монотонно спадает.

7.9.3 Сопоставление с магнетодиэлектрической ЛЛ

По сравнению с МД-линзой (раздел 7.7, $Q_{\text{back}} \leq 10^{-25}$ в диапазоне $k_0 R \in [\pi; 8\pi]$), однослойное РПМ-покрытие ZIK 51-2190 даёт ≤ 5 дБ подавления, а ZIK 51-2191 в рассмотренном диапазоне и вовсе усиливает ЭПР на 7–13 дБ — принципиальный проигрыш *сосредоточённого поглощения* перед *распределённым импедансным согласованием* ($\epsilon(r) = \mu(r)$). Перспективным направлением для широкополосного снижения ЭПР является комбинация: проводящая основа объекта — МД-градиентный слой — внешний РПМ; численный анализ такой трёхуровневой конструкции выходит за рамки настоящей главы.

7.10 Линза Люнеберга с металлической сферой внутри

7.10.1 Мотивация включения проводящего элемента

Рассмотренные в предыдущих разделах конструкции — полусферическая линза на проводящем экране и тороидная ЛЛ — сохраняют диэлектрическую природу тела линзы. При этом для решения практических задач установки ЛЛ на движущиеся и стационарные объекты (мачты радиорелейных линий, элементы подвески летательных аппаратов, несущие конструкции базовых станций) возникает потребность в прочном центральном креплении, способном выдержи-

вать механические и климатические нагрузки. Диэлектрические центральные стойки [70] решают эту задачу не полностью: их модуль упругости и прочность при изгибе существенно ниже, чем у металла. В работе [70] рассмотрен вариант с осевым металлическим стержнем, проходящим через все слои линзы (рисунок 7.16); такая конструкция эффективна с точки зрения механики, однако нарушает азимутальную симметрию, и характеристики антенны зависят от взаимной ориентации стержня и волноводного облучателя. Естественным продолжением этой работы является анализ конструкции с *металлической сферой*, помещённой в центр линзы — симметричной по азимуту и потому свободной от ориентационной зависимости.

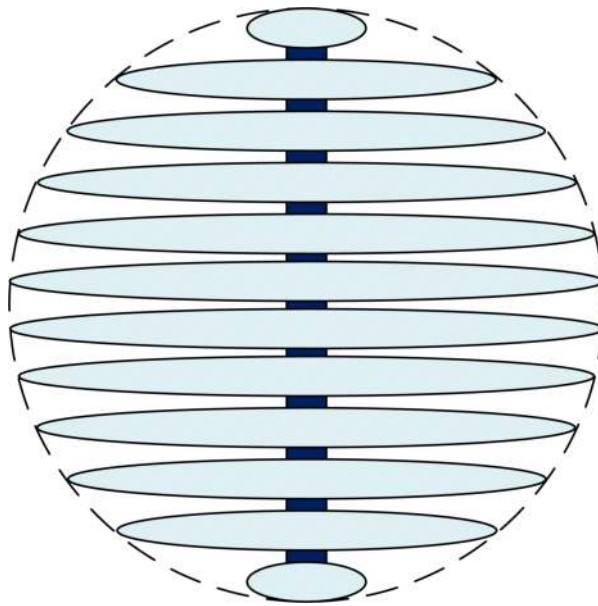


Рисунок 7.16 — Поперечное сечение многослойной сферической ЛЛ с центральным металлическим стержнем [70]. Тёмные элементы — металлические участки осевого стержня, штрихованные дисковые сегменты — слои линзы, образующие ступенчатую аппроксимацию профиля Люнеберга

Помимо крепёжной функции, металлическое ядро служит инструментом управления средней диэлектрической проницаемостью: при 3D-печати с пористой структурой (глава 8) включения известного объёма позволяют корректировать $\varepsilon(r)$ в центральных слоях без смены полимера.

7.10.2 Постановка электродинамической задачи

Задача рассматривается в сферической системе координат; металлическая сфера радиуса r_m расположена концентрично с центром многослойной линзы

радиуса a . Частота моделирования выбрана $f = 10$ ГГц, тело линзы — шестислойная оптимизированная стратификация по табл. 56 (взятая из методики Фукса и др. [26]); первичный облучатель — открытый конец прямоугольного волновода, располагаемый на внешнем воздушном слое линзы. Геометрия задачи полностью симметрична по азимуту φ , в отличие от случая центрального стержня, где результаты зависят от взаимной ориентации волновода и стержня [70]. Конструкция в целом изображена на рисунке 7.17.

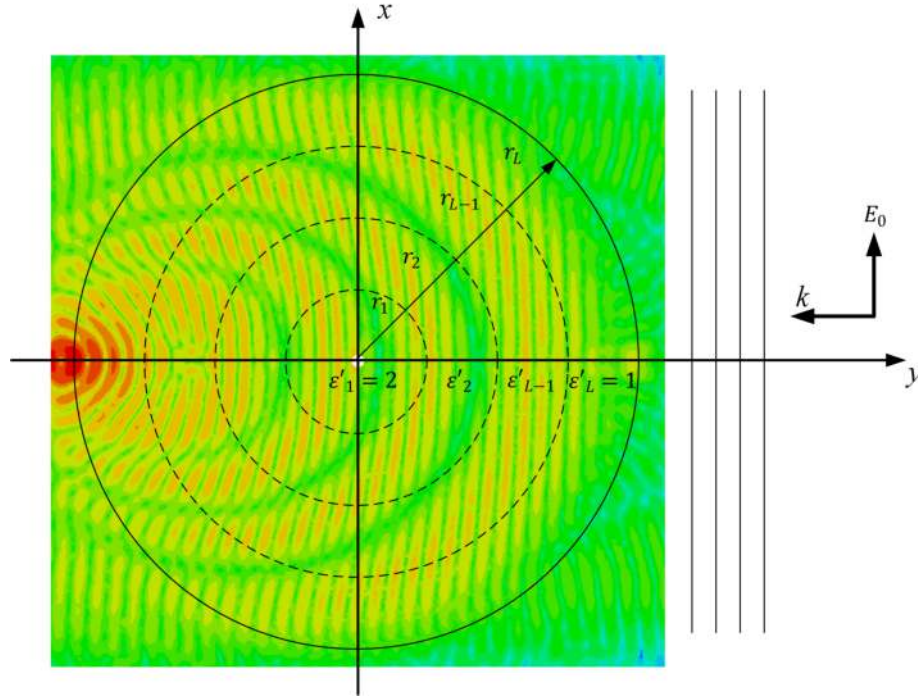


Рисунок 7.17 — Геометрия задачи: шестислойная сферическая линза Люнеберга радиуса a с концентрично размещённой металлической сферой радиуса r_m ; первичный облучатель — открытый конец прямоугольного волновода

Таблица 55 — Равношаговая аппроксимация профиля ЛЛ при $N = 1-8$ слоях

N	Радиусы слоёв (норм.)	Диэлектрическая проницаемость ε_i
1	0,5	1,75
2	0,333; 0,667	1,889; 1,556
3	0,25; 0,5; 0,75	1,938; 1,750; 1,438
4	0,2; 0,4; 0,6; 0,8	1,960; 1,840; 1,640; 1,360
5	0,167; ...; 0,833	1,972; 1,889; 1,750; 1,556; 1,306
6	0,143; ...; 0,857	1,980; 1,918; 1,816; 1,673; 1,490; 1,265
7	0,125; ...; 0,875	1,984; 1,938; 1,859; 1,750; 1,609; 1,438; 1,234
8	0,111; ...; 0,889	1,988; 1,951; 1,889; 1,802; 1,691; 1,556; 1,395; 1,210

Оптимизированная аппроксимация [26] при одинаковом числе слоёв обеспечивает меньшую среднеквадратическую погрешность, чем равношаговая; уже при $N = 6$ достигается качество, достаточное для задач мм-диапазона. Ещё

Таблица 56 — Оптимизированная аппроксимация профиля ЛЛ при $N = 1-8$ слоях [26]

N	Радиусы слоёв (норм.)	Диэлектрическая проницаемость ε_i
1	0,82	1,67
2	0,63; 0,89	1,80; 1,40
3	0,53; 0,75; 0,93	1,86; 1,57; 1,28
4	0,47; 0,67; 0,82; 0,94	1,88; 1,67; 1,44; 1,22
5	0,43; 0,60; 0,74; 0,85; 0,95	1,91; 1,73; 1,55; 1,36; 1,18
6	0,39; ...; 0,96	1,93; 1,77; 1,61; 1,46; 1,31; 1,16
7	0,37; ...; 0,97	1,93; 1,80; 1,67; 1,53; 1,40; 1,27; 1,13
8	0,34; ...; 0,97	1,94; 1,82; 1,71; 1,59; 1,47; 1,35; 1,24; 1,12

меньшую погрешность даёт MOGA-стратификация с совместной оптимизацией радиусов и проницаемостей слоёв (см. 7.10.2). Равношаговая аппроксимация использована в сравнительных расчётах по методическим соображениям.

Численное сравнение точности аппроксимаций

Для количественного обоснования преимущества оптимизированной аппроксимации перед равношаговой введём интегральную меру отклонения ступенчатого профиля $\varepsilon^{(N)}(r/a)$ от непрерывного закона Люнеберга (7.8):

$$\text{RMSE}(\varepsilon^{(N)}) = \sqrt{\int_0^1 [\varepsilon^{(N)}(r/a) - \varepsilon^{(0)}(r/a)]^2 d(r/a)}, \quad \varepsilon^{(0)}(r/a) = 2 - (r/a)^2. \quad (7.15)$$

Для равношаговой схемы значения $\varepsilon_l^{(p)}$ выбраны как L_2 -оптимальные средние профиля в каждом слое:

$$\varepsilon_l^{(p)} = 2 - \frac{r_{l-1}^2 + r_{l-1}r_l + r_l^2}{3}, \quad r_l = l/N, \quad (7.16)$$

что обеспечивает поточечно лучшее равношаговое приближение и делает сопоставление с методикой Фукса [26] корректным. Третья схема — *MOGA-стратификация*: радиусы границ и проницаемости всех слоёв оптимизируются *совместно* по постановке (4.1) многокритериальным генетическим алгоритмом (реализация NSGA-II [179]) с финишным локальным уточнением найденного решения по необходимым условиям L_2 -оптимальности кусочно-постоянной аппроксимации: проницаемость слоя равна среднему значению профиля по слою, а граница между слоями проходит через точку, в которой профиль равен полусумме проницаемостей соседних слоёв. Совпадение RMSE-конца фронта Парето генетического алгоритма с независимым решением этих условий

(невязка $\leq 1,3 \cdot 10^{-3}$ до уточнения и машинный нуль после) служит взаимной верификацией обоих методов и подтверждает глобальную оптимальность полученной стратификации. Численные значения RMSE для трёх схем при $N = 1-8$ слоях приведены в табл. 57 и проиллюстрированы на рис. 7.18; параметры MOGA-стратификации для рабочей конфигурации $N = 8$ — в табл. 58.

Таблица 57 — Среднеквадратическая погрешность $\text{RMSE}(\epsilon^{(N)})$ ступенчатой аппроксимации профиля Люнеберга для равношаговой, оптимизированной (Fuchs) и MOGA-схем при $N = 1-8$ слоях; в двух последних столбцах — снижение погрешности MOGA-стратификации относительно равношаговой и Fuchs-схем

N	$\text{RMSE}^{(p)}$, равношаг.	$\text{RMSE}^{(\Phi)}$, Fuchs	$\text{RMSE}^{(M)}$, MOGA	$\delta_{M/p}$, %	$\delta_{M/\Phi}$, %
1	0,29814	0,22115	0,19389	35,0	12,3
2	0,16245	0,12963	0,11241	30,8	13,3
3	0,10987	0,09057	0,07919	27,9	12,6
4	0,08281	0,07258	0,06114	26,2	15,8
5	0,06640	0,05679	0,04979	25,0	12,3
6	0,05540	0,04685	0,04199	24,2	10,4
7	0,04752	0,04471	0,03631	23,6	18,8
8	0,04160	0,03675	0,03198	23,1	13,0

Таблица 58 — Параметры MOGA-стратификации профиля ЛЛ при $N = 8$ слоях: внешние радиусы слоёв r_l/a , проницаемости ϵ_l и коэффициенты заполнения FDM-печати α_l по логарифмической формуле Лихтенекера для HIPS ($\epsilon_{\max} = 2,4$); область $r > r_8$ — согласующий воздушный слой $\epsilon = 1$

Слой l	1	2	3	4	5	6	7	8
r_l/a	0,262	0,410	0,528	0,631	0,724	0,809	0,889	0,964
ϵ_l	1,977	1,885	1,779	1,663	1,541	1,412	1,279	1,141
α_l , %	77,9	72,4	65,8	58,1	49,4	39,4	28,1	15,1

Схема Fuchs снижает RMSE на 6–26 % относительно равношаговой при том же числе слоёв; при $N = 8$ выигрыш составляет 11,7 % (RMSE = 0,0368 против 0,0416). Причина видна на рис. 7.18 (б): оптимизированные схемы концентрируют слои в зоне сильного градиента ($r/a \rightarrow 1$, где $|d\epsilon/dr|$ максимально), оставляя центральные слои широкими. MOGA-стратификация делает следующий шаг — совместная оптимизация радиусов u и проницаемостей снижает RMSE ещё на 10–19 % относительно схемы Fuchs и на 23–35 % относительно равношаговой; при $N = 8$ достигается RMSE = 0,0320 — на 13,0 % ниже схемы Fuchs и на 23,1 % ниже равношаговой, что заведомо достаточно для электродинамических задач мм-диапазона [26; 46].

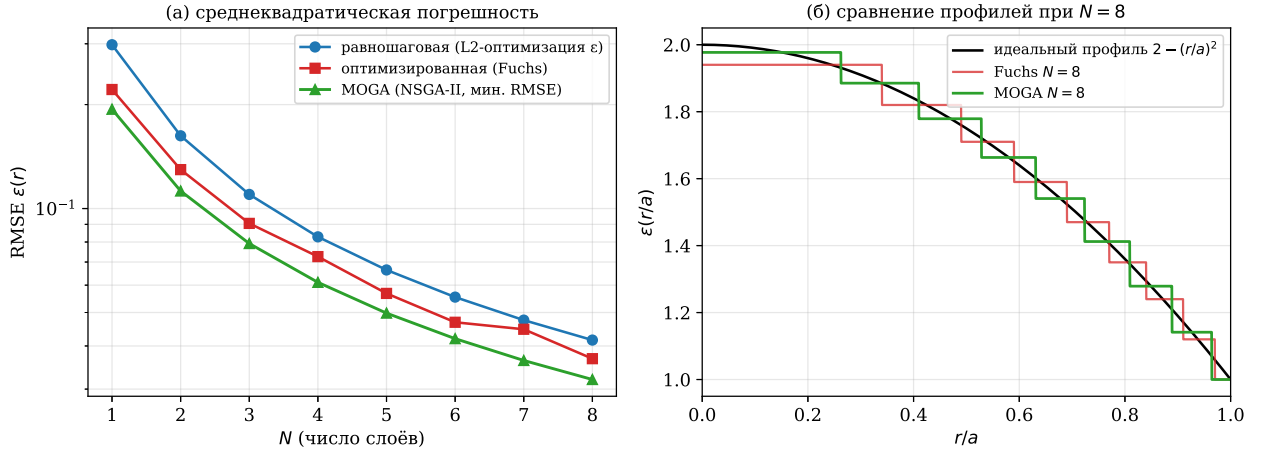


Рисунок 7.18 — Численное сравнение трёх схем ступенчатой аппроксимации профиля Люнеберга. (а) Среднеквадратическая погрешность $\text{RMSE}(\varepsilon^{(N)})$ как функция числа слоёв N в логарифмическом масштабе: схема Fuchs лежит ниже равношаговой во всём диапазоне $N = 1\text{--}8$, а MOGA-стратификация — ниже обеих. (б) Прямое сравнение восьмислойных профилей $\varepsilon^{(8)}(r/a)$ с непрерывным эталоном $2 - (r/a)^2$: обе оптимизированные схемы используют более узкие слои в зоне сильного градиента (вблизи поверхности линзы $r/a \rightarrow 1$) и более широкие в центральной области; MOGA дополнительно оптимальным образом расставляет уровни ε_l внутри слоёв

Двухкритериальная постановка (4.1) даёт и более сильный результат, чем простое снижение RMSE. На рис. 7.19 показан фронт Парето в координатах $(f_1, f_2) = (\text{RMSE}(\varepsilon), \Delta\varepsilon_{\max})$ при $N = 8$, где $\Delta\varepsilon_{\max}$ — максимальный скачок проницаемости между соседними слоями (включая выход в воздух), определяющий уровень межслойных отражений и технологическую реализуемость. Обе классические схемы оказываются *строго доминируемыми*: при том же максимальном скачке, что у схемы Fuchs ($\Delta\varepsilon_{\max} = 0,12$), точка фронта обеспечивает $\text{RMSE} = 0,0335$ против $0,0368$, т. е. MOGA-решение превосходит схему Fuchs *одновременно по обоим критериям*; равношаговая схема ($\text{RMSE} = 0,0416$; $\Delta\varepsilon_{\max} = 0,219$) отстоит от фронта ещё дальше.

Значения ε_l и r_l/a равношаговой и Fuchs-схем при $N = 1\text{--}8$ собраны в табл. 55 и 56, MOGA-стратификации при $N = 8$ — в табл. 58; программный расчёт — модули `b2_approximation_rmse.py` и `moga_stratification.py` (NSGA-II + верификация по условиям L_2 -оптимальности + уточнение фронта методом ε -ограничений) в `_disSource/codeSource/python_calc/regression_tests/`.

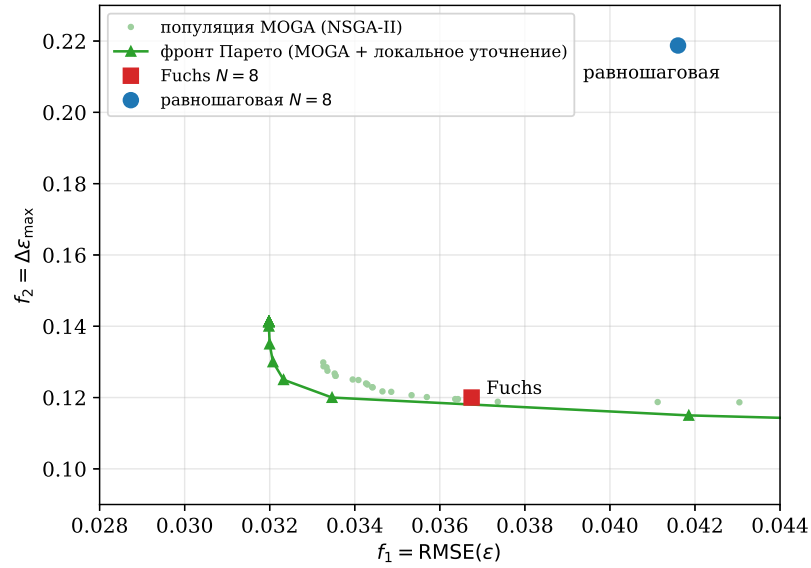


Рисунок 7.19 — Фронт Парето двухкритериальной MOGA-стратификации профиля Люнеберга при $N = 8$ в координатах «погрешность аппроксимации — максимальный скачок проницаемости». Точки классических схем (Fuchs и равношаговой) лежат выше фронта и строго доминируются его точками: при $\Delta\epsilon_{\max} = 0,12$ (как у Fuchs) фронт даёт $\text{RMSE} = 0,0335$ против $0,0368$

Минимально допустимое число слоёв

Опираясь на полученные значения, можно сформулировать практический критерий выбора числа слоёв N для конкретной задачи. Если рабочую погрешность аппроксимации профиля задавать через нормированную среднеквадратическую ошибку $\widetilde{\text{RMSE}} = \text{RMSE}/\epsilon^{(0)}(0) = \text{RMSE}/2$, то из табл. 57 следует:

- Для требования $\widetilde{\text{RMSE}} \leq 5,0 \%$ (нестрогое требование, типичное для приложений сантиметрового диапазона) достаточно $N \geq 3$ слоёв при MOGA-стратификации ($\widetilde{\text{RMSE}} = 4,0 \%$) и оптимизированной схеме Fuchs (4,5 %) и $N \geq 4$ при равношаговой (4,1 % при $N = 4$).
- Для требования $\widetilde{\text{RMSE}} \leq 2,5 \%$ (приложения миллиметрового и квазиоптического диапазона) минимально допустимое число слоёв составляет $N \geq 5$ при MOGA-стратификации ($\widetilde{\text{RMSE}} = 2,49 \%$), $N \geq 6$ при Fuchs-схеме (2,3 %) и $N \geq 8$ при равношаговой (2,1 %).
- Для требования $\widetilde{\text{RMSE}} \leq 2,0 \%$ (предельная точность для электродинамических расчётов в широкой полосе $k_0 a \in [2\pi; 8\pi]$) MOGA-стратификация обеспечивает запас при $N \geq 7$ ($\widetilde{\text{RMSE}} = 1,8 \%$; при $N = 8$ — 1,6 %), Fuchs-схема — при $N = 8$ (1,8 %), тогда как равношаговая схе-

ма при $N = 8$ находится на грани требования и требует $N \geq 9-10$ для надёжного выполнения.

Полученные пороги согласуются с практическим поведением антенны: $2\Delta\theta_{-3\text{дБ}}$, уровень бокового излучения и КУ восьмислойной ЛЛ (табл. 17 и 18, глава 2) меняются менее чем на 1 % при росте N от 8 до 12; восьмислойная аппроксимация достаточна для задач радиолокации и связи X–Ku-диапазонов. Дальнейший рост N оправдан лишь при высокоточном синтезе диаграммы рассеяния или использовании ЛЛ как эталонного рассеивателя для калибровки безэховых камер.

Электродинамическое моделирование описанной конструкции выполнено в пакете Ansys HFSS методом конечных элементов; геометрия расчётной сборки приведена на рисунке 7.20.

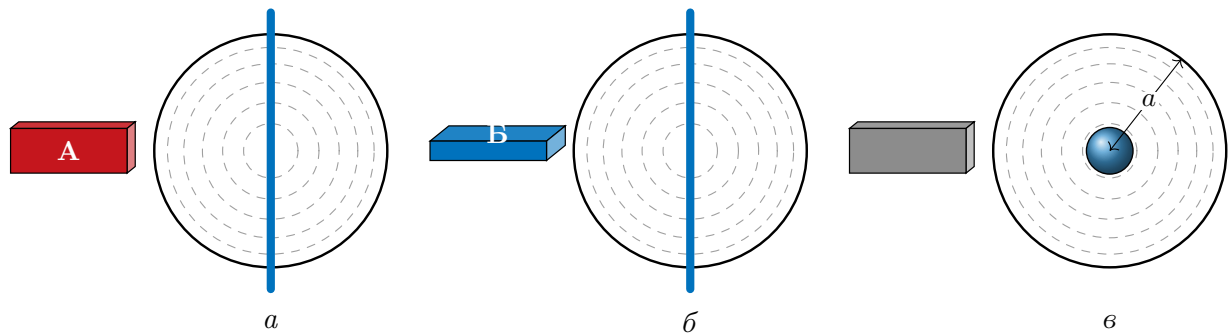


Рисунок 7.20 — Расчётная модель шестислойной ЛЛ радиуса $a \approx 60$ мм с металлическим включением и волноводным облучателем (открытый конец волновода 23×10 мм) в Ansys HFSS: (а) центральный стержень, облучатель **А** ориентирован широкой стенкой к стержню; (б) тот же облучатель, повернутый на 90° вокруг своей оси — узкой стенкой к стержню (**Б**); (в) центральная металлическая сфера, для которой ориентация облучателя безразлична вследствие осевой симметрии задачи

7.10.3 Замкнутое аналитическое решение методом ТФГ

На основе аппарата, развитого в главе 2, вектор напряжённости электрического поля в дальней зоне для волны линейной поляризации записывается в нормированном виде

$$E_\theta(\theta, \varphi) = \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + b_n \pi_n(\cos \theta)], \quad (7.17)$$

$$E_\varphi(\theta, \varphi) = \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)], \quad (7.18)$$

где $\tau_n = dP_n^1/d\theta$, $\pi_n = P_n^1/\sin \theta$ — ассоциированные функции Лежандра; $\hat{j}_n, \hat{h}_n^{(2)}$ — сферические функции Бесселя–Риккати [17]. Коэффициенты среды a_n, b_n выражаются через направленные импедансы Z_n^E, Z_n^H и адмитансы Y_n^E, Y_n^H слоёв, которые вычисляются по рекуррентной схеме Панченко [17] последовательным пересчётом от внешней границы линзы к центру. Граничное условие на идеально проводящей центральной сфере радиуса r_m задаётся как $Z_n^E(r_m) = 0$, $Y_n^H(r_m) = 0$, что обеспечивает обращение в нуль тангенциальной составляющей электрического поля на её поверхности.

Формулы (7.17), (7.18) обобщают решение задачи Ми [17] на многослойную сферу с проводящим ядром для произвольных N и r_m/a ; время расчёта одной конфигурации — доли секунды.

7.10.4 Сравнение ТФГ и метода конечных элементов

Для верификации формул (7.17), (7.18) проведено параметрическое сравнение с методом конечных элементов в пакете Ansys HFSS. В обеих постановках использована шестислойная оптимизированная стратификация (табл. 56, строка $N = 6$), внешний радиус линзы a соответствует $k_0 a = 4\pi$ ($a \approx 60$ мм на частоте $f = 10$ ГГц), радиус металлической сферы варьировался в пределах $r_m = \{15, 30, 45, 60\}$ мм (отношение $r_m/a = \{0,25; 0,5; 0,75; 1,0\}$). Полученные нормированные диаграммы направленности приведены на рисунке 7.21, а их сводные численные характеристики — в табл. 59.

Таблица 59 — Сравнение ТФГ и Ansys HFSS для ЛЛ с металлической сферой, $k_0 a = 4\pi$, $N = 6$, $f = 10$ ГГц

r_m/a	$\Delta\theta_{-3}^{\text{ТФГ}}, ^\circ$	$\Delta\theta_{-3}^{\text{HFSS}}, ^\circ$	ЛБЛ ^{ТФГ} , дБ	ЛБЛ ^{HFSS} , дБ	$T_{\text{расч}}$
0,25	14,6	14,8	−17,8	−17,2	0,4 с / 57 мин
0,50	14,9	15,1	−16,3	−15,7	0,4 с / 57 мин
0,75	15,8	16,4	−13,2	−12,3	0,5 с / 57 мин
1,00	—	—	—	—	(вырождение в сплошной металл)

Ширина главного лепестка совпадает с точностью $0,6^\circ$, уровень первого бокового лепестка — в пределах 1 дБ. Время расчёта методом ТФГ — доли секунды против ≈ 57 мин в Ansys HFSS (8 ядер Intel Xeon Gold 6154, 47,5 ГБ ОЗУ), ускорение — четыре порядка. При $r_m/a \leq 0,75$ фокусирующие свойства

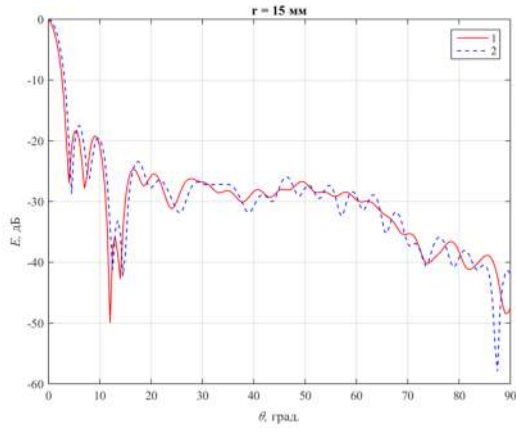
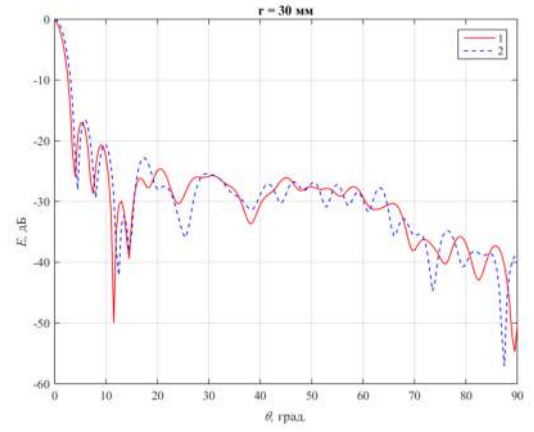
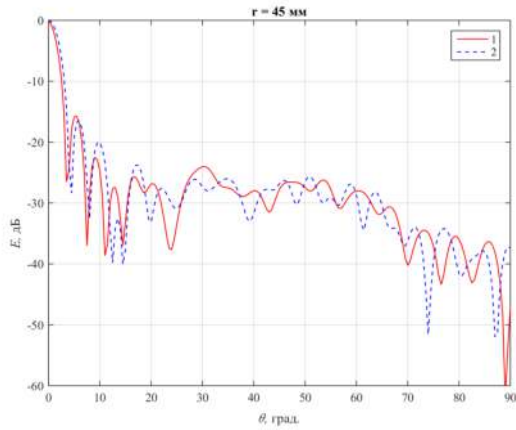
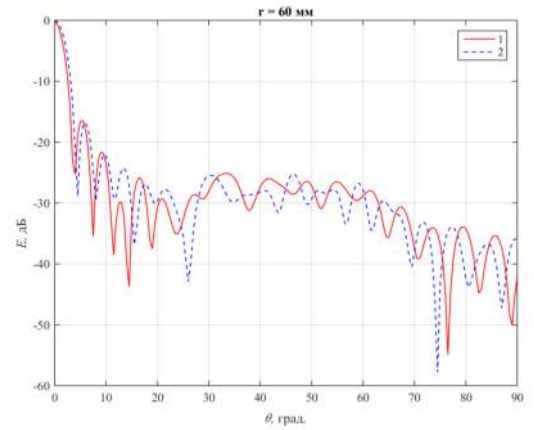
а) $r_M = 15 \text{ мм}$ ($r_M/a = 0,25$)б) $r_M = 30 \text{ мм}$ ($r_M/a = 0,50$)в) $r_M = 45 \text{ мм}$ ($r_M/a = 0,75$)г) $r_M = 60 \text{ мм}$ ($r_M/a = 1,00$)

Рисунок 7.21 — Диаграммы направленности шестислойной ЛЛ с металлической сферой в центре при $k_0 a = 4\pi$, $N = 6$, $f = 10 \text{ ГГц}$ для четырёх значений относительного радиуса проводящего ядра r_M/a . Сплошная линия — расчёт по методу ТФГ, штриховая — результат метода конечных элементов в Ansys HFSS

линзы сохраняются, что подтверждает конструктивную допустимость металлического ядра.

7.10.5 Управление уровнем обратного излучения металлическим ядром

Помимо влияния на диаграмму направленности, металлическое ядро служит инструментом управления *обратным излучением* конструкции: интерференция волны, отражённой от проводящей поверхности ядра, с волной, переизлучённой градиентной оболочкой, позволяет как подавлять, так и усиливать моностатический отклик. Обратное (моностатическое) сечение рассеяния σ_r вычислялось по формуле (2.39б) через коэффициенты a_n, b_n конструкции

«многослойная линза + проводящее ядро», полученные рекуррентной схемой с граничным условием $Z_n^E(r_m) = 0$, $Y_n^H(r_m) = 0$ (см. выше). Конфигурация — та же, что и в предыдущих подразделах: шестислойная оптимизированная стратификация (табл. 56, $N = 6$), $k_0 a = 4\pi$; радиус ядра варьировался в диапазоне $r_m/a \in [0; 0,75]$ с шагом $\approx 10^{-3}a$. Базовая линза без ядра при $k_0 a = 4\pi$ даёт $\sigma_r/(\pi a^2) = 0,133$. Результаты сведены в табл. 60 и на рис. 7.22; относительный уровень определён как $\Delta = 10 \lg[\sigma_r(r_m)/\sigma_r(0)]$.

Таблица 60 — Управление обратным сечением рассеяния ЛЛ центральным металлическим ядром, $k_0 a = 4\pi$, $N = 6$

r_m/a	$\sigma_r/(\pi a^2)$	Δ , дБ
0 (без ядра)	0,1332	0
0,10	0,1022	−1,15
0,137	0,0095	−11,47
0,20	0,3676	+4,41
0,25	0,1998	+1,76
0,32	0,0001	−31,20
0,50	0,0338	−5,95
0,665	1,7129	+11,09
0,75	0,1650	+0,93

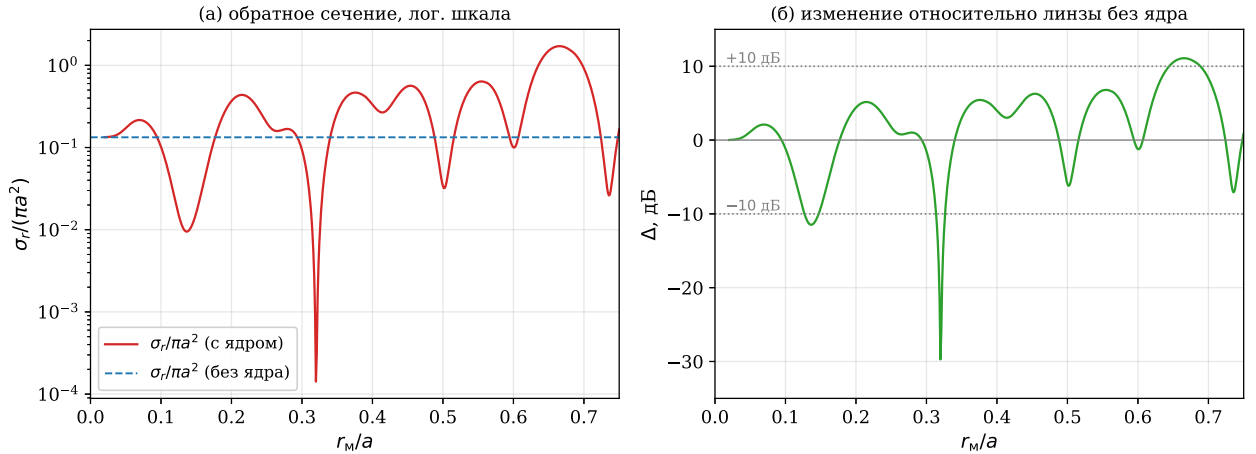


Рисунок 7.22 — Обратное сечение рассеяния шестислойной ЛЛ с центральным металлическим ядром как функция относительного радиуса ядра r_m/a при $k_0 a = 4\pi$: (а) $\sigma_r/(\pi a^2)$ в логарифмическом масштабе, штриховая линия — уровень линзы без ядра; (б) относительное изменение Δ в децибелах, пунктиром отмечены уровни ± 10 дБ

Зависимость $\sigma_r(r_m)$ носит выраженный интерференционный характер с чередованием максимумов и глубоких минимумов. Диапазон управления составляет от $-31,2$ дБ (минимум при $r_m/a = 0,320$) до $+11,1$ дБ (максимум при $r_m/a = 0,665$), то есть металлическое ядро обеспечивает двустороннее

управление уровнем обратного излучения в пределах не менее ± 10 дБ. Практически значимы устойчивые зоны: усиление $\Delta \geq +10$ дБ достигается в полосе $r_m/a \in [0,645; 0,687]$ (ширина $\approx 0,04a$, при $a \approx 60$ мм — около 2,5 мм, что заведомо реализуемо при механической обработке металлической сферы), подавление $\Delta \leq -10$ дБ — в окрестностях $r_m/a \approx 0,137$ и $r_m/a \approx 0,32$; предельная глубина минимумов чувствительна к допуску на радиус ядра, поэтому в качестве гарантированной характеристики принят уровень -10 дБ, а не пиковые -31 дБ.

Корректность расчёта контролировалась тремя проверками: при $r_m \rightarrow 0$ результат сходится к базовой линзе без ядра (расхождение менее 0,01 дБ), при $r_m \rightarrow a$ — к проводящей сфере радиуса a ($\sigma_r/(\pi a^2) = 0,90$ при $k_0 a = 4\pi$), а увеличение числа удерживаемых гармоник с $N_W = 24$ до $N_W = 64$ не меняет приведённых значений. Программный расчёт — модуль `r3_metal_core_backscatter.py` в `_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/`. Полученный диапазон управления количественно обосновывает соответствующую часть четвёртого положения, выносимого на защиту.

7.10.6 Интеграция с задачами оптимизации и машинного обучения

Быстрая аналитическая формула (7.17)–(7.18) позволяет массово генерировать обучающую выборку для регрессионных нейронных сетей, принимающих на вход нормированный радиус проводящего ядра r_m/a , радиус линзы $k_0 a$, число слоёв N и схему стратификации (равношаговая либо оптимизированная), а на выходе предсказывающих ключевые антенные характеристики $\{\Delta\theta_{-3}, \text{ЛБЛ}, G_{\max}\}$. Обучение регрессора на 10^4 точках занимает считанные минуты; суррогатная модель применяется в задачах геометрической оптимизации и инверсного дизайна ЛЛ (глава 10, библиотека *GreenTensor* [46], модуль `ml_surrogate`).

7.10.7 Выводы по разделу

Проведённый анализ подтверждает следующие положения.

Во-первых, установка металлической сферы в центр многослойной диэлектрической линзы Люнеберга *сохраняет* её фокусирующие свойства при умеренных размерах проводящего ядра ($r_m/a \leq 0,75$), а вносимые искажения диаграммы направленности — приращение ширины главного лепестка не более

1,2° и повышение первого бокового лепестка не более чем на 4,6 дБ — приемлемы для подавляющего большинства практических применений.

Во-вторых, полученное в аппарате ТФГ замкнутое решение (7.17), (7.18) обладает точностью, не уступающей методу конечных элементов (различие по ширине главного лепестка не превышает 0,6°, по уровню первого бокового лепестка — 1 дБ), при радикальном ускорении расчётов (в 10^3 – 10^4 раз).

В-третьих, металлическое ядро представляет собой перспективный конструктивный элемент двойного назначения: оно выполняет функцию механического крепления тела линзы и одновременно служит инструментом регулирования средней диэлектрической проницаемости через управление соотношением r_m/a . Это особенно существенно при реализации линз методом 3D-печати с пористыми структурами (глава 8), где подбор $\varepsilon(r)$ ограничен выбором базового полимера и степенью заполнения.

В-четвёртых, металлическое ядро обеспечивает двустороннее управление уровнем обратного излучения конструкции: варьирование относительного радиуса r_m/a в диапазоне $[0; 0,75]$ изменяет моностатическое сечение рассеяния от –31,2 дБ до +11,1 дБ относительно линзы без ядра (табл. 60), то есть в пределах не менее ± 10 дБ, причём зона усиления $\Delta \geq +10$ дБ имеет технологически реализуемую ширину $\approx 0,04a$.

В-пятых, быстрота аналитического решения открывает путь к применению нейросетевых суррогатных моделей для поиска оптимальных конфигураций линзы с металлическим ядром, что невозможно при прямом использовании метода конечных элементов из-за неприемлемых затрат машинного времени.

7.11 Применение синтезированных линз-дефлекторов в задачах радиолокации и радионавигации

7.11.1 Обзор прикладных задач для структур с управляемым углом преломления

Аналитический синтез сферических градиентных структур с управляемым углом отклонения α , разработанный в 4.4, открывает качественно новые возможности в радиолокационной и радионавигационной технике. Классическая линза Люнеберга традиционно применяется как фокусирующий элемент в многолучевых антенных решётках [31; 135], тогда как роль пассивного ретро-

рефлектора выполняет линза Итона — предельный случай $\alpha = \pi$ построенного семейства с профилем (4.11). Предлагаемый класс *линз-дефлекторов* расширяет эту область на задачи, в которых требуется точно заданное геометрическое смещение пучка без применения активных фазовращателей или механически поворотных отражателей.

В 61 перечислены основные прикладные сценарии, для которых синтезированное семейство линз $n^{1+\nu} + n^{1-\nu} = 2a/r$, $\nu = \pi/\alpha$ ((4.10)) представляет непосредственный интерес.

Таблица 61 — Прикладные сценарии использования линз-дефлекторов

Сценарий	α	Назначение и ключевое преимущество
Многолучевая секторная РЛС	$30 \dots 90^\circ$	Разнесение лучей без фазированной решётки; пассивный элемент
Передатчик с двухпозиционной диаграммой	$\pm \alpha/2$	Одновременное обслуживание двух направлений одной антенной
Маяк радионавигации с наклонным лучом	$\alpha \in (0, \pi/2)$	Стабильная, метеорологически-независимая диаграмма
Пассивный радарный рефлектор (Итон)	π	Усиление эффективной площади рассеяния малой цели
Отводящая (маскирующая) линза	α задано	Снижение ЭПР в заданном секторе углов
Имитатор ложной цели	переменный α	Создание «мнимых» целей для испытаний РЛС
Метео-РЛС с косекансной ДН	$\chi(b) = \text{косеканс}$	Равномерное облучение подстилающей поверхности

Далее каждое из этих приложений рассматривается количественно.

7.11.2 Многолучевая секторная радиолокационная станция

Одним из очевидных применений линзы-дефлектора является построение *многолучевой секторной РЛС*. В такой станции единственный облучатель,

расположенный на оптической оси системы, через набор дефлекторных линз формирует несколько разнесённых в пространстве лучей с заранее заданными углами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$. По сравнению с активной фазированной антенной решёткой (АФАР) такое построение имеет следующие преимущества.

Пассивность: отсутствуют фазовращатели, усилители и система управления фазой. Как следствие, существенно снижаются стоимость, масса и тепловая нагрузка.

Широкополосность: градиентные диэлектрические структуры принципиально безмодовы и сохраняют характеристики в полосе $\Delta f/f_0 \sim 30 \dots 60\%$ (для сравнения: у резонансных фазовращателей — не более $\sim 5\%$).

Технологическая простота: изготавливаются методами 3D-печати (PLA, HIPS; см. 8) или отливкой.

Поляризационная прозрачность: диэлектрическая линза не связывает компоненты поля и одинаково работает на горизонтальной, вертикальной и круговых поляризациях.

Количественный пример. Рассмотрим трёхлучевую РЛС X-диапазона ($f_0 = 9,4$ ГГц, $\lambda_0 \approx 32$ мм) с облучателем в виде рупора и тремя дефлекторными линзами радиуса $a = 5\lambda_0 = 160$ мм, обеспечивающими разнос лучей на углы $\alpha \in \{-30^\circ, 0^\circ, +30^\circ\}$ относительно нормали к антенной апертуре. Коэффициент усиления G каждого луча определяется эффективной площадью $A_{\text{eff}} = \pi a^2 \eta_{\text{ар}}$ и при апертурном КПД $\eta_{\text{ар}} = 0,65$ составляет

$$G = \frac{4\pi A_{\text{eff}}}{\lambda_0^2} \approx \frac{4\pi \cdot \pi a^2 \eta_{\text{ар}}}{\lambda_0^2} \approx 26,1 \text{ дБ.} \quad (7.19)$$

Ширина главного лепестка по уровню -3 дБ составляет $\theta_3 \approx 1,02 \lambda_0/D = 12,5^\circ$ (при $D = 2a = 10\lambda_0$). Смежные лучи $-30^\circ, 0^\circ, +30^\circ$ перекрываются по уровню -3 дБ и обеспечивают сплошной сектор обзора 60° без «мёртвых зон».

7.11.3 Радарная модификация уравнения дальности для линзы-дефлектора

Стандартное уравнение дальности моностатической РЛС [204]

$$R_{\text{max}} = \left[\frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 P_{\text{min}} L} \right]^{1/4} \quad (7.20)$$

для конфигурации «линза + облучатель» преобразуется к виду, учитывающему коэффициент прохождения дефлекторной линзы $\eta_L(\alpha)$ и эффективный коэффициент усиления G_L :

$$R_{\max}^{(L)} = \left[\frac{P_t G_L^2 \lambda^2 \sigma \eta_L^2(\alpha)}{(4\pi)^3 P_{\min} L} \right]^{1/4}, \quad G_L = G_0 \eta_{\text{ap}} \frac{A_{\text{eff}}(\alpha)}{A_{\text{eff}}(0)}, \quad (7.21)$$

где G_0 — коэффициент усиления исходного облучателя, $A_{\text{eff}}(\alpha)$ — эффективная площадь линзы для луча, отклонённого на угол α , учитывающая геометрическое виньетирование (проекцию круглой апертуры линзы на плоскость, перпендикулярную отклонённому лучу):

$$A_{\text{eff}}(\alpha) = \pi a^2 \cos \alpha. \quad (7.22)$$

Коэффициент прохождения $\eta_L(\alpha)$ учитывает френелевские потери на поверхности $r = a$ и диссипативные потери в градиентной среде:

$$\eta_L(\alpha) = (1 - |\Gamma(\alpha)|^2) \cdot \exp \left(- \int_0^{\ell(\alpha)} \alpha_{\text{abs}}(s) ds \right), \quad (7.23)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — коэффициент френелевского отражения при угле падения $\alpha/2$, $\alpha_{\text{abs}}(s)$ — погонное затухание в диэлектрике вдоль луча, $\ell(\alpha)$ — длина оптического пути.

Для рассмотренного выше примера ($a = 5\lambda$, $\alpha = 30^\circ$, PLA с $\text{tg } \delta \approx 4 \cdot 10^{-3}$) численный расчёт даёт $\eta_L \approx 0,94$. Это соответствует потере дальности обнаружения около 1,5 % по сравнению с конфигурацией без линзы — ценой получения дополнительного сектора обзора $\pm 30^\circ$.

7.11.4 Пассивный радиолокационный рефлектор на базе линзы Итона

Предельный случай $\alpha = \pi$ формулы (4.9) формально совпадает с классической линзой Итона $n(r) = \sqrt{2a/r - 1}$ [127]. Такая структура, установленная на малоразмерном объекте (малотоннажное судно, БПЛА, буй), разворачивает падающее радиолокационное излучение точно в обратном направлении независимо от угла падения, подобно уголкового отражателю, но при существенно меньших габаритах и том же значении ЭПР. Эффективная площадь рассеяния (ЭПР) линзы Итона радиуса a определяется выражением

$$\sigma_{\text{RCS}}^{(\text{Eaton})} = \frac{4\pi A_{\text{eff}}^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^3 a^4 \eta_{\text{ap}}^2}{\lambda^2}, \quad (7.24)$$

При $a = 5\lambda$ и $\eta_{\text{ap}} = 0,6$ эта величина составляет $\sigma_{\text{RCS}} \approx 10,2 \text{ м}^2$, что приблизительно в 10^3 раз превышает ЭПР сплошной металлической сферы того же радиуса ($\sigma = \pi a^2 \approx 0,08 \text{ м}^2$).

Данное приложение реализовано автором для задачи усиления радиолокационного образа учебных мишеней БПЛА [74]. В дальнейшем развитии частично отклоняющая линза с $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ позволит управляемо снижать или смещать ЭПР, открывая путь к маскирующим градиентным структурам — структурам, отводящим отражённое излучение в заранее выбранный сектор углов, недоступный для приёмника противодействующей РЛС.

7.11.5 Радионавигационный маяк с наклонной диаграммой

В радионавигации сферические линзы Лüneберга широко применяются для построения *маячковых антенн* с изотропной в горизонтальной плоскости диаграммой направленности. Предложенный класс линз-дефлекторов расширяет эти возможности и позволяет построить маяк с наклонной, фиксированной под определённым углом к горизонту диаграммой. Такой маяк востребован при работе с летательными аппаратами малых высот и для создания «освещающего» поля над заданным рельефом; смежные прикладные задачи измерения и индикации малых высот развиваются в той же научной школе УрФУ [205].

Конструктивно маяк представляет собой четырёхслойную линзу-дефлектор (с параметрами, приведёнными в 32 для $\alpha = 90^\circ$ либо рассчитанными аналогично для других значений α), расположенную над активным облучателем в виде короткого вертикального штыревого антенного элемента. Линза переориентирует вертикально направленный луч в выбранный угол места $90^\circ - \alpha$ с сохранением всенаправленности по азимуту — за счёт сферической симметрии синтезированного профиля. Потери при реализации такого маяка по сравнению с ФАР на ту же угловую характеристику составляют порядка 2 дБ (оценка по $\eta_L \approx 0,8$), что в большинстве практических применений компенсируется на несколько порядков меньшей стоимостью и повышенной надёжностью.

7.11.6 Отклонение и подавление лучей: линза как элемент управления ЭПР

Особый интерес представляет применение дефлекторных линз для управления эффективной площадью рассеяния (ЭПР, σ_{RCS}) объектов. Стандартные методы снижения ЭПР предусматривают применение радиопоглощающих материалов (РАМ) либо специальное геометрическое формообразование корпуса (stealth). Оба подхода увеличивают массу объекта и ограничены по частотной и угловой полосе подавления.

Размещение сферической линзы-дефлектора перед преобладающим источником отражения (например, перед кабиной, воздухозаборником или антенным отсеком) позволяет отвести отражённое излучение в заранее выбранный сектор, не совпадающий с направлением «цель — приёмник» РЛС противника. Количественно эффект описывается следующей модификацией стандартной формулы ЭПР:

$$\sigma_{\text{RCS}}^{(\text{def})}(\theta_{\text{obs}}) = \sigma_{\text{RCS}}^{(0)} \cdot |D(\theta_{\text{obs}} - \alpha)|^2, \quad (7.25)$$

где $\sigma_{\text{RCS}}^{(0)}$ — исходная ЭПР объекта без линзы, $D(\Delta\theta)$ — нормированная диаграмма направленности дефлекторной линзы с максимумом при $\Delta\theta = 0$. Ширина главного лепестка линзы радиуса $a = 5\lambda$ составляет около 12° ; отсюда отклонение ЭПР на $\alpha = 60^\circ$ обеспечивает подавление отражённого сигнала в направлении падающей волны на уровне -27 дБ без применения радиопоглощающих покрытий. Такой показатель конкурентоспособен для задач частичного (non-stealth) снижения радиолокационной заметности.

7.11.7 Имитатор ложной цели

Развитие той же идеи приводит к классу *имитаторов ложной цели* — массивам линз-дефлекторов с различными углами α , развёрнутых на едином носителе (например, на дроне-приманке). Каждая линза переотражает падающее излучение в свою сторону и имитирует присутствие в соответствующей точке «мнимой» цели с задаваемым уровнем ЭПР. Совокупная картина, возникающая на выходе дальномерно-доплеровской обработки, создаёт у приёмника РЛС иллюзию нескольких разнесённых объектов. Такие системы-имитаторы

востребованы при испытаниях многоцелевых РЛС, проверке алгоритмов обнаружения и сопровождения и исследовании помехоустойчивости современных радаров обзора.

7.11.8 Метеорологическая РЛС с косекансной диаграммой

Последнее из рассматриваемых приложений — реализация *косекансной диаграммы направленности* для метеорологических и загоризонтных РЛС. В отличие от всех рассмотренных выше сценариев, здесь требуется переменный угол отклонения: $\chi(b)$ зависит от прицельного параметра луча так, чтобы мощность сигнала, отражённого от земной поверхности, не зависела от дальности цели до радара (косекансный закон [135]).

Формально задача сводится к решению обратной задачи (4.8) для $\chi(b)$ вида (4.13). Аналитическое обращение уравнения Абеля в этом случае не выражается через элементарные функции, однако численно реализуется прямо с использованием разработанного в диссертации кода синтеза (10). Подробная проработка косекансной линзы-дефлектора вынесена в перспективные направления (см. заключение); первый прототип с $\alpha = \text{const}$ демонстрирует применимость всего концептуального аппарата и указывает на перспективность данного направления развития градиентной электродинамики.

7.11.9 Выводы раздела

Рассмотренные приложения показывают, что предложенный в настоящей работе класс *сферических линз-дефлекторов* с аналитически синтезированным профилем (4.9) обладает значительным прикладным потенциалом в современной радиолокации и радионавигации. Основные результаты раздела состоят в следующем.

Выведено модифицированное уравнение дальности РЛС (7.21), учитывающее пропускную способность и геометрическое виньетирование дефлекторной линзы. На примере X-диапазона ($a = 5\lambda$, $\alpha = 30^\circ$) показано, что потери дальности обнаружения составляют лишь около 1,5 % при получении полного трёхлучевого сектора обзора 60° .

Оценена ЭПР дефлекторной линзы как пассивного рефлектора: при $a = 5\lambda$ и $\alpha = 180^\circ$ (линза Итона) $\sigma_{\text{RCS}} \approx 10,2 \text{ м}^2$, что примерно в 10^3 раз выше ЭПР

сплошной металлической сферы того же радиуса.

Сформулирована схема радионавигационного маяка с наклонной диаграммой на основе четырёхслойной дефлекторной линзы. Такая схема является пассивной альтернативой ФАР с выигрышем по стоимости, массе и надёжности при потерях в коэффициенте усиления не более 2 дБ.

Предложено управление ЭПР объектов за счёт отведения отражённого излучения в нежелательный для приёмника РЛС сектор. На примере $\alpha = 60^\circ$ показано подавление отражённого сигнала на уровне -27 дБ в направлении падающей волны.

Ряд практических решений, связанных с применением разработанных подходов в прикладных радиолокационных задачах мониторинга подвижных объектов (контроль состояния стрелочных переводов и моменты отделения отцепов на сортировочных горках), защищён патентами Российской Федерации [81; 82]; в этих патентах использованы развитые в 1.7 и 4.4 принципы проектирования сферических градиентных структур.

Описаны концепции имитатора ложной цели и метео-РЛС с косекансной диаграммой как перспективные направления развития класса линз-дефлекторов.

Совокупно разработанный в 1.7, 4.4 и 7.11 материал образует целостную цепочку «общая теория $\rightarrow$ синтез $\rightarrow$ приложения» и позволяет позиционировать диссертационное исследование не как локальное совершенствование классической линзы Люнеберга, а как систематическое развитие теории и практики управления электромагнитным полем в объёмных сферически-симметричных структурах.

7.12 Выводы по главе

В настоящей главе выполнен переход от классической сферической линзы Люнеберга, рассмотренной в главах 5–6, к её модификациям по форме — полусферической линзе на проводящем экране, тороидной линзе Люнеберга (ТЛЛ) для азимутально-панорамного обзора и линзе с центральным металлическим ядром. Установлена роль диэлектрического зазора h как основного управляющего параметра уровня боковых лепестков полусферической конструкции (оптимум $h \approx 0,7\lambda$), продемонстрировано формирование косекансных диаграмм $\text{cosec}^2(\theta)$ (ширина косекансного сектора $76,1^\circ$, УБЛ $-25,4$ дБ при $d = 8\lambda$, $\theta = 83^\circ$; при

$d \geq 8\lambda$ — насыщение), математически оформлена ТЛЛ с $N_{\Phi} \approx 2k_0a$ лучами при $\theta_{HPBW} \approx 14,6^\circ$ и КУ $\sim 21,5$ дБи. Полученные геометрические и электродинамические параметры представляют собой идеальную техническую задачу; вопросы конструктивной реализации методом FDM-печати рассматриваются в главе 8. Систематический анализ комбинированных структур с границами раздела разной координатной симметрии изложен в главе 9.

Ключевой вывод главы. Совокупность модифицированных конфигураций сферической линзы Люнеберга — полусферическая линза на проводящем экране (ширина косекансного сектора $76,1^\circ$, УБЛ $-25,4$ дБ при $d = 8\lambda$), тороидная линза с круговой симметрией ДН в горизонтальной плоскости, линза с центральным металлическим ядром (управление обратным излучением ± 10 дБ), магнетодиэлектрическая линза с равенством профилей $\varepsilon(r) = \mu(r)$ ($\sigma_r \leq 10^{-25}\pi a^2$), сферические рассеиватели с РПМ-покрытиями ZIK 51-2190/2191 и сферические метаматериальные структуры с $\varepsilon = \mu < 0$ — образует единую методическую базу управления радиозаметностью и формирования диаграмм направленности специального вида (косекансных $\cos^2(\theta)$, панорамных 360°) и составляет содержание **четвёртого положения**, выносимого на защиту.

Глава 8. Конструктивные варианты исполнения линз

8.1 Введение

В настоящей главе рассматриваются варианты конструктивного исполнения линз Люнеберга на радиочастотах и способы их технической реализации. Подробный обзор современных методов изготовления ЛЛ и применяемых для них материалов приведён в [1; 2; 29]. Практически все существующие технологии сводятся к одной из следующих задач: подобрать диэлектрик с необходимой проницаемостью, придать ему заданную геометрическую форму и обеспечить требуемое пространственное распределение эффективной проницаемости $\epsilon(r)$. Для радиодиапазона наиболее распространёнными являются многослойные конструкции на основе естественных диэлектриков, искусственные диэлектрики и метаматериалы, а также сферические структуры, получаемые методами аддитивной (3D-) печати.

При изготовлении ЛЛ на 3D-принтерах распространён подход, при котором эффективная диэлектрическая проницаемость регулируется за счёт локального изменения плотности печати. Так, при использовании пластика *PLA* с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3,1$ тело линзы синтезируется путём введения в конструкцию регулярных воздушных полостей; это позволяет приблизиться к профилю Люнеберга и одновременно снизить массу изделия. В настоящей главе приводятся результаты анализа влияния плотности печати на эффективное значение ϵ , а также оценивается точность, с которой можно воспроизвести требуемый закон $n(r)$.

Благодаря дешевизне и широкому распространению этого типа пластика антенны на основе ЛЛ имеют большой потенциал не только в радиолокационной и навигационной технике, но и в гражданской беспроводной широкополосной связи, сетях *5G-6G* и системах управления.

На сегодняшний день известно множество оригинальных вариантов изготовления линзы Люнеберга. Большинство из них опирается на ступенчатую аппроксимацию непрерывного закона преломления: линза выполняется в виде многослойной структуры, внутри каждого слоя диэлектрическая проницаемость остаётся постоянной и меняется дискретно при переходе от слоя к слою.

В более ранних работах автора установлено, что увеличение числа слоёв ЛЛ свыше 20 не приводит к заметному улучшению характеристик линзы [180].

С точки зрения технологичности серийного производства оптимальным компромиссом являются четырёх- и шестислойные конструкции; приближение параметров слоёв к требуемому непрерывному профилю выполняется алгоритмами многопараметрической оптимизации, в качестве критерия качества которых используется среднеквадратичное отклонение ступенчатого профиля от закона Люнеберга.

Технология изготовления ЛЛ из PLA-пластика методами аддитивной 3D-печати подробно описана ниже. Развитие этих методов сделало возможным серийное производство сложных сферических структур, которое ранее оставалось технически труднодостижимым.

Публикации автора по материалам главы 8: [76—78].

8.2 Применение искусственных диэлектриков и метаматериалов

Реализация идеальной линзы Люнеберга в естественных диэлектриках затруднена: требуемое распределение показателя преломления должно быть непрерывным и плавным в диапазоне от 1 до 2,25, тогда как природные материалы с точно заданным $\varepsilon(r)$ либо недоступны, либо обладают нежелательными потерями и узкой рабочей полосой.

Искусственные диэлектрики — композиты из проводящих или диэлектрических включений, размещённых в матрице, с размерами ячеек, значительно меньшими длины волны λ . Изменяя форму, размеры и плотность включений, можно управлять эффективной диэлектрической проницаемостью в нужном диапазоне; практически используются перфорированные пластины, решётки тонких стержней и диэлектрические шарики.

Особое место занимают *градиентные метаматериалы* (*GRIN metamaterials* — GRadient INdex materials) [134; 206], в которых показатель преломления изменяется по заданному профилю. В отличие от послойного подхода, GRIN-структуры позволяют плавнее воспроизвести требуемую зависимость $\varepsilon(r)$, что непосредственно соответствует закону Люнеберга.

Реализации линз Люнеберга на основе метаматериалов подтверждены экспериментально [207; 208]. Такие конструкции обеспечивают компактность и снижение стоимости изготовления, хорошо совместимы с аддитивными технологиями и позволяют применять линзу в многолучевых антенных решётках без механического поворота излучателя — для переключения луча достаточно пе-

реместить точку возбуждения вдоль поверхности сферы.

8.3 Обзор способов реализации линзовых антенн

Применение метаматериалов расширяет практические возможности линзовых антенн вообще и линз Люнеберга в частности. Прогресс в характеристиках современных устройств радиоэлектроники и связи в последние годы во многом связан именно с появлением новых материалов. Совершенствование традиционных магнетодиэлектриков идёт, во-первых, по пути уменьшения тепловых потерь (тангенс угла потерь современных искусственных диэлектриков лежит в диапазоне $10^{-5} \dots 10^{-6}$); во-вторых, по пути создания диэлектрических и магнитных материалов с экстремально высокими проницаемостями ϵ и μ , достигающими нескольких сотен единиц. Использование внешних магнитных полей и специальных технологий изготовления позволяет дополнительно получать невзаимные магнетодиэлектрические среды. Указанные успехи во многом обеспечены переходом на новые, максимально «чистые» исходные компоненты.

Принципиально новый класс сред составляют *метаматериалы* (МТМ). Теоретически такие среды были предсказаны в 1967 году [200], экспериментально подтверждены в 1999 году и впервые практически реализованы в 2000 году. Их отличительные электрофизические свойства — одновременно отрицательные действительные части $\epsilon' < 0$ и $\mu' < 0$. За такими средами закрепилось несколько наименований: *Left-Handed Materials* (LHM) и материалы с дважды отрицательным показателем преломления — *Double Negative Gradient Materials* (DNGM). В противоположность им традиционные магнетодиэлектрики с $\epsilon' > 0$, $\mu' > 0$ называют *Right-Handed Materials* (RHM).

В большинстве известных конструктивных решений показатель преломления приближается к закону (1.1) ступенчато: линза выполняется в виде многослойной структуры с постоянной проницаемостью внутри каждого слоя (подробно этот вопрос рассмотрен в главе 4). Параметры слоёв подбираются алгоритмами оптимизации, как правило, с квадратурным критерием аппроксимации. Ниже рассматриваются конкретные варианты такого ступенчатого приближения.

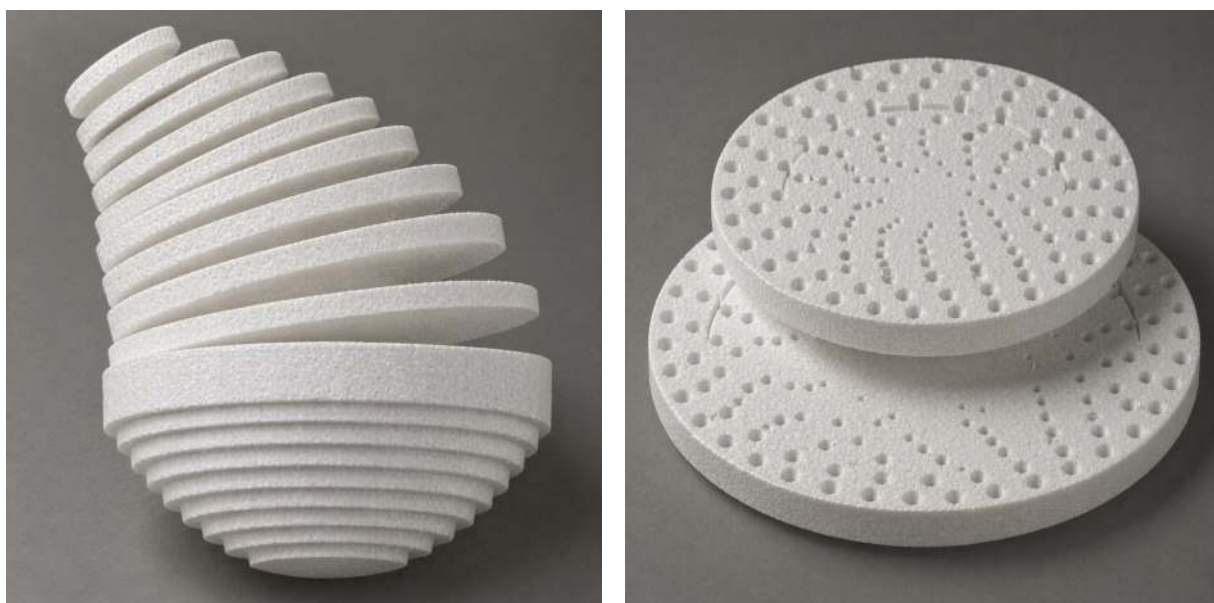
На рисунке 8.1 показан пример конструктивной реализации многослойной ЛЛ в виде полусферы различного радиуса из кусков пенополистирола сложной формы [209].



а) ЛЛ из 8 слоёв вспененной смеси б) ЛЛ из 4 слоёв пенополистирола

Рисунок 8.1 — ЛЛ из пенопласта переменной плотности

В статье [109] описана модифицированная конструкция линзы Люнеберга, получившая название *разделённая (sliced)* сферическая линза. Метод изготовления такой линзы основан на дискретизации сферы на цилиндрические сегменты (слайсы). Каждая секция линзы формируется из сплошного диэлектрика с высверленными отверстиями, которые имитируют градиентную диэлектрическую структуру (рисунок 8.2), позволяя приблизить распределение показателя преломления к классическому закону Люнеберга.



а) конструкция целиком

б) сегмент линзы (слайс)

Рисунок 8.2 — ЛЛ из концентрических перфорированных слоёв

Такой подход упрощает процесс производства, снижает стоимость и улучшает эксплуатационные характеристики линзы. Экспериментальный образец,

представленный в статье, обладает хорошими характеристиками направленности и низкими потерями во всём рабочем диапазоне частот (26,5–40,0 ГГц).

8.4 Подбор параметров диэлектрической проницаемости для изготовления линз с помощью 3D печати

Изготовление градиентной линзы методом 3D-печати сводится к двум взаимосвязанным задачам: экспериментальному определению эффективной диэлектрической проницаемости напечатанного (перфорированного) материала и синтезу геометрии заполнения, обеспечивающей требуемое значение ϵ в каждом слое. Ниже последовательно рассмотрены измерительная методика, процедура подбора параметров перфорации и технологические особенности печати.

Для изготовления линз Люнеберга необходимо с достаточной степенью точности подобрать нужные параметры диэлектрической проницаемости для каждого слоя (в случае многослойного исполнения), либо подобрать шаг плавной реализации проницаемости от центра сферической линзы до её поверхности. В этом случае могут быть полезны существующие методы широкополосного измерения комплексной диэлектрической проницаемости. В настоящее время для этих целей широко распространены методы линии передачи (TR — передачи/отражения) и линии короткого замыкания SCL . В этих методах образец помещается в участок волновода или коаксиальной линии и измеряются параметры рассеяния, предпочтительно с помощью автоматического анализатора цепей АНА. Соответствующие уравнения рассеяния связывают измеренные параметры с диэлектрической проницаемостью материала.

Указанные методы могут быть воспроизведены в системах моделирования. На рисунке 8.3 показана модель для воспроизведения метода TR . Для определения параметров диэлектрика методом линии передачи в системе уравнений учитываются переменные: комплексная диэлектрическая и магнитная проницаемости, позиции двух опорных плоскостей и длина образца. Представленная модель позволяет анализировать влияние неоднородностей в материале и с достаточно высокой точностью определять реализуемый ϵ материала.

В рассматриваемой модели диэлектрическая проницаемость определяется уравнением (8.1) и имеет бесконечное число корней для магнитных материалов, поскольку логарифм комплексного числа многозначен.

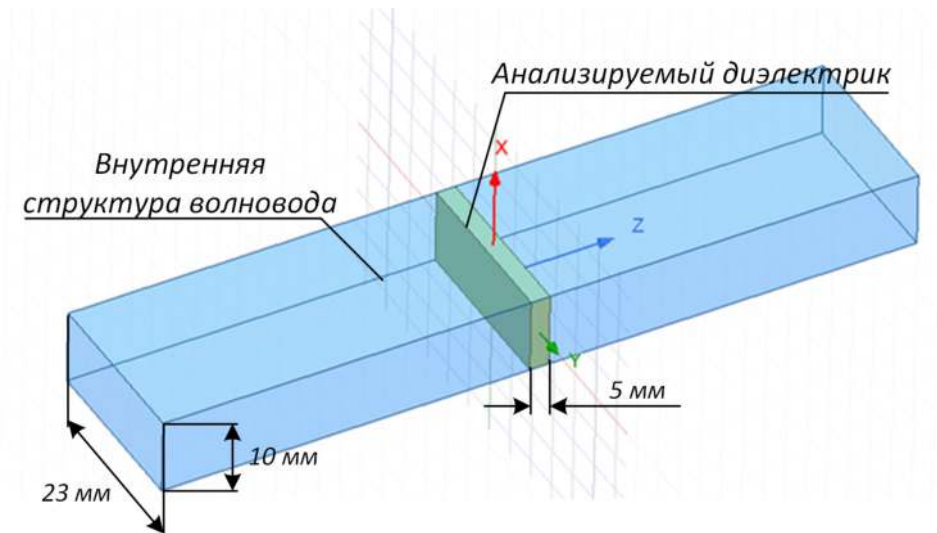


Рисунок 8.3 — Моделирование *TR* метода линии передачи в HFSS

$$\varepsilon_R = \frac{\lambda_0^2}{\mu_R} \left[\frac{1}{\lambda_c^2} - \left[\frac{1}{2\pi L} \ln \left(\frac{1}{z_1} \right) \right]^2 \right] \quad (8.1)$$

где: λ_0 — длина волны в свободном пространстве, λ_c — длина волны отсечки в волноводе, $\mu_R = 1$ — комплексная магнитная проницаемость относительно вакуума (это устраняет неоднозначность в логарифме), L — длина образца, z_1 — коэффициент передачи.

Подробный расчёт параметров, входящих в определение диэлектрической проницаемости, представлен в [210] (глава № 2, стр. 5–13). С помощью данной методики были определены параметры диэлектрической проницаемости при изменении шага печати исследуемого образца, позволяя тем самым изготавливать образцы с воздушными полостями. В качестве постоянных параметров при расчёте использовалась длина образца 5 мм и частота 10 ГГц, данные приведены в таблице 62.

Таблица 62 — Оценка ε материала методом *линии передачи*

ρ , г/см ³	F , ГГц	S_{11} , дБ	S_{21} , дБ	z_1	ε_R
1,25	10	-5,42	-1,50	2,66	1,22
			-1,35	2,63	1,45
			-1,12	2,59	1,68
			-0,98	2,56	1,91
			-0,76	2,53	2,12
			-0,63	2,50	2,33

Полученные результаты показывают, что варьированием плотности заполнения материала диэлектрическую проницаемость слоя можно изменять

в широких пределах с требуемой точностью. Установленная зависимость $\varepsilon(\rho)$ служит исходными данными для второй задачи — синтеза геометрии перфорации, реализующей заданный профиль проницаемости слой за слоем. Эта задача формулируется как параметрическая и решается средствами параметрического анализа и планирования эксперимента (*Parametric* и *Design of Experiment*) в *Ansys Electronics Desktop*, что позволяет автоматизировать подготовку геометрии к печати на 3D-принтере.

Основной задачей при изготовлении ЛЛ методом трёхмерного прототипирования является выбор наиболее оптимальной геометрии заполнения основного конструктивного элемента корпуса линзы. К настоящему времени опубликовано множество вариантов, в том числе ЛЛ, изготовленная путём печати на 3D-принтере с использованием технологии струйной полимеризации, включающей в структуру электромагнитные кристаллы [197]. В качестве примера будем уменьшать среднюю диэлектрическую проницаемость каждого слоя линзы с помощью кубических отверстий. Кубические отверстия можно создавать автоматически с помощью драйвера 3D-принтера. Добавление кубических воздушных наполнителей разного размера и с разным шагом позволит снизить диэлектрическую проницаемость до необходимого значения. Пример центральной сферы линзы (первого слоя) с подобным заполнением показан на рисунке 8.4.

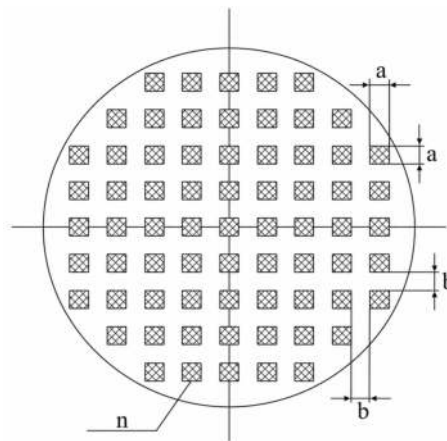


Рисунок 8.4 — Конструкция ЛЛ с перфорацией кубическими отверстиями

В геометрии, представленной на рисунке 8.4, диэлектрическая проницаемость регулируется с помощью трёх параметров: a — размера сторон кубического элемента, b — расстояния между элементами, n — количества элементов. Для достижения наиболее удовлетворительных электродинамических

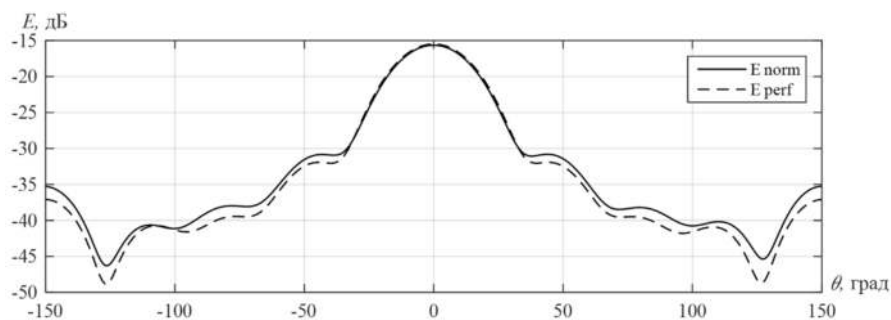
параметров при прохождении волны через подобную структуру необходимо соблюдать условие $a \ll \lambda$.

Физическую основу такого регулирования составляет теория эффективной среды, восходящая к классической работе С.М. Рытова о свойствах мелкослоистой среды [211]: при размерах включений много меньше длины волны ($a \ll \lambda$) перфорированный материал ведёт себя как однородный диэлектрик, эффективная проницаемость которого определяется объёмной долей воздуха f . В первом приближении (линейная модель смешения) $\epsilon_{\text{eff}} = (1 - f) \epsilon_{PLA} + f$ (проницаемость воздуха принята равной единице), а при плотной упаковке полостей точнее описывается формулой Максвелла–Гарнетта. Эти соотношения дают начальное приближение параметров a , b , n , которое затем уточняется параметрическим анализом по совпадению диаграмм рассеяния перфорированного и эквивалентного сплошного слоёв.

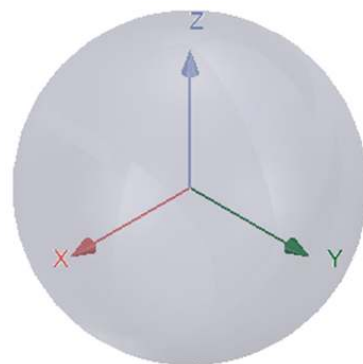
Для выбора параметров отверстий a, b, n , будет использоваться опция программного комплекса Ansys HFSS, отвечающая за возможность параметрического анализа. Суть данного подхода заключается в приближении к необходимым электродинамическим характеристикам за счёт изменения параметров геометрии модели. Рассмотрим в качестве основного материала *PLA*-пластик с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3,1$. После этого с помощью параметрического анализа параметры отверстий изменяются до тех пор, пока диаграмма рассеяния на сфере необходимой диэлектрической проницаемости не совпадёт с рассеянием на сфере с отверстиями. На рисунке 8.5 представлена геометрия первого слоя четырёхслойной линзы с перфорацией.

На рисунке 8.5а показана диаграмма рассеяния для этих двух геометрий. При этом график *E norm* показывает диаграмму рассеяния целой сферы с параметрами первого слоя линзы, а *E perf* показывает диаграмму рассеяния на сфере с перфорацией для того же слоя. Практическое совпадение огибающих *E norm* и *E perf* подтверждает, что перфорированный слой электродинамически эквивалентен сплошному с целевой проницаемостью, то есть параметры a , b , n подобраны корректно.

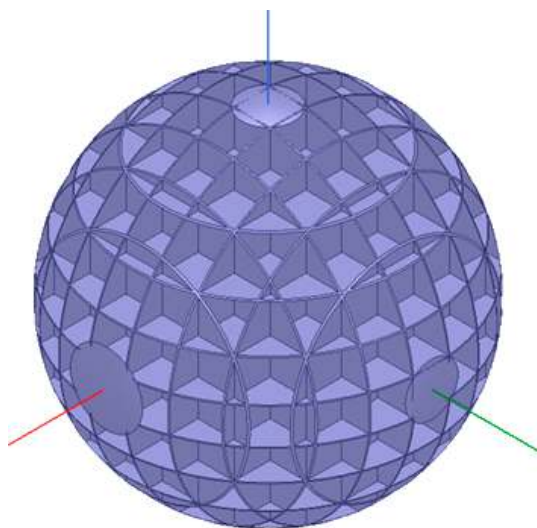
Одним из самых дешёвых 3D-принтеров является принтер для моделирования методом наплавления (FDM), который нагревает пластиковые нити выше температуры стеклования (T_g) и наносит их из сопла, обычно диаметром 400 мкм и толщиной слоёв 50 мкм. Более экстремальные технологии 3D-печати позволяют достичь различных минимальных размеров элементов, некоторые



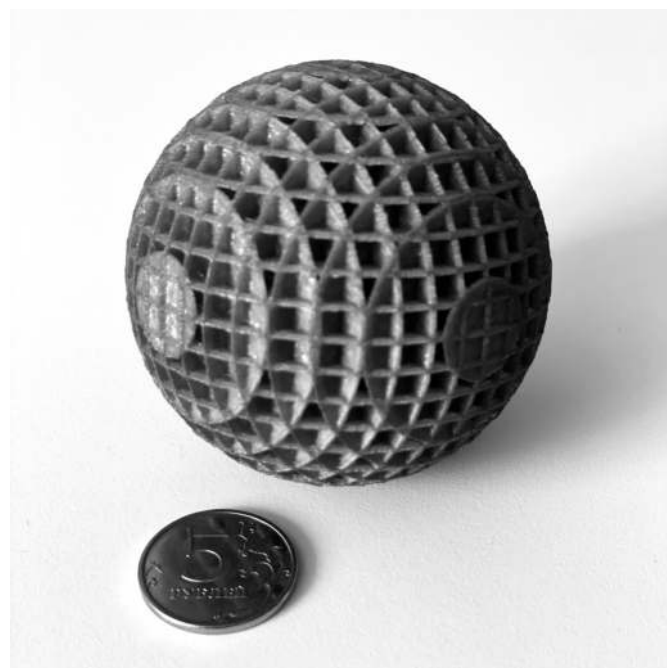
а) Диаграмма рассеяния на первом слое линзы



б) Слой ЛЛ с требуемой проницаемостью



в) Образец слоя ЛЛ с перфорацией



г) Изготовленный на 3D-принтере

Рисунок 8.5 — Геометрия линзы с перфорацией в виде кубов

из которых достигают 100 нм, с использованием двухфотонной полимеризации. Часто методы более высокого разрешения, использующие процессы литографии с фотополимерами, имеют тенденцию к увеличению диэлектрических потерь на порядок, а также стоимости материалов.

Материалы FDM, напротив, при более низком разрешении позволяют печатать относительно чистые термопластики с меньшими потерями [212]. Тем не менее, решётчатая структура обеспечивает дополнительную экономическую выгоду по сравнению с традиционными твёрдыми линзами Люнеберга со ступенчатым индексом за счёт уменьшения общего объёма используемого материала

примерно на 65%, исходя из объёма смоделированной решётчатой структуры в этой работе. Натуральный (неокрашенный) *ABS* — ещё один распространённый низкопотерьный термопластик, привлекательный механическими свойствами и температурной устойчивостью; в настоящей работе в качестве основного материала использован *PLA* ($\epsilon = 3,1$). В таблице 63 приводятся параметры заполнения пустыми отверстиями для каждого слоя четырёхслойной линзы. Приведённые данные могут быть использованы при создании геометрии линзы в программном пакете для трёхмерного моделирования с целью подготовки конструкции для печати на 3D-принтере [76].

Таблица 63 — Пример заполнения исходного материала *PLA*

L	Радиус r_L	ϵ_{PLA}	a , мм	b , мм	n , шт.	ϵ_L
1	0,47	3,1	5	1	5	1,88
2	0,67		5,2		7	1,67
3	0,82		5,3		9	1,44
4	0,94		5,5		10	1,22

Параметры приведены для четырёхслойной ЛЛ диаметром 50 мм, изготавливаемой методом FDM-печати из PLA-пластика ($\epsilon_{PLA} = 3,1$); решётчатая перфорация снижает объём используемого материала примерно на 65 % по сравнению со сплошной линзой. Обозначения: a — сторона кубического элемента, b — зазор между элементами, n — число элементов в слое; должно выполняться условие $a \ll \lambda$.

Приведены уточнённые значения размера a : в таблице 2 работы [76] этот столбец для слоёв 3 и 4 опубликован с опечаткой — значения 5,3 и 5,5 мм переставлены местами. Монотонный рост a по мере убывания ϵ_L физически необходим: меньшая проницаемость внешнего слоя достигается большей долей воздуха, то есть большим ребром кубической ячейки.

Хотя на точность печати могут влиять различные факторы, в том числе скорость печати, при условии, что объём экструдированного материала является точным, теория эффективной среды позволяет видимым дефектам оказывать ограниченное влияние на производительность [213]. Линза Люнеберга диаметром 50 мм изготавливается путём печати решётчатой сферы, как показано на рисунке 8.5г.

Таким образом, описанный подход — от измерения проницаемости перфорированного материала до синтеза параметров заполнения каждого слоя — автоматизирует подготовку ЛЛ к 3D-прототипированию. Необходимая для воспроизведения профиля проницаемости точность печати достижима на промышленных 3D-принтерах, а электродинамическая проверка полученной

слоистой структуры выполняется на следующем этапе средствами библиотеки *GreenTensor*.

8.5 Реализация линзы Люнеберга способом 3D-печати

8.5.1 Синтез линзы в форме многогранника Голдберга

Методом 3D-печати можно изготовить линзовые антенны в различном конструктивном исполнении. В качестве важных критериев при выборе конструкции можно отметить степень анизотропности линзы, прочность, сложность реализации, возможность точного приближения диэлектрической проницаемости слоёв к требуемым значениям закона Люнеберга. Также отметим, что в случае диэлектрической проницаемости используемого при 3D-печати материала более 2,5, возникает проблема получения механически прочного слоя, близкого к $\epsilon_r = 1$, что также зависит от конструкции ЛЛ.

На сегодняшний день исследователями предлагаются разные варианты напечатанных конструкций сферических ЛЛ [115], в том числе на основе наборов перфорированных диэлектрических дисков и печатных плат с электрически малыми рассеивателями [214; 215]. Наиболее широко распространённым вариантом является печать сферической линзы в виде набора элементарных ячеек одинакового размера кубической формы [32; 216]. Требуемый градиентный показатель преломления ЛЛ достигается степенью заполнения полимером каждой элементарной ячейки. Слои печатаются с разным процентным соотношением в кубической ячейке полимера и воздуха. Реализация такой конструкции проста, однако ей характерно отсутствие радиальной симметрии и анизотропия получаемой линзы. Кроме того, кубы соединяются стержнями, образуя решётчатый каркас, и он оказывает влияние на электромагнитные свойства линзы. Отметим, что управление эффективной проницаемостью через коэффициент заполнения используется и за пределами FDM-технологии — например, в планарных линзовых структурах на перфорированных печатных платах [215] — методологически тот же приём при иной технологии изготовления.

Мы исследуем реализацию ЛЛ в форме многогранника Голдберга, который представляет собой сферу, замощенную правильными шестиугольниками и небольшим количеством пятиугольников (рисунок 8.6). Частными случаями многогранника Голдберга являются додекаэдр и усечённый икосаэдр.

Модель сферической ЛЛ в форме сферического многогранника Голдберга обладает многими преимуществами: радиальная симметрия, высокая прочность конструкции, масштабируемость, отсутствие вспомогательных соединительных элементов в конструкции [217; 218].

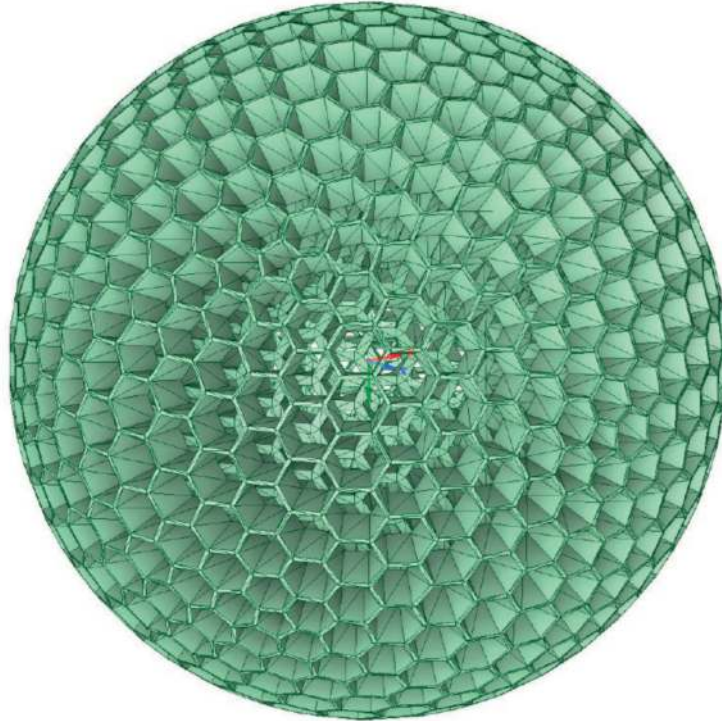


Рисунок 8.6 — Модель ЛЛ в форме многогранника Голдберга

Каждый слой ЛЛ строится с определённым размером шестиугольников и толщиной стенок между ними для достижения требуемого значения диэлектрической проницаемости. В качестве недостатка данной конструкции можно отметить сложность подбора размеров шестиугольников и толщины стенок при различных радиусах сферы для достижения заданной диэлектрической проницаемости слоя. Для сферы с фиксированным диаметром существует ограниченный диапазон возможных размеров шестиугольников и их количества. Например, если сферический многогранник представляет собой 32-гранное архимедово твёрдое тело с 60 вершинами и состоит из 20 шестиугольников и 12 пятиугольников (усечённый икосаэдр), то однозначная связь между радиусом r описанной вокруг него сферы и размерами стороны грани шестиугольника определяется выражением:

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{1 + 9\varphi^2} = \frac{a}{4} \sqrt{58 + 18\sqrt{5}} \quad (8.2)$$

где: a — сторона грани, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — константа золотого сечения.

Таким образом, в многограннике из 20 шестиугольников с радиусом описываемой сферы r сторона шестиугольника не может превышать определённого значения a .

Также стоит отметить, что сфера не может быть замощена одними лишь шестиугольниками. В теории комбинаторики многогранников связь между количеством граней, рёбер и вершин трёхмерного многогранника определяется формулой Эйлера для многогранников

$$\chi = G - R + V \quad (8.3)$$

где: χ — целочисленная характеристика топологического пространства; G, R, V — количество граней, рёбер и вершин соответственно. Любой выпуклый многогранник имеет характеристику Эйлера $\chi = 2$.

$$G - R + V = 2. \quad (8.4)$$

Если многогранник содержит P пятиугольников и H шестиугольников, тогда количество граней, рёбер и вершин многогранника будет равно $G = P + H$, $R = \frac{(5P + 6H)}{2}$, $V = \frac{(5P + 6H)}{3}$. Таким образом, характеристика Эйлера может быть выражена следующим образом:

$$G - R + V = P + H - \frac{1}{2}(5P + 6H) + \frac{1}{3}(5P + 6H) = \frac{P}{6}. \quad (8.5)$$

Из (8.4) и (8.5) следует, что $P = 12$, то есть многогранник Голдберга всегда имеет ровно 12 пятиугольных граней. 3D-модели многогранников Голдберга для каждого слоя ЛЛ с требуемыми радиусами и размерами граней были построены в программном пакете Blender и преобразованы в формат твердотельного моделирования в среде Ansys SpaceClaim. Сферический многогранник содержит 630 правильных шестиугольников и 12 пятиугольников.

Для определения размеров шестиугольных многогранников Голдберга для каждого слоя ЛЛ была проведена серия измерений комплексной относительной эффективной диэлектрической проницаемости элементов с воздушными отверстиями в форме сот. Была напечатана серия образцов в форме параллелепипедов с разными размерами шестиугольников в них, т.е. с разным коэффициентом заполнения образца пластиком (рисунок 8.7а). Измерения диэлектрической проницаемости проводились с использованием метода линии передачи на векторном анализаторе цепей [219]. В качестве линии передачи

использовался волновод стандарта *WR90* с рабочим диапазоном частот от 8 до 12 ГГц. При пересчёте измеренных значений комплексных коэффициентов передачи и отражения в значения комплексной относительной диэлектрической проницаемости использовался математический аппарат *Nicolson-Ross-Weir*.

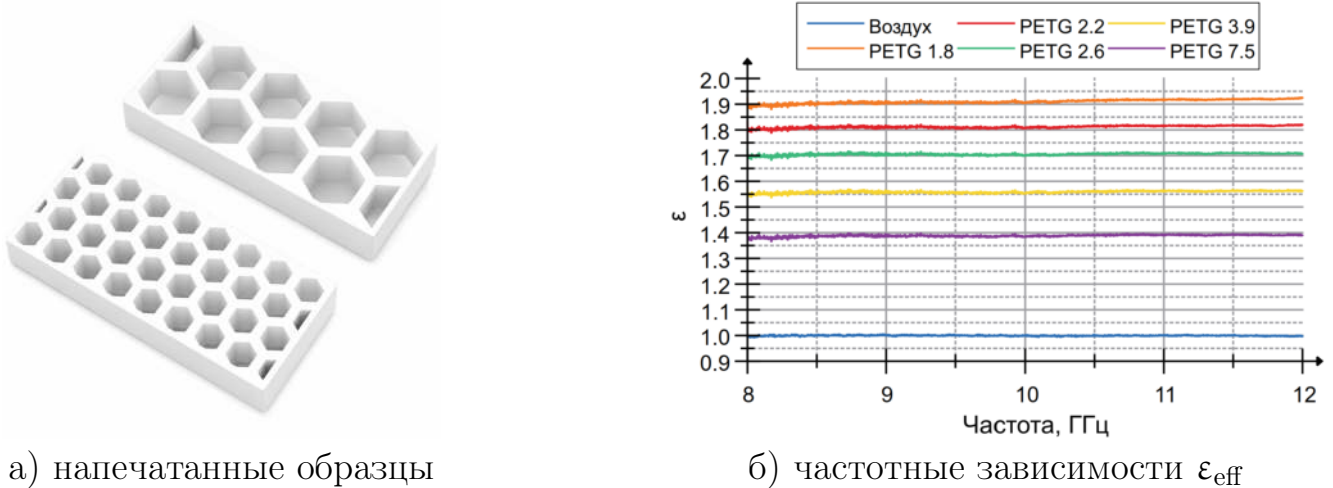


Рисунок 8.7 — Измерение относительной эффективной диэлектрической проницаемости перфорированных образцов *PETG*: (а) напечатанные образцы-параллелепипеды с разным коэффициентом заполнения; (б) частотные зависимости ϵ_{eff} в X-диапазоне для разных коэффициентов заполнения

Для учёта параметров используемой оснастки и волноводных линий передачи была произведена коррекция систематической погрешности измерительной системы с использованием *TRL* техники калибровки. Рассчитанное значение погрешности измерения действительной части относительной диэлектрической проницаемости при использовании в качестве измерителя векторного анализатора цепей *R&SZVA50* составило не более 5% и обуславливается погрешностью самого прибора.

Исследуемый образец материала помещался внутрь волноводного держателя образца, в связи с этим все исследуемые образцы имели размер 23×10 мм, соответствующий сечению используемого волновода. Для учёта несоответствия толщины образца и толщины волноводного держателя выполнялся сдвиг опорной плоскости измерения непосредственно к поверхности образца за счёт учёта имеющегося воздушного зазора.

На рисунке 8.7б приведены частотные зависимости относительной эффективной диэлектрической проницаемости исследуемых образцов материала¹ *PETG*, напечатанных на 3D-принтере с разным коэффициентом заполнения.

¹Цифровая часть названия материала на рисунке 8.7б показывает коэффициент заполнения образца при печати (отношения объёма воздуха к объёму используемого при печати на 3D-принтере).

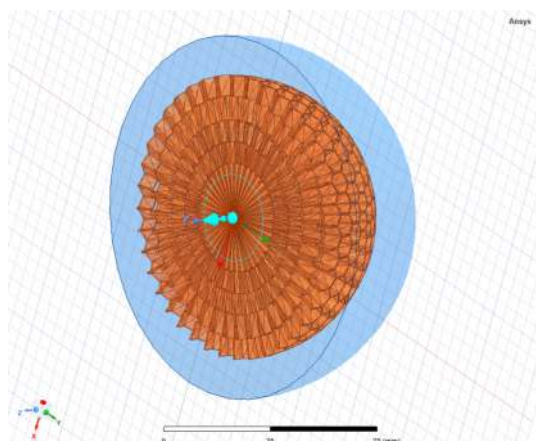
Таблица 64 — Характеристики слоёв ЛЛ

L	ϵ	Материал	Коэффициент заполнения*	Относительный радиус
1	1,91	PETG 1,8 4.1mm	0,542	0,30
2	1,81	PETG 2,2 4.2mm	0,512	0,42
3	1,70	PETG 2,6 4mm	0,458	0,54
4	1,56	PETG 3,9 4mm	0,410	0,66
5	1,39	PETG 7,5 4mm	0,256	0,78
6	1,00	Air	-	1,00
<i>Примечание:</i> *процентное содержание полимера в заданном объёме образца.				

Из этих характеристик видно, что в диапазоне частот 10...12 ГГц параметры материала практически не изменяются.

Для моделирования ЛЛ использованы значения ϵ_{eff} образцов при частоте 10 ГГц. Параметры слоёв приведены в таблице 64; здесь решается «обратная» задача синтеза — относительный радиус слоя подбирается по измеренным параметрам материала.

На рисунке 8.8 представлена напечатанная на 3D-принтере из материала PETG ЛЛ, слои которой соответствуют параметрам, приведённым в таблице 64.



а) Модель в Ansys HFSS

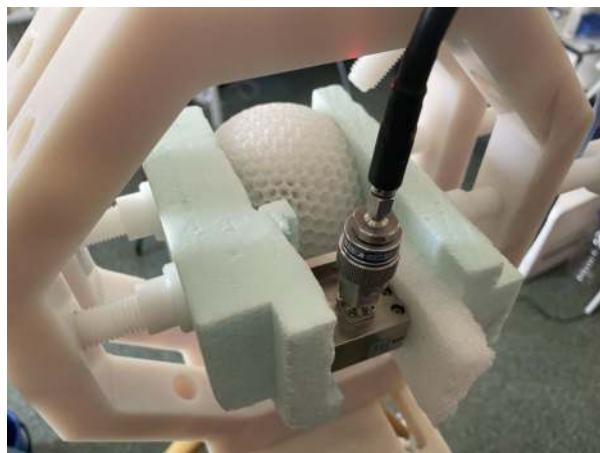


б) Изготовленная на 3D-принтере

Рисунок 8.8 — Линза Люнеберга с перфорацией

Для экспериментального определения характеристик изготовленной ЛЛ в режиме антенны измерялась её диаграмма направленности. В качестве излучателя использовался коаксиально-волноводный переход (КВП) стандарта *WR90*. Источником и анализатором зондирующего сигнала служил векторный анализатор цепей *RES ZVA50*. Испытуемая антенная система, состоящая из ЛЛ и

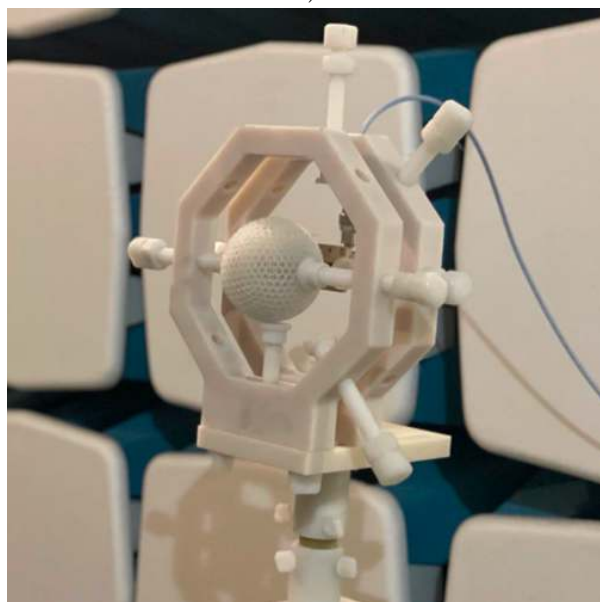
КВП, работала в режиме передачи; приёмной антенной выступал аналогичный КВП. Расстояние между передающей и приёмной антеннами составляло 2,8 м. Фотографии измерительной установки представлены на рисунке 8.9.



а)



б)



в)



г)

Рисунок 8.9 — Измерительная установка для определения характеристик напечатанной ЛЛ из материала *PETG*

Для определения угловых характеристик антенной системы регистрировался коэффициент передачи S_{21} между исследуемой антенной, подключённой к первому порту анализатора цепей, и эталонным КВП — к его второму порту. Угловая развёртка диаграммы получалась вращением исследуемой антенной системы вокруг центра ЛЛ с шагом в два градуса.

Условия дальней зоны, калибровка и погрешности. Регистрация диаграммы выполнялась в условиях дальней (фраунгоферовой) зоны: для линзы

диаметром $D \approx 73$ мм на частоте $f = 10$ ГГц ($\lambda = 30$ мм) граница дальней зоны $R_{\text{ф}} = 2D^2/\lambda \approx 0,36$ м, тогда как разнесение приёмной и передающей антенн составляло $R = 2,8$ м, что обеспечивает почти восьмикратный запас по дальности и практически плоский фазовый фронт в раскрыве. Калибровка измерительного тракта выполнялась нормировкой коэффициента передачи S_{21} на опорное соединение двух КВП (сквозная *through*-калибровка анализатора *RESONANCE ZVA50*), что исключает из результата собственные потери кабельного тракта и волноводных переходов. Угловое разрешение диаграммы определяется шагом поворота поворотного устройства $\Delta\theta = 2^\circ$. Основным источником погрешности служит дисперсия эффективной диэлектрической проницаемости по поверхности напечатанных слоёв; методическая погрешность измерения ϵ_{eff} методом NRW в волноводном тракте при этом не превышает 5 % (TRL-калибровка, см. выше) и проявляется как расхождение расчётной и измеренной диаграмм при больших азимутальных углах (рис. 8.10).

Для сравнения на рисунке 8.10 для ЛЛ на частоте 10 ГГц приведены графики диаграмм рассеяния, полученные расчётным путём и в результате экспериментальных исследований. На графиках видно хорошее соответствие экспериментальных и расчётных диаграмм. Некоторое расхождение графиков при больших значениях угла азимута может быть связано с погрешностью изготовления линзы методом 3D-печати вследствие дисперсии значения эффективной диэлектрической проницаемости по поверхности слоя.

По результатам экспериментальной верификации сформулированы следующие рекомендации по выбору параметров многослойной ЛЛ при реализации средствами аддитивных технологий.

- В режиме рассеяния фокусирующие свойства линзы начинают проявляться при её диаметре более двух длин волн. При диаметрах 7...8 длин волн наблюдается выраженное усиление в направлении падающей электромагнитной волны. У линз с диаметром более 10...12 длин волн зависимость усиления от диаметра близка к линейной, однако при дальнейшем увеличении размера темп роста замедляется до величины порядка 1 дБ на длину волны. Эта зависимость удобна для предварительных инженерных оценок характеристик линзы в режиме рассеяния.
- В таблицах 3, 28 и 29 приведены различные варианты аппроксимации закона Люнеберга. При проектировании ЛЛ под конкретные рабочие

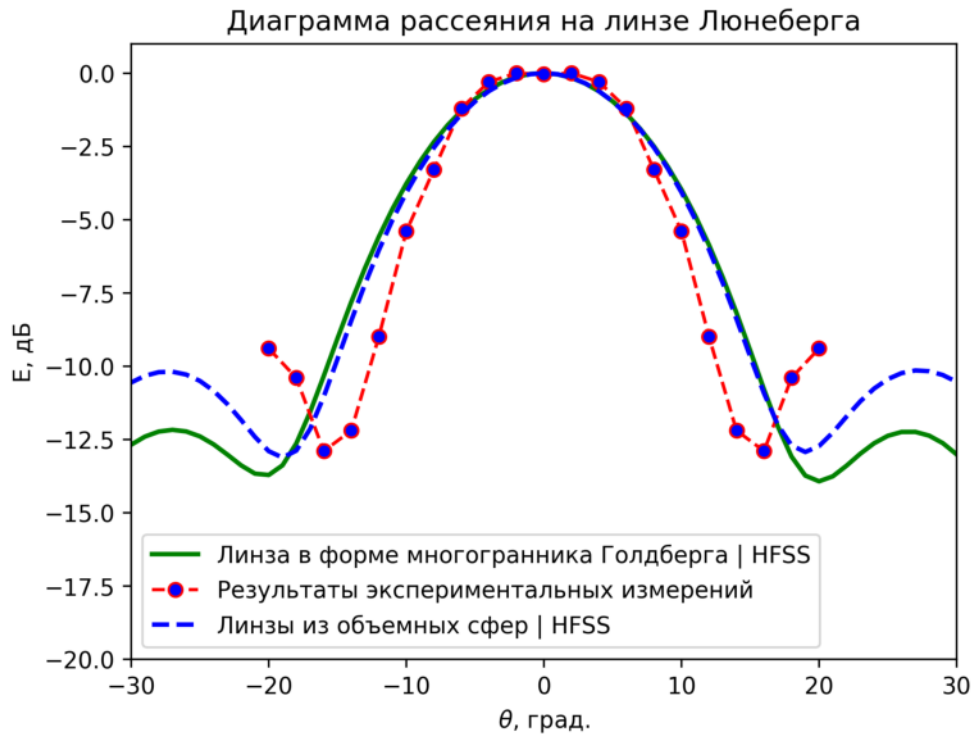


Рисунок 8.10 — Сравнение расчётных и экспериментальных зависимостей диаграммы рассеяния ЛЛ от угла в азимутальной плоскости для частоты 10 ГГц

частоты и технические требования в качестве стартовых значений для оптимизатора *MOGA* рекомендуется использовать параметры слоёв из таблицы 29. Сравнение способов аппроксимации приведено на рисунках 1.7, 4.3 и 4.5; из него видно, что разбиение ЛЛ на число слоёв $L > 10$ не даёт заметного практического выигрыша.

- Предложенный порядок действий при реализации многослойной ЛЛ методом 3D-печати в виде многогранника Голдберга апробирован экспериментально и может быть принят как базовый при проектировании иных типов линзовых систем.

8.5.2 Синтез линзы Люнеберга для управления ЭПР летательного аппарата

Рассматривается конструкция ЛЛ, предназначенной для размещения на борту летательного аппарата [74]. В таких задачах линза используется в качестве пассивного отражателя, искусственно увеличивающего эффективную площадь рассеяния (ЭПР) объекта. ЭПР характеризует интенсивность обратного рассеяния электромагнитного поля: чем она больше, тем заметнее объект

для радиолокационных средств наблюдения [137; 168].

Линза Люнеберга представляет собой сферическую диэлектрическую структуру с градиентным показателем преломления, фокусирующую параллельные лучи в точку на противоположной стороне сферы. При частичной металлизации поверхности падающее излучение фокусируется на отражающем экране и возвращается обратно в сторону источника; тем самым формируется *пассивный радарный отражатель* — так называемая «линза с экраном». Такие отражатели применяются для управления ЭПР летательных аппаратов в задачах радиолокационной маркировки и калибровки радарных систем. В отличие от уголковых отражателей, сферическая линза практически не изменяет аэродинамику несущего её объекта.

В настоящем разделе рассматривается методика изготовления ЛЛ средствами 3D-печати. На рисунке 8.11 приведены: (слева) исходная твердотельная модель линзы в формате *STEP*, а также два изготовленных образца:

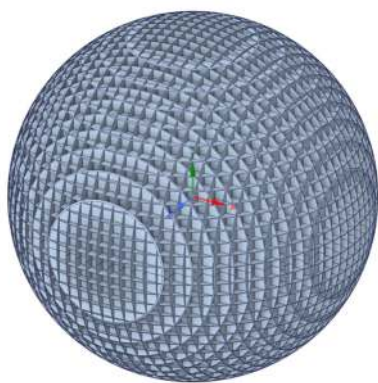
— образец, выполненный авторским коллективом в 2024 году по техническому заданию внешнего заказчика (организация «А»; по центру); параметры этого образца не раскрываются в силу действующего соглашения о конфиденциальности;

— образец, изготовленный по расчётно-экспериментальной методике, излагаемой в настоящем разделе (справа).

Оба образца предназначены для установки на летательные аппараты в качестве пассивных радарных отражателей.

Раздел построен следующим образом. Вначале формулируются требования к электрофизическим параметрам ЛЛ с точки зрения управления значением ЭПР несущей платформы. Затем приводится обоснование предварительного расчёта многослойной сферической структуры с использованием библиотеки *GreenTensor*, разработанной автором и его коллегами и размещённой в открытом доступе на *GitHub*; правомерность её применения подтверждается численными результатами — диаграммами рассеяния составляющих поля для выбранной конфигурации ЛЛ.

Далее рассматривается практическая реализация линзы: подбираются размеры слоёв и материалы, сопоставляются методы 3D-печати (FDM-печать и фотополимерная печать). Отдельно обсуждается оптимизированный вариант стратификации ЛЛ с металлическим экраном, обеспечивающий заданный уровень изменения ЭПР структуры; представлены соответствующие численные



а) Step модель ЛЛ



б) Образец ЛЛ, выполненный в соответствии с техническим заданием, предложенным заказчиком



в) Образец ЛЛ, изготовленный по результатам данной статьи

Рисунок 8.11 — Модель ЛЛ (слева) и результат её изготовления средствами 3D-печати (по центру и справа)

результаты.

При решении задачи управления ЭПР летательного аппарата его корпус проектируется с учётом дополнительно встраиваемого в конструкцию элемента — чаще всего многослойной ЛЛ с металлическим экраном. Для достижения заданного значения ЭПР разработчику линзы требуется тщательно подобрать материал слоёв с контролем коэффициента преломления. Процедура подбора диэлектрической проницаемости достаточно трудоёмка: поиск оптимального решения ведётся по диаграммам рассеяния и бистатическим коэффициентам рассеяния, получаемым либо с помощью высокочастотного структурного симулятора (Ansys HFSS), либо, как это сделано в настоящей работе, на основе метода тензорных функций Грина.

Отметим, что материалы с малой диэлектрической проницаемостью — в частности, пенопласт ($\epsilon \in [1,1; 1,87]$) — при требуемых электрических размерах линзы приводят к массе готового изделия $10 \dots 12$ кг. В задачах, где критична масса несущей конструкции, такой вес недопустим, так как существенно ухудшает её эксплуатационные характеристики. Поэтому варианты исполнения ЛЛ на основе пенопласта в дальнейшем не рассматриваются.

Типичные требования к ЭПР-характеристикам ЛЛ с металлическим экраном, а также рост суммарной ЭПР при использовании нескольких переотражателей приведены в таблице 65.

Таблица 65 — Целевые параметры ЭПР для ЛЛ с металлическим экраном и рост суммарной ЭПР при нескольких переотражателях

№ п/п	Параметр	Число переотражателей N			
		1	2	3	4
1	ЭПР _{max} , кв. м	11,7	23,4	35,1	46,8
2	ЭПР в раскрыве 60°, кв. м	> 7,5	> 15,0	> 22,5	> 30,0
3	ЭПР в раскрыве 120°, кв. м	> 3,0	> 6,0	> 9,0	> 12,0
4	Азимутальное покрытие, град	120	240	360	360

Значения для $N = 1$ соответствуют одиночному переотражателю с ЭПР σ_1 . Для пространственно разнесённых элементов суммарная ЭПР при усреднении по ракурсу складывается некогерентно (по мощности): $\sigma_\Sigma = \sum_i \sigma_i = N\sigma_1$. Теоретический верхний предел при синфазном (когерентном) сложении совмещённых элементов $\sigma_\Sigma = (\sum_i \sqrt{\sigma_i})^2 = N^2\sigma_1$ (для $N = 4$ — до 187 кв. м) достигается лишь в узком угловом секторе. Азимутальное покрытие — сектор, в котором сохраняется уровень ЭПР ≥ 3 кв. м при размещении переотражателей по периметру объекта (рис. 8.12).

Одиночный переотражатель формирует повышенную ЭПР лишь в ограниченном угловом секторе (раскрыв порядка 120°). Когда требуется сохранить заданный уровень ЭПР в широком диапазоне ракурсов, на объекте размещают несколько таких элементов, ориентируя их экраны в разные стороны (рис. 8.12). При пространственном разнесении переотражателей на расстояния, многократно превышающие длину волны, их вклады складываются некогерентно, и суммарная ЭПР при усреднении по ракурсу растёт пропорционально числу элементов: $\sigma_\Sigma = N\sigma_1$. В направлениях, где секторы соседних элементов перекрываются, мгновенная ЭПР удваивается, а теоретический максимум при синфазном сложении достигает $N^2\sigma_1$. Размещение трёх переотражателей в вершинах треугольника (120° друг от друга) обеспечивает круговое покрытие 360°; четвёртый элемент создаёт перекрытие секторов и поднимает гарантированный уровень ЭПР.

В качестве материала ЛЛ выбран HIPS-пластик: при сопоставимых электрических характеристиках он обеспечивает наименьшую массу готового изделия среди рассмотренных альтернатив.

С учётом доступного диапазона изменения эффективной диэлектрической проницаемости слоёв оптимальной по массогабаритным показателям оказалась четырёхслойная ЛЛ. Пятый слой представляет собой обычный пенопласт и играет роль диэлектрического зазора между телом линзы и экраном. Параметры

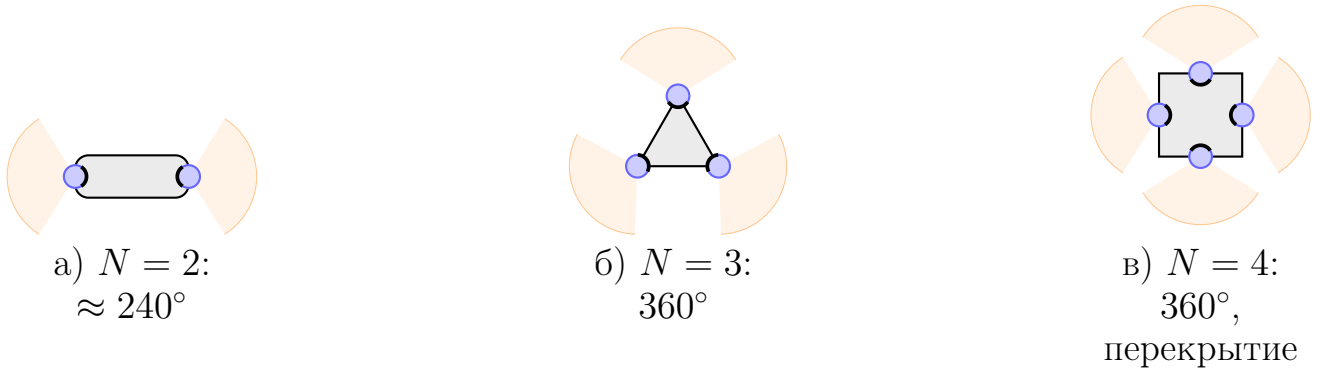


Рисунок 8.12 — Размещение нескольких переотражателей по периметру объекта: (а) двух — вдоль ребра, (б) трёх — в вершинах треугольника, (в) четырёх — по сторонам квадрата. Круг — линза Люнеберга, дуга — металлический экран, сектор — зона переотражения (раскрыв $\approx 120^\circ$); в зонах перекрытия секторов ЭПР складывается

Таблица 66 — Параметры слоёв ЛЛ из пенопласта переменной плотности: относительные (a , ϵ) и реальные (диаметр, k_0a)

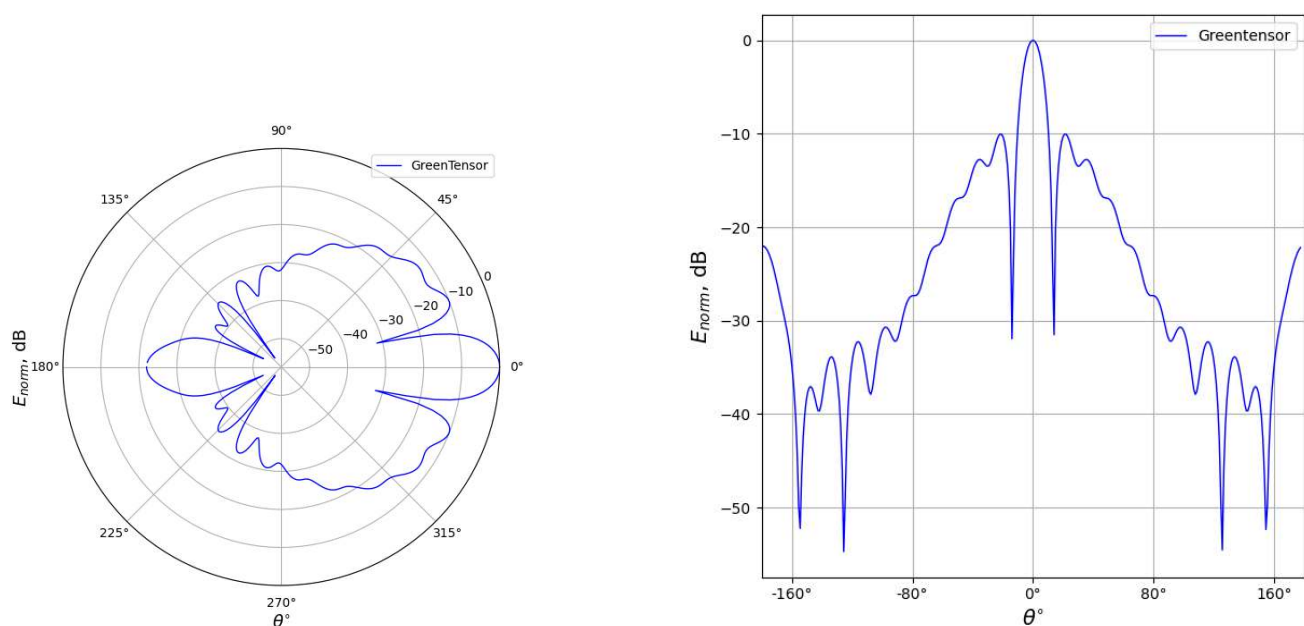
L	a	Диаметр слоя, мм	k_0a	ϵ	материал
1	0,47	61,1	$2,04\pi$	1,88	синтезированный слой
2	0,67	87,1	$2,9\pi$	1,67	синтезированный слой
3	0,82	106,6	$3,55\pi$	1,44	синтезированный слой
4	0,94	122,2	$4,07\pi$	1,22	синтезированный слой
5	1,00	130	$4,33\pi$	—	пенопласт без добавок
6	1,00	130	$4,33\pi$	—	проводящий экран (полусфера)

слоёв четырёхслойной ЛЛ для частоты 10 ГГц приведены в таблице 66.

Моделирование объёмных диэлектрических структур — задача, затратная по объёму требуемых вычислительных ресурсов. Поэтому для предварительного расчёта «тела» линзы использована библиотека *GreenTensor*, выложенная на *GitHub* [46]. В таблице 66 приведены реальные размеры слоёв ЛЛ, их нормированные аналоги (относительный радиус a и электрический размер k_0a), диэлектрическая проницаемость ϵ и состав слоёв.

На рисунке 8.13 представлены результаты расчёта диаграммы рассеяния электромагнитного поля для ЛЛ с параметрами $k_0a = 4,33\pi$, $n = 5$ и параметрами слоёв из таблицы 66.

Отметим, что на данном этапе исследования рассматривается модель ЛЛ без экрана: одна из задач — получить эталонные параметры изделия, пригодные для дальнейшего «запуска» в производство. Роль пятого слоя при этом может



а) полярная система координат б) прямоугольная система координат
Рисунок 8.13 — Диаграмма рассеяния, полученная с помощью библиотеки GreenTensor

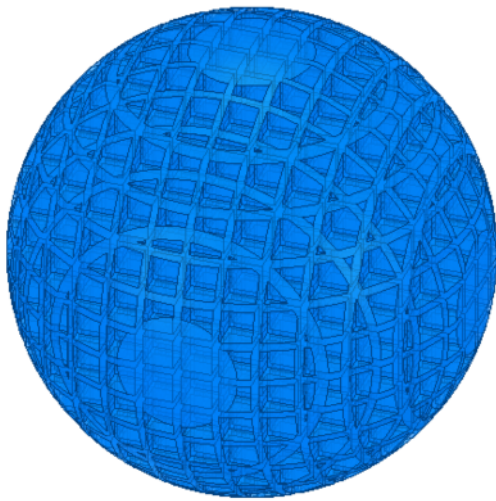
выполнять любой материал с диэлектрической проницаемостью ϵ , близкой к единице; этот слой играет роль воздушного зазора между линзой и экраном.

Один из способов изготовления ЛЛ средствами 3D-печати основан на понижении средней диэлектрической проницаемости слоя путём введения в материал регулярной решётки пустот. Другие подходы связаны с повышением плотности материала за счёт добавления примесей или с применением синтезированных материалов [220—222]. Сами пустоты могут выполняться в виде повторяющихся элементов кубической, сферической или цилиндрической формы. При выборе формы следует учитывать разрешающую способность 3D-принтера, на котором будет изготавливаться слой линзы. Наиболее универсальной оказывается кубическая перфорация — именно она использована при реализации рассматриваемой модели ЛЛ (рисунок 8.14).

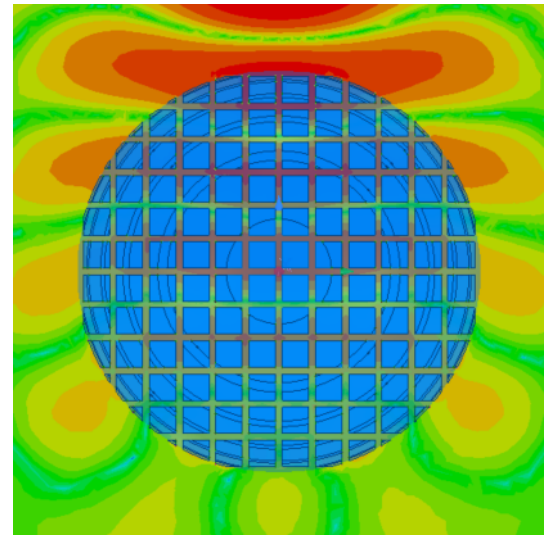
В таблице 67 приведены параметры перфорации слоёв, соответствующие параметрам слоёв из таблицы 66. Поиск оптимальных параметров слоёв — самостоятельная задача, рассматриваемая в ряде работ [223; 224].

Корректность выбора параметров перфорации подтверждается результатами, приведёнными на рисунке 8.15: величина rE представляет собой нормированную напряжённость поля (в децибелах) как функцию угла наблюдения.

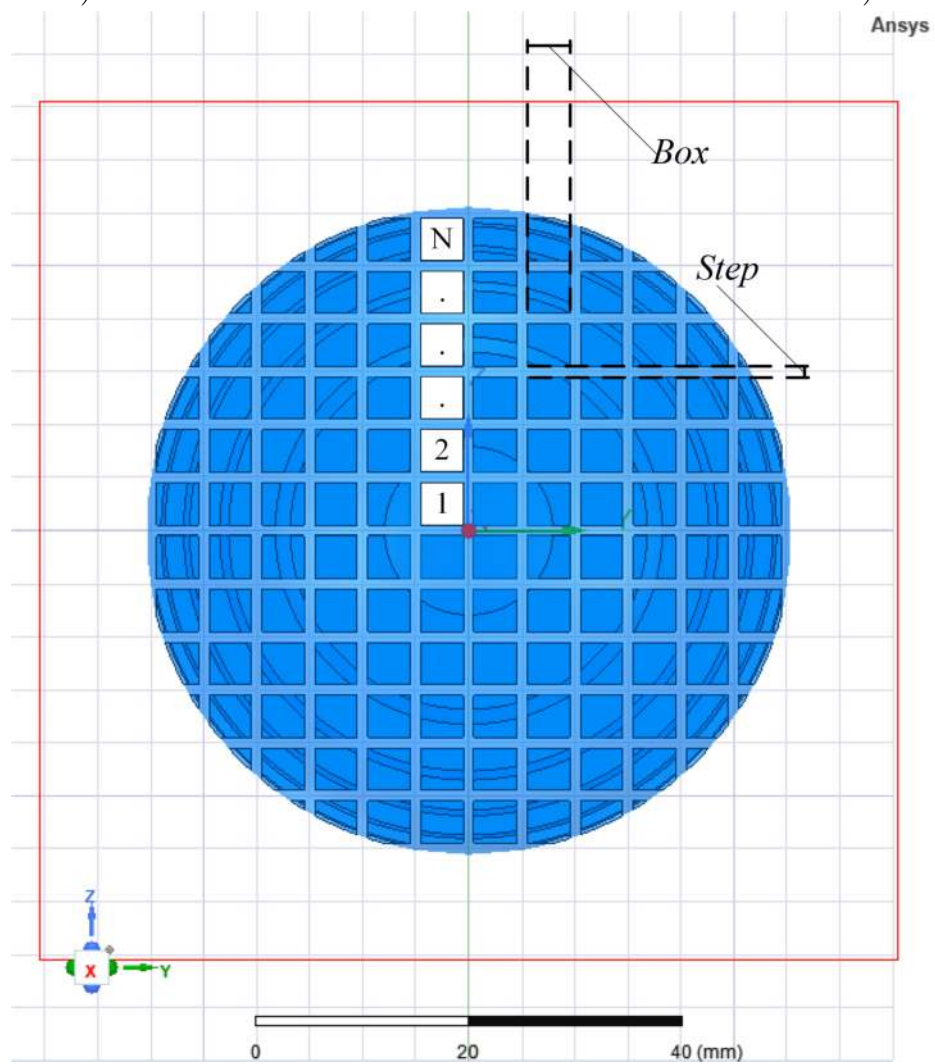
Геометрия модели линзы, изготовленной из материала HIPS ($\epsilon = 3$), пока-



a)



б)



в) *Box* — размер грани пустоты в виде куба, *Step* — зазор между гранями, *N* — количество кубов от начала системы координат до края слоя

Рисунок 8.14 — Геометрия линзы с перфорацией кубической геометрией

Таблица 67 — Параметры заполнения слоёв ЛЛ пустотами

Параметр	$L1$	$L2$	$L3$	$L4$
Нормированный радиус	0,47	0,67	0,82	0,94
Радиус слоя, мм	30,55	41,4	53,3	61,1
Box, мм	4	4	4	7
Step, мм	1	0,7	0,4	0,4
N	6	10	12	8

зана на рисунке 8.16. Прямой расчёт такой структуры с большим количеством полигонов методом конечных элементов (FEM, HFSS Design) крайне ресурсоёмок: подобная геометрия требует порядка 200 Гб оперативной памяти. Поэтому для проверки фокусирующих свойств рассчитан лишь фрагмент — вырезанная центральная часть сферы (рисунок 8.16б). В работах [17; 168] приведены менее затратные методы анализа подобных структур, однако к моделям с перфорацией их применение затруднено. Параметры заполнения пустот могут подбираться с помощью алгоритма MOGA [179], реализованного во многих пакетах математического и электродинамического моделирования (Matlab, HFSS).

Отметим, что существует широкий набор методов контроля диэлектрической проницаемости [32; 216]. Однако в решаемой задаче наиболее эффективным оказался приём сравнения диаграмм рассеяния: он позволяет проверить корректность синтеза слоёв ещё до изготовления линзы.

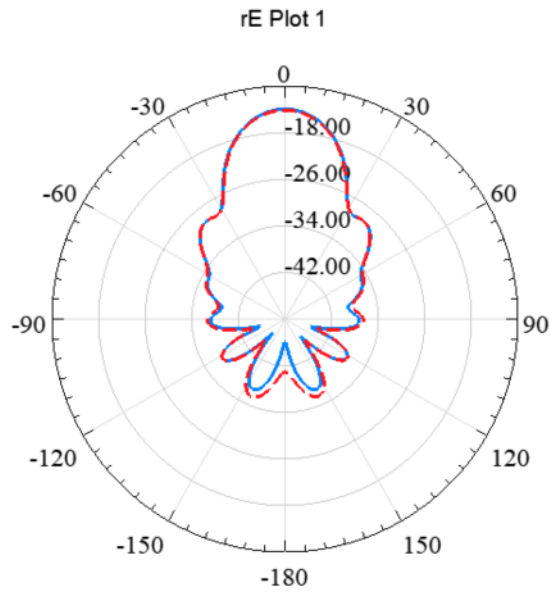
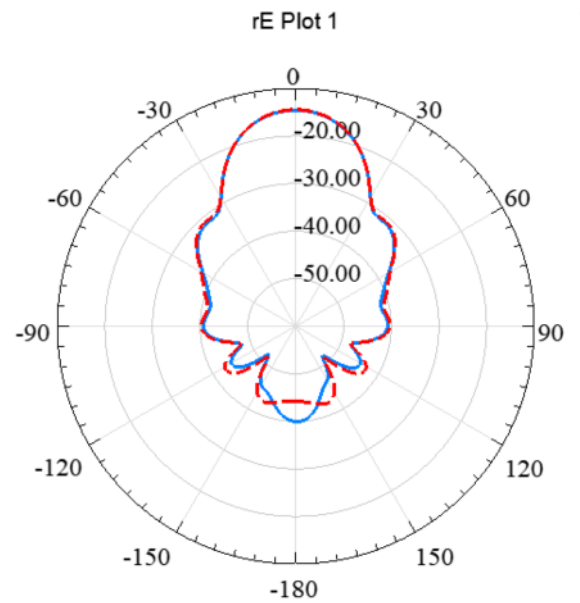
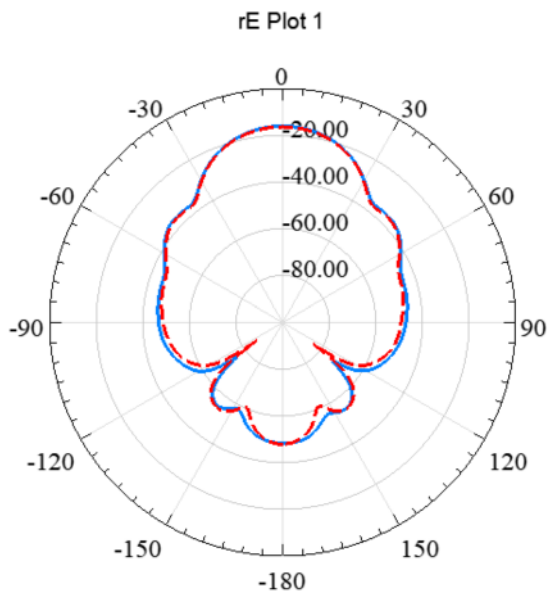
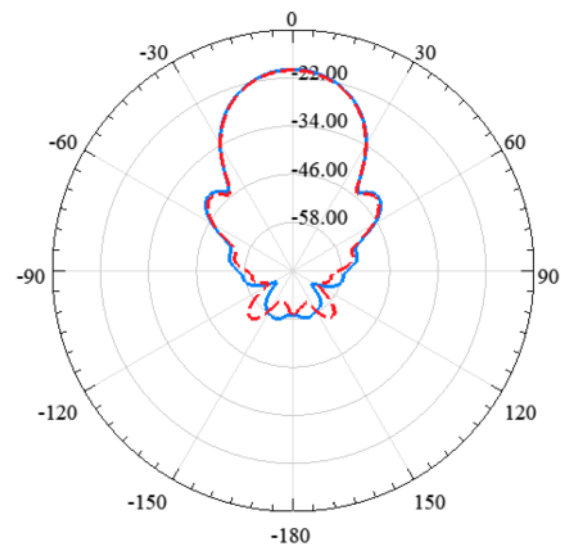
а) $\varepsilon = 1,88$ б) $\varepsilon = 1,67$ в) $\varepsilon = 1,44$ г) $\varepsilon = 1,22$

Рисунок 8.15 — Сравнение диаграмм рассеяния на синтезированной сфере с кубическими пустотами (синяя сплошная линия) и твердотельной конструкции из сплошного материала (красная пунктирная линия)

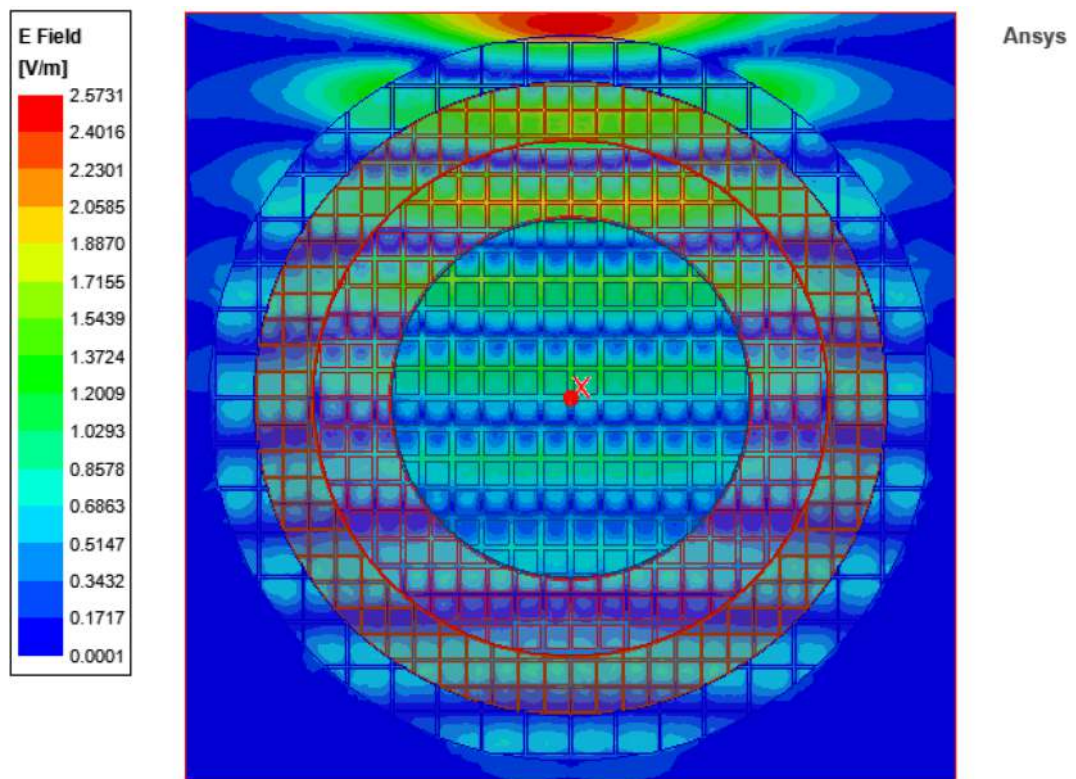
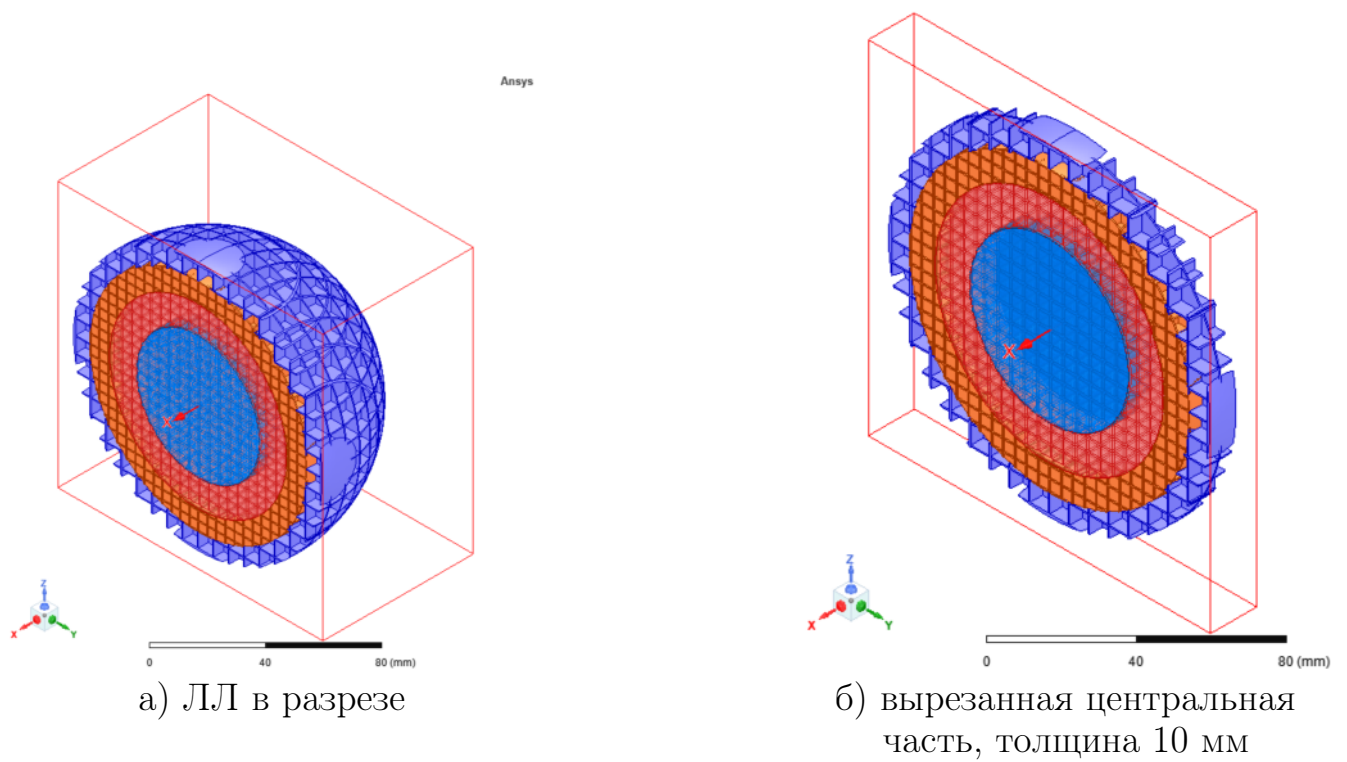


Рисунок 8.16 — Наложение электромагнитного поля на синтезированную геометрию ЛЛ

Аналитический расчёт параметров кубических пустот для пластика HIPS

Синтез слоёв ЛЛ методом перфорации сводится к задаче подбора параметров кубической решётки пустот (Box, Step, N), при которых эффективная диэлектрическая проницаемость ϵ_{eff} каждого слоя совпадает с требуемым значением $\epsilon_{\text{цель}}$, предписанным аппроксимацией закона Люнеберга. Ниже представлен аналитический вывод необходимых соотношений применительно к пластику HIPS, используемому для FDM-печати линзы диаметром $D = 73$ мм на рабочей частоте $f = 10$ ГГц. На рисунке 8.17 показана трёхмерная модель синтезированной HIPS-линзы с регулярной кубической перфорацией матрицы; такая структура позволяет реализовать требуемый градиент диэлектрической проницаемости $\epsilon(r) = 2 - r^2$ пассивным способом — варьированием геометрии пустот, без изменения свойств основного материала.

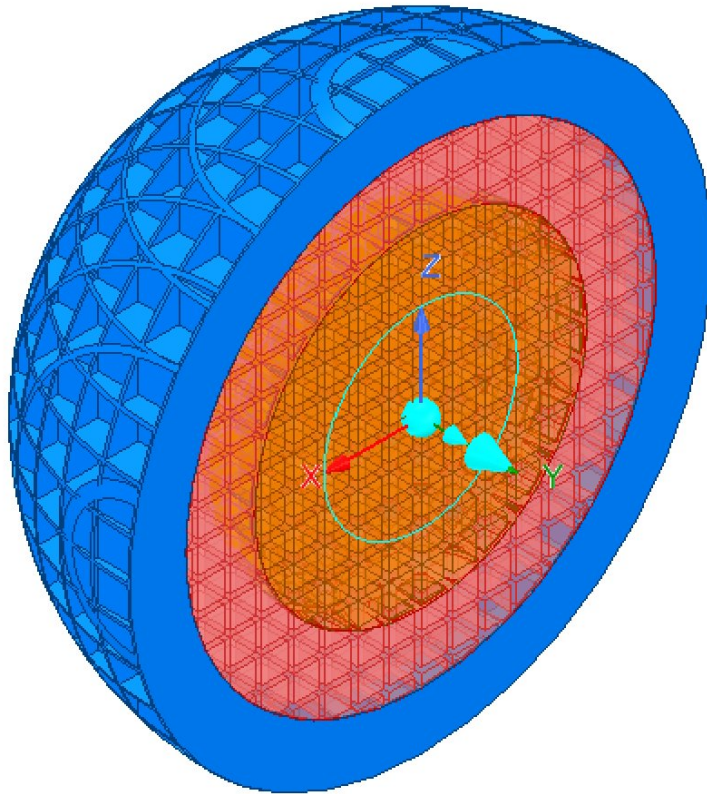


Рисунок 8.17 — Трёхмерная модель HIPS-ЛЛ с кубической перфорацией матрицы, реализующая градиент диэлектрической проницаемости $\epsilon(r) = 2 - r^2$.

Цветом выделены слои с различной плотностью кубических пустот

Уточнённая модель HIPS и переход от $\varepsilon = 3$ к $\varepsilon = 2,4$. В более ранних расчётах (см. начало текущего раздела) диэлектрическая проницаемость HIPS принималась равной $\varepsilon = 3$. Повторное измерение образцов методом линии передачи (NRW-алгоритм) в X-диапазоне при 100 %-м заполнении FDM-печати дало уточнённое значение $\varepsilon_m = 2,4$ и $\operatorname{tg} \delta = 0,001$. Это связано с тем, что реальная плотность FDM-отпечатка заметно ниже плотности компактной плёнки HIPS: между слоями укладки филамента остаются микропустоты технологического происхождения, снижающие эффективную проницаемость материала матрицы. Все приводимые далее выкладки и параметры слоёв соответствуют именно этому уточнённому значению $\varepsilon_m = 2,4$.

$$\varepsilon_m = 2,4, \quad \operatorname{tg} \delta = 0,001. \quad (8.6)$$

Значение ε_m в (8.6) используется далее как проницаемость материала матрицы при расчёте эффективной проницаемости многослойной структуры с воздушными пустотами.

Параметры слоёв трёхслойной ЛЛ. Для трёхслойного исполнения ($L = 3$) при оптимизированной равношаговой аппроксимации профиля Люнеберга (таблица 28) нормированные радиусы и целевые проницаемости слоёв составляют:

$$a_l^{\text{норм}} = 0,53; 0,75; 0,93, \quad \varepsilon_{\text{цель},l} = 1,86; 1,57; 1,28 \quad (l = 1, 2, 3). \quad (8.7)$$

Реальный радиус l -го слоя:

$$r_l = a_l^{\text{норм}} \cdot R, \quad R = D/2 = 36,5 \text{ мм}. \quad (8.8)$$

Геометрия единичной ячейки. Единичная ячейка трёхмерной решётки пустот показана на рисунке 8.18. Она представляет собой куб пустоты со стороной Box , окружённый стенкой диэлектрика толщиной $\Delta = \text{Step}$ до ближайшей соседней ячейки. Период решётки:

$$P = \text{Box} + \text{Step}. \quad (8.9)$$

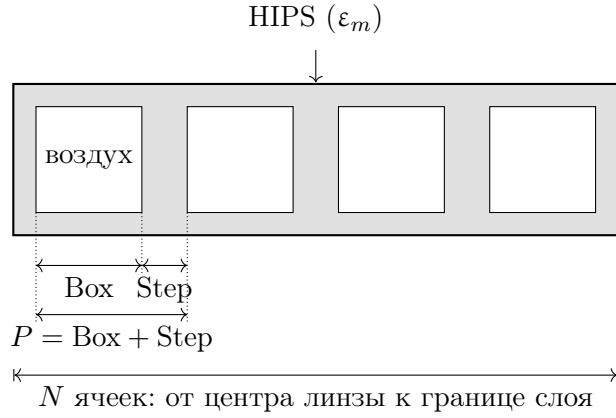


Рисунок 8.18 — Геометрия элементарной ячейки слоя HIPS-ЛЛ. Параметр Box — сторона воздушной пустоты, Step — толщина диэлектрической стенки между соседними пустотами, $P = \text{Box} + \text{Step}$ — период решётки. Число N — количество ячеек, укладываемых от центра линзы до границы слоя

Линейная модель смешения. При введении кубических пустот (включения воздуха с $\epsilon_i = 1$) в диэлектрическую матрицу с $\epsilon_m = 2,4$ эффективная проницаемость описывается линейной моделью смешения (Релеевское приближение):

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_m(1 - V_{\text{air}}) + V_{\text{air}}, \quad (8.10)$$

где V_{air} — объёмная доля воздуха. Из (8.10) следует выражение для требуемой доли воздуха:

$$V_{\text{air}} = \frac{\epsilon_m - \epsilon_{\text{цель}}}{\epsilon_m - 1}. \quad (8.11)$$

Объёмная доля воздуха в трёхмерной решётке выражается через линейный коэффициент заполнения f :

$$V_{\text{air}} = \left(\frac{\text{Box}}{P} \right)^3 = f^3, \quad (8.12)$$

откуда с учётом (8.11):

$$f = V_{\text{air}}^{1/3} = \left(\frac{\epsilon_m - \epsilon_{\text{цель}}}{\epsilon_m - 1} \right)^{1/3}. \quad (8.13)$$

Соотношение между Box и Step :

$$\text{Step} = \text{Box} \cdot \frac{1 - f}{f}, \quad \text{Box} = \text{Step} \cdot \frac{f}{1 - f}. \quad (8.14)$$

Число кубов N . Количество ячеек от центра координат до границы слоя (округление всегда вверх во избежание незаполненной краевой зоны):

$$N = \left\lceil \frac{r_l}{P} \right\rceil. \quad (8.15)$$

Критерий эффективной среды. Приближение однородного диэлектрика справедливо при выполнении условия:

$$P < \frac{\lambda}{5}, \quad (8.16)$$

где $\lambda = c/f$ — длина волны в свободном пространстве. При $f = 10$ ГГц имеем $\lambda = 30$ мм, откуда $P < 6$ мм.

Уточнение для высокой доли воздуха: модель Максвелла–Гарнетта. Линейная модель (8.10) справедлива при $V_{\text{air}} \lesssim 40\text{--}45\%$. При более высоких долях воздуха она переоценивает объём пустот, что подтверждено численно в Ansys HFSS (рисунок 8.15). Для $V_{\text{air}} > 40\%$ применяется классическая формула Максвелла–Гарнетта [225]:

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_m + \frac{3V_{\text{air}} \varepsilon_m (\varepsilon_i - \varepsilon_m)}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m - V_{\text{air}}(\varepsilon_i - \varepsilon_m)}, \quad (8.17)$$

где $\varepsilon_i = 1$ (воздух).

Обратная задача — найти V_{air} при заданном $\varepsilon_{\text{цель}}$ и $\varepsilon_i = 1$ — решается аналитически:

$$V_{\text{MG}} = \frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_{\text{цель}})(\varepsilon_i + 2\varepsilon_m)}{(\varepsilon_m - \varepsilon_{\text{цель}})(\varepsilon_i - \varepsilon_m) + 3\varepsilon_m(\varepsilon_m - \varepsilon_i)}. \quad (8.18)$$

Величина V_{MG} из (8.18) подставляется в выражения (8.12)–(8.14) вместо V_{air} для уточнённого расчёта Box и Step.

Расчёт параметров слоёв. *Слой 1* ($\epsilon_{\text{цель}} = 1,86$, $r_1 = 19,3$ мм; $V_{\text{air}} = 38,6\%$ — линейная модель применима):

$$V_{\text{air}} = \frac{2,4 - 1,86}{2,4 - 1} = \frac{0,54}{1,4} = 0,386,$$

$$f = 0,386^{1/3} = 0,728,$$

$$\text{Box} = 2,7 \text{ мм}, \quad \text{Step} = 2,7 \cdot \frac{0,272}{0,728} \approx 1,0 \text{ мм}, \quad P = 3,7 \text{ мм},$$

$$N = \lceil 19,3/3,7 \rceil = 6,$$

$$\epsilon_{\text{eff}} = 2,4 - 1,4 \times 0,389 = 1,856 \approx 1,86. \checkmark$$

Слой 2 ($\epsilon_{\text{цель}} = 1,57$, $r_2 = 27,4$ мм; $V_{\text{air}} = 59\%$ — применяется формула М.–Г.):

$$V_{\text{MG}} = \frac{(2,4 - 1,57)(1 + 4,8)}{(2,4 - 1,57)(1 - 2,4) + 3 \cdot 2,4 \cdot (2,4 - 1)} = 0,540,$$

$$f = 0,540^{1/3} = 0,814,$$

$$\text{Box} = 3,0 \text{ мм}, \quad \text{Step} = 0,7 \text{ мм}, \quad P = 3,7 \text{ мм},$$

$$N = \lceil 27,4/3,7 \rceil = 8.$$

Слой 3 ($\epsilon_{\text{цель}} = 1,28$, $r_3 = 33,9$ мм; $V_{\text{air}} = 80\%$ — применяется формула М.–Г., уменьшен период):

$$V_{\text{MG}} = 0,763, \quad f = 0,914,$$

$$\text{Box} = 4,3 \text{ мм}, \quad \text{Step} = 0,4 \text{ мм}, \quad P = 4,7 \text{ мм},$$

$$N = \lceil 33,9/4,7 \rceil = 8.$$

Полученные параметры сведены в таблицу 68. Все периоды решётки удовлетворяют критерию эффективной среды (8.16): наибольший $P = 4,7$ мм $< \lambda/5 = 6$ мм.

Верификация параметров слоёв в Ansys HFSS. Каждый слой верифицировался путём сравнения диаграмм рассеяния (rE -plot) двух моделей: сферы с кубическими пустотами («3D-print») и монолитной сферы из материала с целевым $\epsilon_{\text{цель}}$ («Solid»). Материал матрицы задавался как HIPS_eps2i4 с $\epsilon_r = 2,4$, $\text{tg } \delta = 0,001$, $f_{\text{meas}} = 10$ ГГц.

Слой 1. Для первого (внутреннего) слоя с $\epsilon_{\text{цель}} = 1,86$ и объёмной долей воздуха $V_{\text{air}} = 38,9\%$ применимо линейное приближение (8.10). Расчётные параметры $\text{Box} = 2,7$ мм, $\text{Step} = 1,0$ мм сразу обеспечили совпадение диаграмм

Таблица 68 — Расчётные параметры кубических пустот для трёхслойной ЛЛ из HIPS ($D = 73$ мм, $f = 10$ ГГц, $\epsilon_m = 2,4$)

L	$\epsilon_{\text{цель}}$	r_l , мм	V_{air} , %	Модель	Вох, мм	Step, мм	P , мм	N
1	1,86	19,3	38,9	Линейная	2,7	1,0	3,7	6
2	1,57	27,4	54,0	М.–Г.	3,0	0,7	3,7	8
3	1,28	33,9	76,3	М.–Г.	4,3	0,4	4,7	8

М.–Г. — формула Максвелла–Гарнетта (8.17). Линейная — модель смешения (8.10).

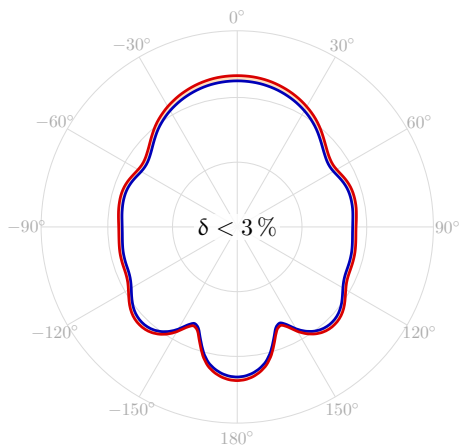
рассеяния с монолитной эталонной сферой (рисунок 8.19а). Никакой дополнительной коррекции геометрии пустот на этом слое не потребовалось.

Слой 2. При первичной оценке параметров слоя 2 по линейной модели без коррекции получалось $V_{\text{ох}} = 3,1$ мм, что давало реальную эффективную проницаемость $\epsilon_{\text{эф}} < 1,57$ и расширение главного лепестка диаграммы рассеяния относительно эталонной монолитной сферы (рисунок 8.19б). Переход к формуле Максвелла–Гарнетта (8.18) и последующее уменьшение $V_{\text{ох}}$ до 3,0 мм вернуло диаграммы рассеяния к практически полному совпадению (рисунок 8.19в).

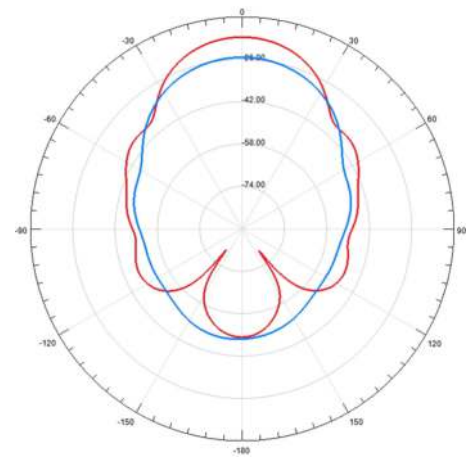
Слой 3. Аналогичная ситуация наблюдалась для третьего (внешнего) слоя с $\epsilon_{\text{цель}} = 1,28$ и $V_{\text{air}} \approx 80\%$. Исходная оценка по линейной модели давала $V_{\text{ох}} = 5,2$ мм, $P = 5,6$ мм, что, во-первых, уже близко нарушало критерий эффективной среды (8.16) ($P < \lambda/5 = 6$ мм), и, во-вторых, приводило к занижению $\epsilon_{\text{эф}}$ — главный лепесток диаграммы рассеяния на соответствующей сфере отклонялся от эталона. После применения формулы М.–Г. и пересчёта геометрии к $V_{\text{ох}} = 4,3$ мм, $\text{Step} = 0,4$ мм диаграммы снова совпали (рисунок 8.19г), одновременно улучшился и запас по критерию эффективной среды. Сам характер коррекции — переход от заметного расхождения диаграмм к их совпадению с уровнем $\delta \leq 3\text{--}7\%$ — показан на идеализированных панелях 8.19д и 8.19е.

Выводы по расчёту параметров перфорации.

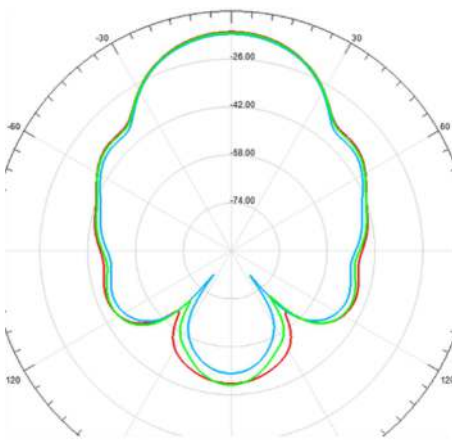
1. Линейная модель смешения (8.10) применима при $V_{\text{air}} < 40\text{--}45\%$ (слой 1). Для более высоких долей воздуха необходима формула Максвелла–Гарнетта (8.17); её применение уменьшает значение $V_{\text{ох}}$ на 3–17% по сравнению с линейной оценкой и возвращает диаграммы рассеяния к совпадению с эталоном.
2. Число ячеек N вычисляется с округлением вверх по формуле (8.15).



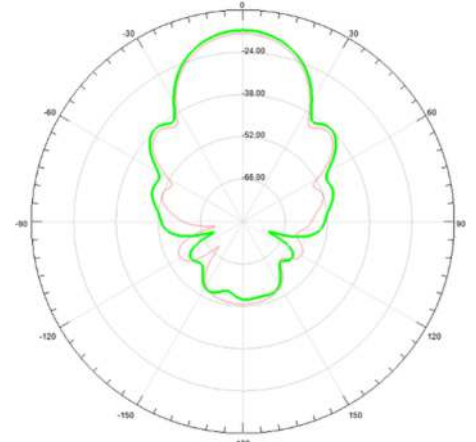
а) Слой 1, $\varepsilon = 1,86$: без коррекции



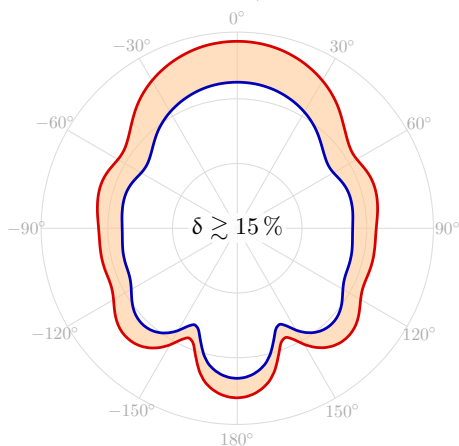
б) Слой 2, $V_{\text{ох}} = 3,1$ мм: расширение лепестка



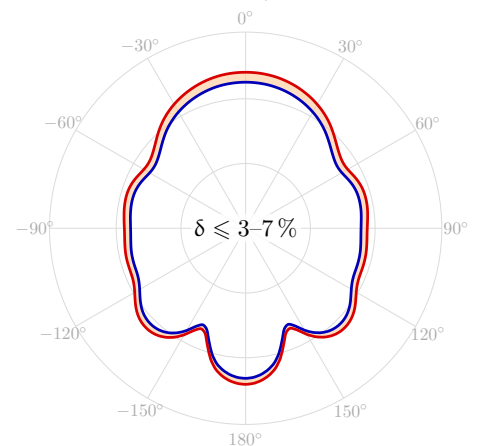
в) Слой 2 после М.-Г., $V_{\text{ох}} = 3,0$ мм



г) Слой 3 после М.-Г., $V_{\text{ох}} = 4,3$ мм



д) Идеализация: до коррекции, δ велико



е) Идеализация: после коррекции, $\delta \leq 3-7\%$

Рисунок 8.19 — Пошаговая верификация параметров кубических пустот трёх-слойной HIPS-ЛЛ в Ansys HFSS: диаграммы рассеяния сферы с пустотами («3D-print») и монолитной сферы («Solid»). Слой 2 — до и после коррекции по Максвеллу–Гарнетту (8.18), слой 3 — после. Панели (а), (д), (е) — идеализированные диаграммы (форма — по HFSS-расчёту; синяя — Solid, красная — 3D-print): (а) — слой 1 (совпадение, коррекция не требуется), (д), (е) — критерий δ до и после коррекции

Округление вниз оставляет краевую зону слоя незаполненной и приводит к систематической ошибке ε_{eff} .

3. Критерий эффективной среды (8.16) выполнен для всех слоёв после коррекции: $P \leq 4,7 \text{ мм} < \lambda/5 = 6 \text{ мм}$ при $f = 10 \text{ ГГц}$. При исходном (некорректированном) подборе слоя 3 критерий нарушался, что дополнительно подтвердило необходимость применения модели М.–Г.
4. Уточнение диэлектрической проницаемости матрицы NIPS от исходного значения $\varepsilon = 3$ до измеренного $\varepsilon_m = 2,4$ смещает все параметры слоёв, но не меняет общего подхода — реализация градиента проницаемости по-прежнему возможна в рамках линейной/М.–Г. моделей смещения, что подтверждено пошаговой верификацией в Ansys HFSS (рисунок 8.19).
5. Количественным критерием совпадения служит интегральное расхождение диаграмм рассеяния $\delta = \oint |E_{3D} - E_{\text{Solid}}| d\theta / \oint |E_{\text{Solid}}| d\theta$ (рисунок 8.19e). Целевой диапазон $\delta \leq 3\text{--}7\%$ определяется суммарным бюджетом трёх независимых погрешностей: приближения эффективной среды (модель М.–Г.), дискретизации профиля проницаемости конечными ячейками Box/Step и разрешения 3D-печати совместно с сеточной аппроксимацией HFSS. Ниже $\approx 3\%$ диаграммы неразличимы в пределах численного шума; выше $\approx 7\%$ заметно смещаются ширина главного лепестка и уровень боковых лепестков, что в полевых величинах отвечает $\approx 0,3\text{--}0,6 \text{ дБ}$ — в пределах типового допуска на диаграмму направленности антенны. В указанной полосе перфорированная линза электродинамически эквивалентна идеальной градиентной, оставаясь технологичной.

Для подтверждения практической достижимости полного диапазона эффективных диэлектрических проницаемостей, требуемых градиентом Люнеберга, изготовлен набор кубических калибровочных образцов FDM-печатью на полимере NIPS с различной степенью заполнения; полученный визуальный ряд приведён на рисунке 8.20. Каждый образец соответствует целевому значению ε_{eff} и подтверждает реализуемость соответствующего слоя. Особо подчеркнём, что значения $\varepsilon_{\text{eff}} \geq 3,0$ требуют либо 100 %-го заполнения базового полимера, либо введения высокопроницаемых керамических наполнителей; в настоящей работе для слоёв ЛЛ применялся только диапазон $\varepsilon_{\text{eff}} \in [1,1; 2,4]$, реализуемый при пористости 0–55 %.

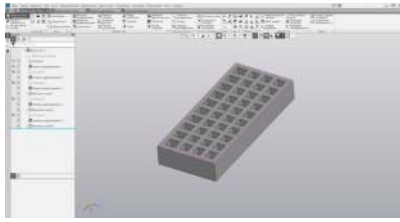
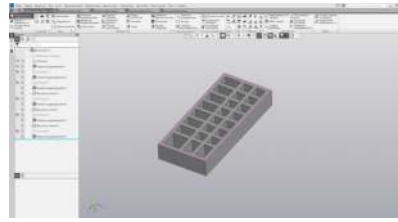
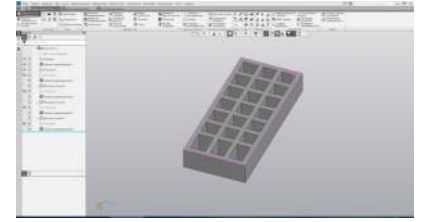
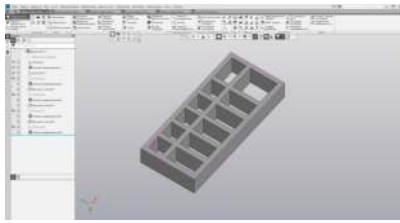
а) $\epsilon_{\text{eff}} \approx 1,4$ б) $\epsilon_{\text{eff}} \approx 1,8$ в) $\epsilon_{\text{eff}} \approx 2,2$ г) $\epsilon_{\text{eff}} \approx 2,6$ д) $\epsilon_{\text{eff}} \approx 3,0$ е) $\epsilon_{\text{eff}} \approx 4,0$

Рисунок 8.20 — Кубические калибровочные образцы, изготовленные FDM-печатью на полимере HIPs с управляемой пористостью; обозначения соответствуют целевым значениям эффективной диэлектрической проницаемости ϵ_{eff} . Образцы $\epsilon_{\text{eff}} \leq 2,4$ реализуются на чистом HIPs, образцы $\epsilon_{\text{eff}} \geq 3,0$ — введением керамических наполнителей в матрицу

Перфорация с радиально-симметричным размещением пустот

Кубическая решётка пустот, рассмотренная выше, строится в декартовой системе координат и потому не согласована с центральной симметрией линзы: ячейки пересекают сферические границы слоёв под произвольными углами, а эффективная среда приобретает слабую зависимость от направления, усредняемую лишь статистически. Перспективной альтернативой является *радиально-симметричное* размещение пустот, при котором каждая пустота ограничена радиальными (коническими, проходящими через центр сферы) и сферическими (концентрическими) поверхностями — в сечении такие ячейки имеют вид кольцевых трапеций (рисунок 8.21).

Такое построение обладает тремя принципиальными преимуществами. Во-первых, синтез слоистой структуры возможен непосредственно в терминах радиальной симметрии относительно центра сферы: границы всех ячеек лежат на координатных поверхностях сферической системы ($r = \text{const}$, конические поверхности θ, φ -разбиения), поэтому усреднённая по азимуту эффективная проницаемость строго остаётся функцией только радиуса, $\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_{\text{eff}}(r)$, и структура согласована со сферически-симметричной постановкой аппарата ТФГ (глава 2) без дополнительных предположений об изотропии усреднения. Во-вто-

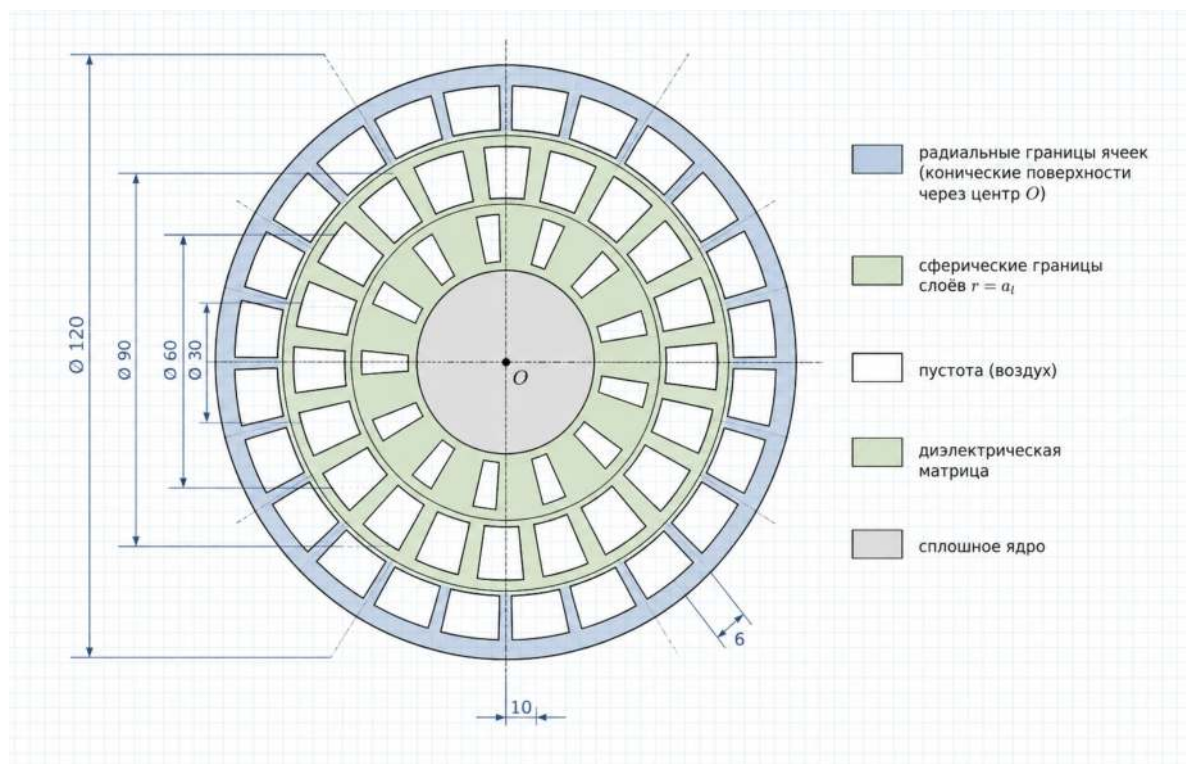


Рисунок 8.21 — Радиально-симметричное размещение пустот в многослойной сферической линзе: трёхслойный макет в сечении через центр (размеры в мм). Каждая пустота ограничена двумя радиальными (коническими, проходящими через центр O) и двумя сферическими ($r = a_l$) поверхностями, а доля воздуха в слое задаётся угловым коэффициентом заполнения; структура каждого слоя инвариантна к дискретным поворотам вокруг центра. Параметры макета: $D = 120$ мм, сплошное ядро $\varnothing 30$ мм, сферические границы слоёв $\varnothing 60/90/120$ мм, дуговая ширина пустоты ≈ 10 мм, радиальная стенка ≈ 6 мм.

рых, объёмная доля воздуха каждого слоя управляется одним параметром — угловым коэффициентом заполнения (отношением угловой ширины пустоты к угловому периоду ячеек), а требуемое значение V_{air} по-прежнему определяется моделями смещения (8.11), (8.18); критерий эффективной среды (8.16) накладывает ограничение на дуговой период ячеек $P_{\text{дуг}} = r \Delta\alpha < \lambda/5$, из которого число ячеек в кольце растёт пропорционально радиусу (рисунок 8.21). В-третьих, параметризация «радиусы сферических границ + угловые коэффициенты заполнения» является по существу координатной постановкой задачи и образует естественный базис для перехода от параметрической оптимизации к полному синтезу структуры линзы, обсуждаемому в перспективах работы (см. заключение).

Конструктивная реализация. Размеры трёхслойного макета, показанного на рисунке 8.21, выбраны из условия эффективной среды. Число ячеек в кольце растёт от внутреннего слоя к внешнему как 16/24/32, так что дуговой период удерживается ниже предела эффективной среды (8.16), а угловой коэффициент заполнения каждого слоя подбирается из требуемой доли воздуха (8.11). Технологически такая структура воспроизводится теми же средствами FDM-печати, что и кубическая (материал матрицы HIPS, $\epsilon_m = 2,4$); радиальные стенки при послойной укладке филамента работают как самонесущие рёбра, а замкнутые сферические пояса придают конструкции жёсткость, недостижимую для несвязанной кубической решётки при высокой пористости.

Эффективная анизотропия радиальной перфорации. Принципиальное электродинамическое отличие радиальной перфорации от кубической состоит в характере эффективной среды. Стенки ячеек образуют две упорядоченные семьи тонких диэлектрических перегородок: радиальные (конические, содержащие направление $\hat{r}$) и сферические (пояса $r = \text{const}$). Для поля, направленного *вдоль* перегородок, справедлива линейная (аддитивная) модель смешения, для поля, направленного *поперёк*, — последовательная; это классические границы Винера, дающие для двухкомпонентной смеси «матрица ϵ_m + воздух» верхнюю и нижнюю оценки:

$$\epsilon_{\parallel} = (1 - V_{\text{air}}) \epsilon_m + V_{\text{air}}, \quad \epsilon_{\perp} = \left[\frac{1 - V_{\text{air}}}{\epsilon_m} + V_{\text{air}} \right]^{-1}. \quad (8.19)$$

Радиальная компонента поля E_r всюду параллельна радиальным стенкам, тогда как тангенциальные компоненты E_{θ} , E_{ϕ} пересекают их поперёк; поэтому в первом приближении эффективная среда радиально-перфорированного слоя описывается одноосным по радиусу тензором

$$\hat{\epsilon}_{\text{eff}} = \text{diag}(\epsilon_r, \epsilon_t, \epsilon_t), \quad \epsilon_r \approx \epsilon_{\parallel}, \quad \epsilon_t \approx \epsilon_{\perp}, \quad \kappa = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_r} \leq 1, \quad (8.20)$$

что в точности совпадает по форме с тензором (2.60), для которого в разделе 2.11 построено анизотропное обобщение аппарата ТФГ. Для характерных параметров $\epsilon_m = 2,4$, $V_{\text{air}} = 0,5$ оценки (8.19) дают $\epsilon_r \approx 1,70$, $\epsilon_t \approx 1,41$, т.е. $\kappa \approx 0,83$ — анизотропия не мала и должна учитываться в расчёте. Для конкретной трёхслойной линзы (8.7) ($\epsilon_m = 2,4$; объёмные доли воздуха по слоям $V_{\text{air}} = 0,39; 0,59; 0,80$) те же оценки (8.19) дают $\epsilon_r = \epsilon_{\text{цель}} = 1,86; 1,57; 1,28$

и $\varepsilon_t = 1,56; 1,31; 1,13$, т.е. $\kappa_l \approx 0,84; 0,84; 0,88$; анизотропия во всех трёх слоях близка и составляет 12–17 %, а соответствующий модифицированный порядок (8.21) при $n = 5$ смещается с изотропного $\nu_E = 5$ до $\nu_E \approx 4,5 \dots 4,7$. Существенно, что для кубической решётки та же анизотропия присутствует локально (относительно осей решётки), но не согласована со сферической геометрией и потому доступна лишь статистическому усреднению; для радиальной решётки она строго одноосна по $\hat{r}$ в каждой точке слоя.

Электродинамический анализ аппаратом ТФГ. Радиально-перфорированная линза, гомогенизированная в форме (8.20), анализируется развитым в настоящей работе аппаратом без привлечения конечно-элементных решателей. Радиальные уравнения для потенциалов Дебая сохраняют вид (2.63) с модифицированными — в общем случае нецелочисленными — угловыми порядками (2.64):

$$\nu_E(\nu_E + 1) = \kappa n(n + 1), \quad \nu_E = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \kappa n(n + 1)}, \quad (8.21)$$

(при $\kappa = 0,83$ и $n = 5$ получаем $\nu_E \approx 4,51$), а сшивание слоёв выполняется тем же рекуррентным пересчётом направленных импедансов (2.68) на функциях Риккати—Бесселя нецелочисленного порядка $\hat{\psi}_{\nu_E}, \hat{\xi}_{\nu_E}$. Вычислительная цена анизотропного расчёта совпадает с изотропным случаем (замена порядка $n \rightarrow \nu_E^{(l)}$ в радиальных функциях каждого слоя), что сохраняет главное преимущество метода — секунды расчёта против часов полноволнового МКЭ-анализа перфорированной геометрии с явным разрешением всех стенок. Программная реализация — модуль `anisotropic_mie.py` библиотеки *GreenTensor* (подраздел 2.11.5), верифицированный в изотропном пределе с машинной точностью.

Границы применимости гомогенизации контролируются симметричным аргументом. Дискретная решётка из N_c ячеек в кольце инвариантна к повороту на $2\pi/N_c$, поэтому азимутальные гармоники связываются только по правилу Флоке $m \rightarrow m \pm jN_c$ ($j = 1, 2, \dots$). Значимая часть спектра ряда ТФГ ограничена оценкой Уискомба $N_{\max} \approx k_0 a + 4,05 (k_0 a)^{1/3} + 2$, поэтому при

$$N_c > 2N_{\max} \quad (8.22)$$

перекрёстные гармоники лежат за пределами значимого спектра, межмодовой связью можно пренебречь, и описание слоя эффективным тензором (8.20) корректно; условие (8.22) согласовано с критерием дугового периода $R_{\text{дуг}} =$

$2\pi r/N_c < \lambda/5$ (8.16). Отклонение фактических ε_r , ε_t от оценок Винера (8.19) (за счёт сферических поясов и конечной толщины стенок) уточняется той же процедурой сравнения диаграмм рассеяния, что применена выше для кубической перфорации (рисунок 8.19).

Отметим, наконец, что управляемая радиальная анизотропия $\kappa(r)$ является не паразитным эффектом, а дополнительной степенью свободы синтеза: обобщение закона Люнеберга на анизотропную среду известно со времён работы Калошина и Щербенкова [11] и активно развивается в современных геометро-оптических методах синтеза [14]; связка «радиальная перфорация (реализация $\kappa(r)$) + анизотропный ТФГ (полноволновой анализ)» замыкает для этого класса структур цепочку «синтез — изготовление — верификация» в рамках единого аппарата настоящей работы.

Радиальная система пустот является обобщением идеи «слоистой реализации непрерывного профиля»: при стремлении углового периода к нулю структура переходит в идеальный радиально-неоднородный (в общем случае радиально-анизотропный) диэлектрик, тогда как кубическая решётка такого предельного перехода в рамках центральной симметрии не имеет. Количественное сравнение изотропной и анизотропной моделей радиальной перфорации выполнено развитым в разделе 2.11 анизотропным аппаратом ТФГ (модуль `sphere_anisotropic` библиотеки *GreenTensor*, верифицированный в изотропном пределе против канонического ядра, против одиночной анизотропной сферы и независимым глобальным солвером сшивания полей — до машинной точности). Для трёхслойной линзы с $\kappa_l \approx 0,84$ пренебрежение анизотропией (замена тензора (8.20) изотропной проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_{\text{цель}}$) искажает диаграмму рассеяния на $\delta \approx 66\%$ (норма L_2 по $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$) при $k_0 a = 4\pi$ и на $\approx 57\%$ при $k_0 a = 8\pi$, а эффективность обратного рассеяния падает почти на два порядка (Q_{back} с 0,85 до 0,03) — расстройка фокусировки из-за заниженной тангенциальной компоненты ε_t . Следовательно, радиальная анизотропия перфорации не допускает изотропного приближения и требует строгого анизотропного расчёта (8.20); тем самым радиальная перфорация замыкает для сферической линзы ту же пару «анизотропный синтез профиля — строгий анизотропный анализ», что развивается школой ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН для цилиндрических линз (подраздел 2.11.6).

Для изготовления линзы выбрана FDM-печать. Она уступает фотополимерной печати по точности, но обладает рядом практически важных

преимуществ:

- Относительно недорогие расходные материалы — в среднем примерно на 25 % дешевле, чем для фотополимерных принтеров.
- Широкий ассортимент филаментов, в том числе с различными примесями (термостойкие, резиноподобные и прочие композиции).
- Сравнительно невысокая стоимость оборудования: принтеры начального уровня сопоставимы по цене с фотополимерными, при этом комплектующие дешевле примерно на 30 %.
- Простота эксплуатации и настройки: FDM-принтер пригоден даже для работы в полевых условиях.

На рисунке 8.22 показан процесс изготовления ЛЛ на FDM-принтере с использованием HIPS-филамента ($\epsilon = 3$). Практика изготовления ЛЛ этим методом выявила фактически единственный существенный недостаток — необходимость ручной постобработки готового образца, связанной со срезанием печатаемых поддержек. Проблема решается использованием принтеров с двумя экструдерами и растворимого материала поддержек.

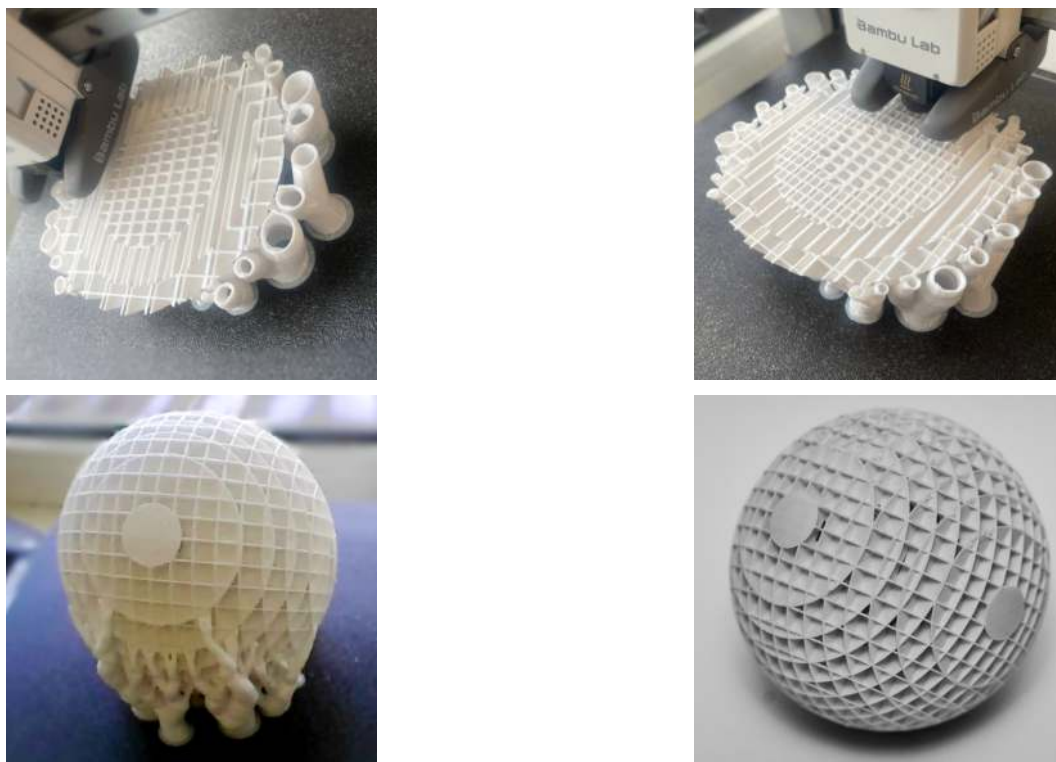


Рисунок 8.22 — Процесс изготовления линзы на FDM-принтере

При FDM-печати из HIPS изготовление одной линзы занимает около 23 часов и требует порядка 368 г материала с учётом поддержек. На готовом изделии

Таблица 69 — Параметры заполнения слоёв ЛЛ пустотами

№ слоя	Диаметр слоя, мм	Материал
1	94	1,88 (синтезированный слой)
2	134	1,67 (синтезированный слой)
3	164	1,44 (синтезированный слой)
4	188	1,22 (синтезированный слой)
5	200	Пенопласт без добавок ($\epsilon = 1$)
6	200	Проводящий экран (полусфера)
7	200	Пенопласт без добавок ($\epsilon = 1$)

(рисунок 8.22) заметны неровности от удалённых поддержек и локальные наплывы материала. Более точный образец можно получить фотополимерной печатью, однако это существенно (примерно в полтора раза) увеличивает время изготовления и расход материала, а сам метод дороже и хуже приспособлен к полевым условиям.

На следующем этапе конструкция линзы «упаковывается» в пенопластовый корпус с металлическим экраном, закрывающим полусферу (рисунок 8.23). Оптимизированные параметры послойного разбиения ЛЛ приведены в таблице 69. Там же (рисунок 8.23) показаны результаты расчёта моностатического коэффициента рассеяния; они в полной мере удовлетворяют требованиям по управлению ЭПР, сформулированным для рассматриваемой задачи. Расчёты выполнены на частоте 10 ГГц. Ввиду отмеченной выше ресурсоёмкости прямого моделирования перфорированной структуры использовалась её эквивалентная монолитная версия без пустот.

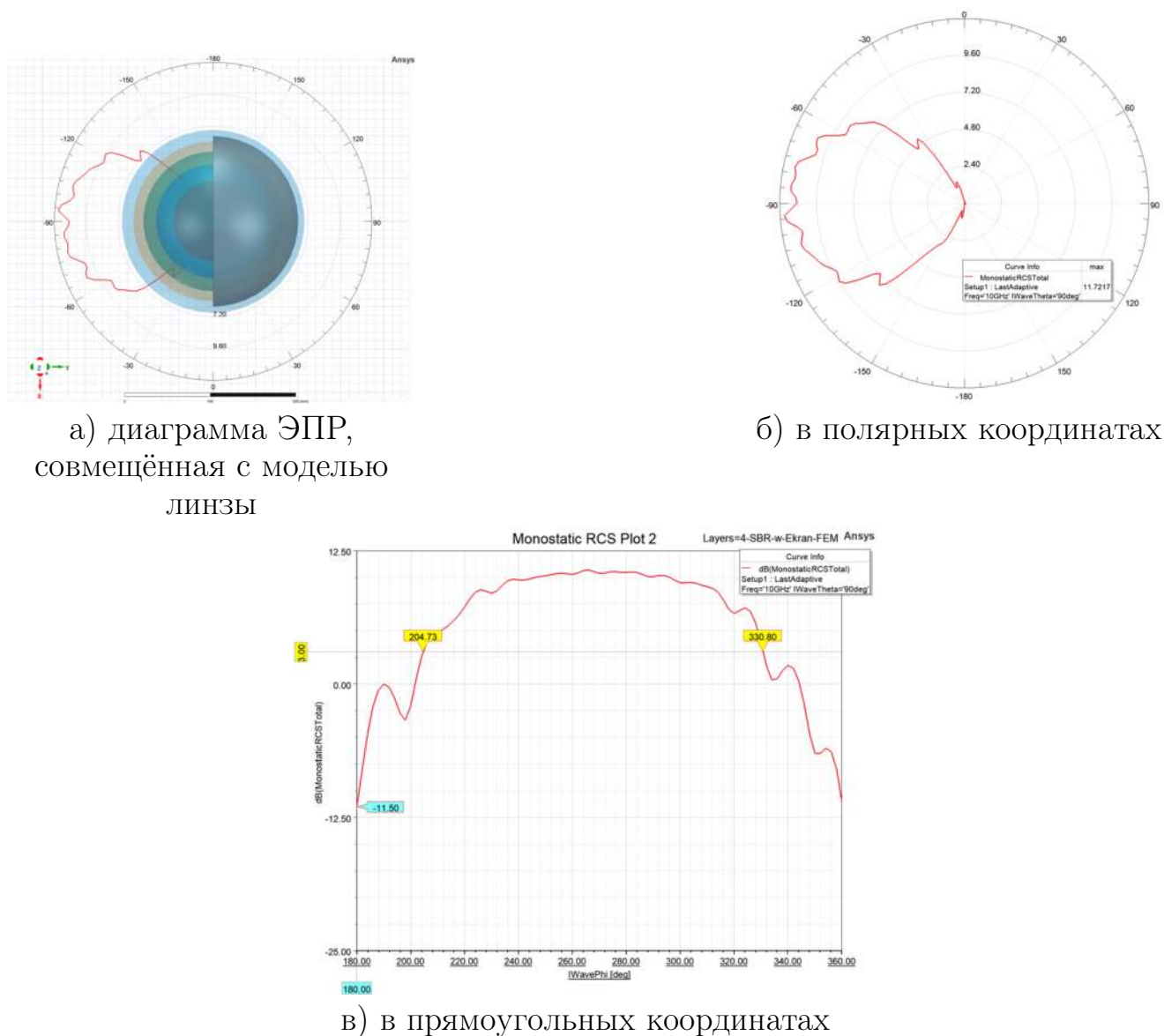


Рисунок 8.23 — Моностатический ЭПР ЛЛ с экраном диаметром 200 мм

Расчётная модель несущей конструкции в Ansys HFSS подтверждает, что управляемое размещение линз с различным их числом и различными ориентациями металлического экрана позволяет целенаправленно изменять ЭПР объекта в заданном угловом секторе.

8.6 Технология изготовления линзы Люнеберга из пенопласта переменной плотности

Линза Люнеберга представляет собой диэлектрическую сферическую линзу, в которой показатель преломления убывает от максимального значения в центре до минимального на поверхности. Один из удобных способов её практической реализации — использование пенопласта с переменной плотностью,

управляемой введением различных примесей.

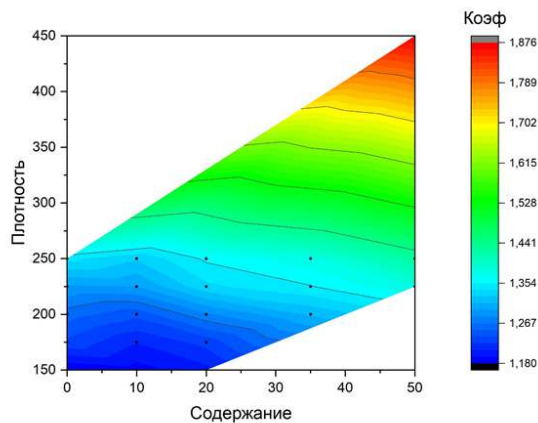
В качестве матрицы чаще всего применяют пенополистирол (EPS) или пенополиуретан (PU): они обладают низкими диэлектрическими потерями и легко допускают варьирование плотности. Типовыми примесями являются диэлектрические наполнители (BaTiO_3 , TiO_2 , Al_2O_3), повышающие эффективную проницаемость; микросферы (стеклянные, керамические или полимерные), снижающие плотность материала; графит и углеродные нанотрубки, изменяющие электромагнитные свойства композиции; а также порошковые наполнители (Fe_3O_4 , карбид кремния) для тонкой настройки отклика. В совокупности этот арсенал позволяет перекрыть диапазон проницаемостей, необходимый для реализации профиля Люнеберга.

Ключевую роль в формировании заданного распределения $\epsilon(r)$ играет контролируемое вспенивание. Технологический цикл включает приготовление вспениваемого раствора (смешивание EPS или PU с выбранными добавками), формирование градиента плотности за счёт послойного изменения концентрации наполнителя (например, повышенное содержание BaTiO_3 в центре и пониженное на периферии), а также градиентное вспенивание с регулировкой температуры и давления для получения плавного перехода плотности. Итоговую сферическую форму придают пресс-формованием в сферической матрице либо послойной 3D-печатью вспениваемым материалом. Существенно расширяют технологический выбор и классические варианты литья и сборки: многослойное литьё в сферическую форму, сборка из двух или нескольких полуоболочек, а также пенополимеризация заранее дозированных реагентов непосредственно в замкнутой форме.

Ниже рассматривается конкретная конструкция ЛЛ, изготовленная из пенопласта переменной плотности. Такая реализация особенно удобна в приложениях, где критично малое удельное значение массы изделия. Диапазон проницаемости пенопласта с примесями, доступный на практике, показан на рисунке 8.24 — ориентировочно $\epsilon \in [1,18; 1,876]$; этого оказывается достаточно для реализации ЛЛ с оптимизированной аппроксимацией профиля.

Модель линзы с экраном из пенопласта, построенная в Ansys HFSS, и результаты её моделирования приведены на рисунке 8.25.

Использование градиентного пенопласта в сочетании с полусферическим металлическим экраном и тонким диэлектрическим зазором позволяет управлять угловым распределением переизлучённого поля: сам градиентный



а) диапазон проницаемости
пенопласта



б) пример слоя пенопластовой
полусферы

Рисунок 8.24 — Пенопласт переменной плотности для изготовления ЛЛ: *a* — диапазон достижимой диэлектрической проницаемости в зависимости от плотности и содержания наполнителя; *б* — пример полусферической пенопластовой заготовки (слоя)

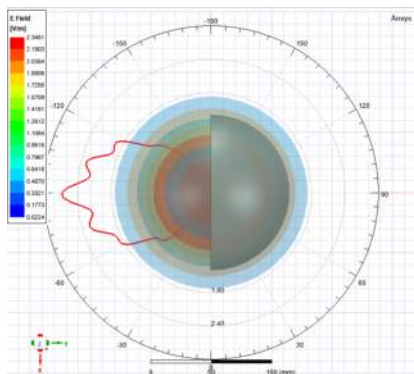
профиль отвечает за фокусировку, а экран — за направление переизлучения в заданный сектор.

Таблица 70 — Конструкция ЛЛ с экраном из пенопласта переменной плотности

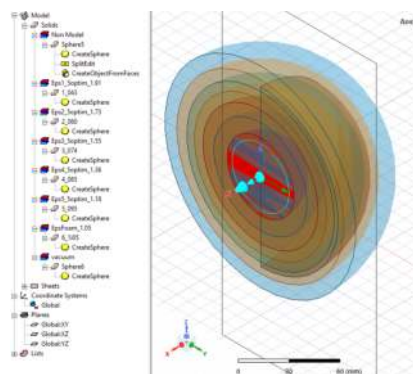
L	Радиус слоя, мм	ϵ	Шаг между элемента- ми	Материал
Линза				
1	27,95	1,91	1,1 мм	синтезированный пенопласт
2	39	1,73	0,8 мм	синтезированный пенопласт
3	48,1	1,55	0,6 мм	синтезированный пенопласт
4	55,25	1,36	0,4 мм	синтезированный пенопласт
5	61,75	1,18	0,2 мм	синтезированный пенопласт
Экран				
6	65	1,05	-	Пенопласт без добавок
6	65 (полу- сфера)	$\gg 10^{10}$ (метал- лизация)		Проводящий экран (полусфера)
6	70	1,05		Пенопласт без добавок

*6-й слой — пенопласт с проницаемостью, близкой к 1. Используется в качестве зазора между линзой и экраном.

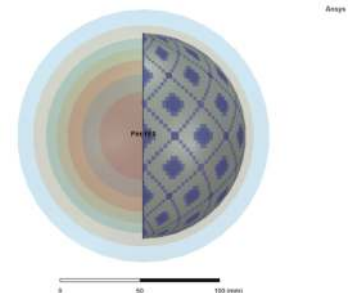
В таблице 70 приведена конструкция линзы: концентрические слои с



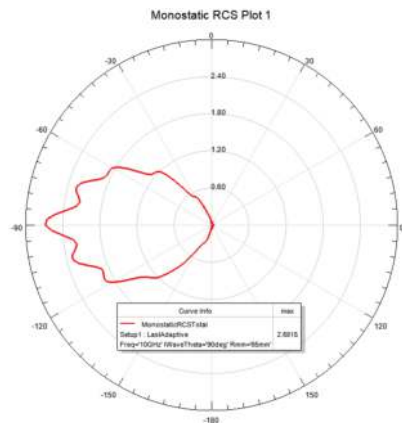
а) модель и ЭПР



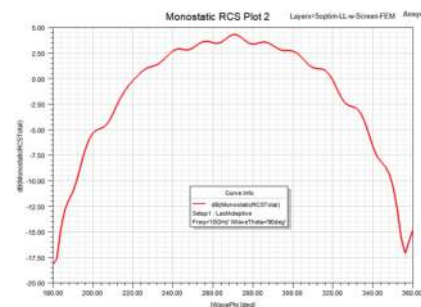
б) слои линзы (3D)



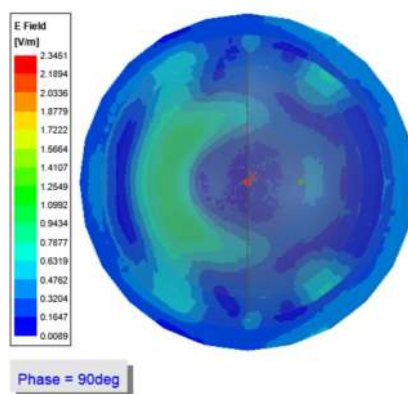
в) линза с экраном



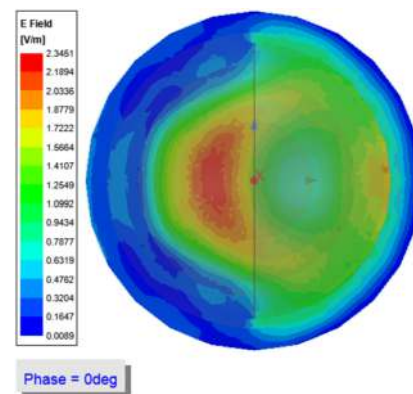
г) ЭПР (полярная)



д) ЭПР (прямоуг.)



е) поле, фаза 90°



ж) поле, фаза 0°

Рисунок 8.25 — Модель ЛЛ с экраном из пенопласта переменной плотности в Ansys HFSS, диаграммы её моностатического ЭПР и распределение переизлучённого поля

диэлектрической проницаемостью, убывающей от центра к краю, при этом технологический шаг между элементами уменьшается синхронно с проницаемостью. За линзой расположен пенопластовый зазор ($\epsilon \approx 1$) и полусферический металлический экран, задающий направленную картину переизлучения.

8.7 Выводы по главе

В настоящей главе идеальная трёх- и многослойная конструкция линзы Люнеберга, характеристики которой получены в главах 4–7 аналитически, доведена до уровня практической реализации методом аддитивной 3D-печати с учётом технологических ограничений и требований к радиотехническим характеристикам готового изделия. Разработаны и апробированы технология FDM-печати из HIPS с кубическими пустотами и альтернативная технология из пенопласта переменной плотности; продемонстрирована применимость ЛЛ в режиме пассивного рассеивателя и обоснована пригодность FDM-метода для полевых условий. Методологическое обобщение полученных результатов на произвольные кусочно-координатные структуры — метод декомпозиции — изложено в главе 9.

Инженерные рекомендации по выбору материала и модели смешения. В качестве матрицы для FDM-печати рекомендуется ударопрочный полистирол HIPS ($\epsilon_m = 2,4$, $\operatorname{tg} \delta = 0,001$, измерено методом NRW в X-диапазоне), перекрывающий весь требуемый диапазон $1 \leq \epsilon(r) \leq 2$ варьированием доли воздуха V_{air} кубической перфорацией. Эффективную проницаемость слоя следует рассчитывать по линейной модели смешения при $V_{\text{air}} \leq 40\%$ и по формуле Максвелла–Гарнетта при $V_{\text{air}} > 40\%$ (где линейная модель переоценивает объём пустот). Размер ячейки перфорации выбирается из критерия эффективной среды (период решётки много меньше рабочей длины волны); предпоследний слой с $\epsilon \approx 1,1$ удобно выполнять из пенопласта переменной плотности.

Ключевой вывод главы. Технология FDM-3D-печати из ударопрочного полистирола (HIPS, $\epsilon = 2,4$, $\operatorname{tg} \delta = 0,001$) с кубическими пустотами, рассчитанными по логарифмической модели Лихтенекера, и альтернативная технология печати из пенопласта переменной плотности обеспечивают воспроизведение многослойной аппроксимации линзы Люнеберга на стандартных слайсерах без

модификации оборудования с измеренным методом NRW отклонением реализованного профиля $\varepsilon(r)$ от расчётного не более 3% для макета $D = 73$ мм на $f = 10$ ГГц ($k_0 a \approx 7,65$); это закрывает технологический разрыв между расчётной моделью и реализуемым изделием и образует технологическое содержание **пятого положения**, выносимого на защиту.

Глава 9. Метод декомпозиции произвольных структур: тензорные функции Грина для комбинированных плоско-цилиндрически-сферических областей

9.1 Введение

В главах 2 и 2.11 развит аппарат тензорных функций Грина (ТФГ) для радиально-стратифицированных сферических структур; аналогичный аппарат для плоских и цилиндрических структур построен в работах С. Н. Шабунина [22–24] и развит Ю. Е. Мительманом [143; 145] на основе классических результатов школы Б. А. Панченко [17–20; 58]. Каждый из трёх подходов высокоэффективен в своей канонической геометрии (полупространство, бесконечный круговой цилиндр, концентрические сферические оболочки), однако практически важные структуры — линза Люнеберга на проводящем экране в цилиндрическом радоме, полусферическая антенна с поглощающим тороидом, решётка сферических рассеивателей над диэлектрической подложкой — содержат границы разной координатной симметрии одновременно, и применение любого частного аппарата в чистом виде невозможно.

Универсальные численные методы (FEM в Ansys HFSS, FDTD в CST Microwave Studio) предполагают объёмную дискретизацию и теряют ключевое преимущество ТФГ-подхода — сокращение машинного времени на 2–4 порядка по сравнению с FEM, обеспечивающее его применимость в задачах параметрической оптимизации и машинного обучения. Между тем большинство практически важных конфигураций поддаётся *кусочно-координатной декомпозиции*: исходная область разбивается на подобласти, в каждой из которых уравнения Максвелла допускают разделение переменных в декартовой, цилиндрической или сферической системе, и ТФГ-метод применим в исходном виде; задача сводится к построению аппарата *сшивания полей* на интерфейсах между подобластями.

Физическая основа декомпозиционного подхода — классические теоремы электродинамики, обеспечивающие корректность процедуры. Теорема единственности решения уравнений Максвелла [83; 84] гарантирует, что внутри каждой канонической подобласти Ω_i электромагнитное поле полностью определяется заданием тангенциальных компонент $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ на границе $\partial\Omega_i$. Принцип эквивалентности в форме Шуберта (Schelkunoff — Schubert) [85] позволяет заме-

нить волновое поле, приходящее в Ω_i из соседних подобластей, эквивалентными электрическими и магнитными поверхностными токами на $\partial\Omega_i$. Условие излучения Зоммерфельда [86] обеспечивает однозначность выбора уходящих волн в открытых направлениях (для функций Ханкеля $h_n^{(2)}$ в сфере, $H_m^{(2)}$ в цилиндре, $e^{-jk_z z}$ в плоскости при принятой временной зависимости $e^{j\omega t}$). Совокупность этих трёх теорем образует аналитический фундамент метода декомпозиции: каждая подобласть рассматривается как самостоятельная задача с граничными условиями, а интерфейсы — как поверхности согласования встречных волновых потоков в собственных модальных базисах смежных подобластей.

В главе разработана единая методическая основа такого подхода. Получены: аппарат ТФГ для плоской многослойной магнитодиэлектрической структуры, замыкающий триаду «плоскость — цилиндр — сфера» (раздел 9.2); общая формулировка задачи декомпозиции и условий сшивания (раздел 9.3); три замкнутых аппарата сшивания на границах координатно-неоднородных областей — плоскость $\leftrightarrow$ сфера (раздел 9.4), сфера $\leftrightarrow$ цилиндр (раздел 9.5), цилиндр $\leftrightarrow$ плоскость (раздел 9.6); итерационный алгоритм с критерием сходимости (раздел 9.7); программная реализация и численная верификация диагональных блоков СЛАУ (раздел 9.9, приложение А.2). Результаты главы выносятся на защиту как самостоятельное положение и реализованы в виде Python-модуля в составе исходных кодов диссертации.

Публикации автора по материалам главы 9: [64–66].

9.2 Аппарат ТФГ для плоских многослойных магнитодиэлектрических структур

9.2.1 Постановка задачи и спектральное разложение

Рассмотрим плоскую слоистую структуру, бесконечную по координатам x, y и стратифицированную по нормали z (см. рис. 9.1). Каждый слой $l = 1, \dots, L$ ограничен координатными плоскостями $z = z_{l-1}$ и $z = z_l$ и характеризуется комплексной диэлектрической $\epsilon_l(\omega)$ и магнитной $\mu_l(\omega)$ проницаемостями; полупространство $z < z_0$ занято полубесконечной средой ϵ_0, μ_0 , полупространство $z > z_L$ — средой $\epsilon_{L+1}, \mu_{L+1}$. Задача состоит в построении тензорных функций Грина $\hat{G}_p^{ee}(\vec{r}, \vec{r}')$ и $\hat{G}_p^{em}(\vec{r}, \vec{r}')$ электрического и магнитного типа, связывающих стороннюю плотность электрического тока $\vec{J}^e(\vec{r}')$ с электрическим

полем $\vec{E}(\vec{r})$ в любой точке структуры.

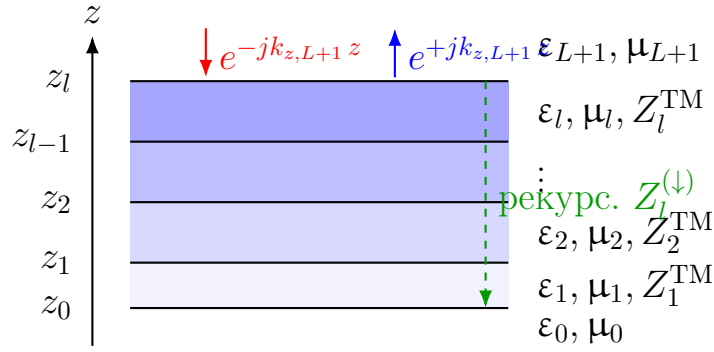


Рисунок 9.1 — Геометрия плоской многослойной магнитодиэлектрической структуры. Каждому слою сопоставлен направленный волновой импеданс Z_l^{TM} ; рекуррентный пересчёт ведётся от $z = +\infty$ к $z = z_0$

В силу трансляционной инвариантности задачи по x, y удобно перейти к двойному пространственному преобразованию Фурье [83; 84]:

$$\tilde{\vec{E}}(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (9.1)$$

Поперечный волновой вектор $\vec{k}_\perp = (k_x, k_y)$ играет в плоской геометрии ту же роль, что азимутальный индекс m в цилиндрической и пара (n, m) в сферической, а соответствующий продольный волновой компонент $k_{z,l}$ в слое l удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$k_{z,l}^2 = k_l^2 - |\vec{k}_\perp|^2, \quad k_l^2 = \omega^2 \epsilon_l \mu_l, \quad (9.2)$$

где знак $k_{z,l}$ выбирается из условия излучения: $\Re k_{z,l} \geq 0$, $\Im k_{z,l} \leq 0$ при принятой временной зависимости $e^{j\omega t}$.

9.2.2 Разложение поля на ТМ- и ТЕ-составляющие

В каждом слое полное электромагнитное поле представимо в виде суммы двух поляризационно независимых составляющих — ТМ (transverse magnetic, $H_z \equiv 0$) и ТЕ (transverse electric, $E_z \equiv 0$), — определяемых через два скалярных потенциала $\Pi^e(\vec{r})$ и $\Pi^h(\vec{r})$:

$$\vec{E}^{\text{TM}} = \nabla \times \nabla \times (\hat{z} \Pi^e), \quad \vec{H}^{\text{TM}} = j\omega \epsilon \nabla \times (\hat{z} \Pi^e), \quad (9.3a)$$

$$\vec{H}^{\text{TE}} = \nabla \times \nabla \times (\hat{z} \Pi^h), \quad \vec{E}^{\text{TE}} = -j\omega \mu \nabla \times (\hat{z} \Pi^h). \quad (9.3b)$$

Каждый из потенциалов удовлетворяет в слое скалярному уравнению Гельмгольца $(\nabla^2 + k_l^2)\Pi(\vec{r}) = 0$, спектральное представление которого в плоской геометрии есть [24]

$$\tilde{\Pi}_l(\vec{k}_\perp, z) = A_l(\vec{k}_\perp) e^{-jk_{z,l}z} + B_l(\vec{k}_\perp) e^{+jk_{z,l}z}, \quad (9.4)$$

где A_l, B_l — амплитуды волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси z соответственно. Это разложение является плоским аналогом разложения по сферическим векторным гармоникам $\vec{M}_n, \vec{N}_n$ для сферической задачи (глава 2) и по цилиндрическим LE/LM-волнам для цилиндрической задачи [23].

9.2.3 Направленные импедансы и адмитансы. Рекуррентный пересчёт по слоям

Расчёт рассеяния на многослойной структуре основан на *методе эквивалентных линий* [23; 24]: каждому слою сопоставляется участок длинной линии с волновым импедансом, условие непрерывности тангенциальных компонент $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ на границе слоёв эквивалентно непрерывности напряжения и тока. Этот аппарат подробно изложен в диссертации С. Н. Шабунина [24]; ниже он представлен в форме, удобной для последующего обобщения на декомпозиционный метод.

Введём в каждом слое *направленный волновой импеданс* (для ТМ-моды) и *адмитанс* (для ТЕ-моды) относительно нормали z :

$$Z_l^{\text{TM}}(\vec{k}_\perp) = \frac{k_{z,l}}{\omega \epsilon_l}, \quad Y_l^{\text{TE}}(\vec{k}_\perp) = \frac{k_{z,l}}{\omega \mu_l}. \quad (9.5)$$

По смыслу определения (9.5) это волновые импедансы плоских парциальных волн, наклон которых задан спектральным параметром $\vec{k}_\perp$. Для слоя конечной толщины $h_l = z_l - z_{l-1}$ преобразование импеданса от верхней границы z_l к нижней z_{l-1} выполняется по формуле трансформации длинной линии:

$$Z_{l-1}^{(\text{TM}, \downarrow)} = Z_l^{\text{TM}} \frac{Z_{l+1}^{(\text{TM}, \downarrow)} + j Z_l^{\text{TM}} \text{tg}(k_{z,l} h_l)}{Z_l^{\text{TM}} + j Z_{l+1}^{(\text{TM}, \downarrow)} \text{tg}(k_{z,l} h_l)}, \quad (9.6)$$

с аналогичным выражением для Y_l^{TE} . Здесь и далее верхняя стрелка $\downarrow$ обозначает импеданс, видимый сверху от данной границы (т.е. нагрузку на

ТМ/ТЕ-волну, падающую сверху). Рекуррентный пересчёт ведётся от $z = +\infty$ (где $Z_{L+1}^\downarrow = Z_{L+1}$ — собственный импеданс полубесконечной среды) последовательно к $z = z_0$.

Замечание. Полученное соотношение (9.6) является плоским аналогом рекуррентной формулы для направленных импедансов сферической задачи (гл. 2, формула (2.26)). Замена $\text{tg}(k_{z,l}h_l)$ на отношение сферических функций Бесселя в сферической задаче и на отношение цилиндрических функций Бесселя/Ханкеля в цилиндрической [23] обеспечивает формальное единство всех трёх случаев. Именно это единство и позволяет в рамках декомпозиционного подхода (раздел 9.3) трактовать пересчёт импеданса в каждой подобласти единообразно.

9.2.4 Тензор Грина электрического типа для плоской слоистой среды

Решение системы Максвелла в каждом слое с учётом непрерывности тангенциальных компонент $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ на границах $z = z_l$ приводит к замкнутому выражению для тензора Грина электрического типа в спектральной области:

$$\tilde{G}^{ee}(\vec{k}_\perp; z, z') = -\frac{j}{2k_z^{(s)}} \left[\hat{e}_{\text{TM}} F^{\text{TM}}(z, z') + \hat{e}_{\text{TE}} F^{\text{TE}}(z, z') \right] - \frac{1}{k_z^{(s)}} \hat{z} \hat{z} \delta(z - z'), \quad (9.7)$$

где s — индекс слоя источника, $\hat{e}_{\text{TM}}$ и $\hat{e}_{\text{TE}}$ — проекторы на ТМ- и ТЕ-поляризации:

$$\hat{e}_{\text{TM}} = \frac{1}{|\vec{k}_\perp|^2} \begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y & 0 \\ k_x k_y & k_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_{\text{TE}} = \frac{1}{|\vec{k}_\perp|^2} \begin{pmatrix} k_y^2 & -k_x k_y & 0 \\ -k_x k_y & k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

а функции $F^{\text{TM}}, F^{\text{TE}}$ выражают парциальные передаточные коэффициенты, аналогичные коэффициентам отражения и пропускания обобщённой длинной линии:

$$F^{\text{TM,TE}}(z, z') = \frac{[e^{-jk_z|z-z'|} + R^\uparrow(z') e^{+jk_z(z+z'-2z_{l-1})}] [1 + R^\downarrow(z)]}{1 - R^\uparrow(z') R^\downarrow(z) e^{-2jk_z h_l}}, \quad (9.9)$$

где $R^\uparrow, R^\downarrow$ — коэффициенты отражения, видимые из точки наблюдения вверх и вниз и однозначно выраженные через рекуррентно пересчитанные импедансы $Z^\downarrow, Z^\uparrow$ из (9.6):

$$R^\downarrow = \frac{Z^\downarrow - Z}{Z^\downarrow + Z}, \quad R^\uparrow = \frac{Z^\uparrow - Z}{Z^\uparrow + Z}. \quad (9.10)$$

Возвращение в координатную область выполняется обратным преобразованием Фурье (9.1); для тангенциальной компоненты $\vec{E}_\tau$ это даёт интегральное представление по двумерному спектру:

$$\hat{G}_\tau^{ee}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_\tau^{ee}(\vec{k}_\perp; z, z') e^{j\vec{k}_\perp \cdot (\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp)} d^2\vec{k}_\perp. \quad (9.11)$$

Аппарат (9.1)–(9.11) структурно эквивалентен ТФГ для сферической геометрии (глава 2) с заменой:

- ассоциированных функций Лежандра $P_n^m(\cos \theta)$ — комплексными экспонентами $e^{j\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp}$,
- сферических функций Бесселя $j_n(kr), h_n^{(2)}(kr)$ — плоскими волнами $e^{\pm jk_z z}$,
- суммирования по дискретному индексу n — интегрированием по непрерывному спектру $\vec{k}_\perp$.

Это формальное соответствие служит алгебраической основой аппарата сшивания (разделы 9.4–9.6).

9.2.5 Сводка результатов триады «плоскость — цилиндр — сфера»

В таблице 71 обобщены ключевые элементы аппарата ТФГ во всех трёх геометриях: плоская (настоящий раздел), цилиндрическая [22–24], сферическая (глава 2).

Из таблицы 71 следует ключевое наблюдение: *все три аппарата ТФГ имеют идентичную алгебраическую структуру* — рекуррентный пересчёт направленных импедансов и адмитансов по слоям с единым видом

$$Z_l = r_{l \rightarrow l+1} \frac{C'_l + Z_{l-1} S'_l}{C_l + Z_{l-1} S_l}, \quad (9.12)$$

где функции C_l, C'_l, S_l, S'_l — Wronskian-комбинации специальных функций соответствующей геометрии (тангенсов плоских волн в плоской, цилиндрических Бесселя–Ханкеля в цилиндрической, сферических Риккати–Бесселя в сферической), а $r_{l \rightarrow l+1}$ — множитель, зависящий от отношения проницаемостей соседних слоёв. Эта алгоритмическая универсальность подтверждена прямым сопоставлением сохранившихся MATLAB-реализаций школы Б.А. Панченко: рекуррентная формула (207–219) файла `LunebergLens_diffraction_lin_polar.m` для сферической задачи (Денисов, см. [46]) структурно тождественна циклу `YZleft.m+C211.m` файлов цилиндрических расчётов диссертации

Таблица 71 — Триада «плоскость — цилиндр — сфера»: соответствие элементов аппарата ТФГ

Элемент аппарата	Плоская геометрия	Цилиндрическая геометрия	Сферическая геометрия
Координаты разделения	(x, y, z)	(ρ, φ, z)	(r, θ, φ)
Поперечный спектральный параметр	$\vec{k}_\perp = (k_x, k_y)$, непрерывный	$(m, k_z): m \in \mathbb{Z},$ $k_z \in \mathbb{R}$	$(n, m), n \in \mathbb{N},$ $ m \leq n$
Радиальные/нормальные базисы	$e^{\pm j k_z z}$	$J_m(k_\perp \rho), H_m^{(2)}(k_\perp \rho)$	$j_n(kr), h_n^{(2)}(kr)$
Угловые/поперечные базисы	$e^{j \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp}$	$e^{j m \varphi}$	$P_n^m(\cos \theta) e^{j m \varphi}$
Поляризационное разложение	TM/TE	LM/LE [23]	$\vec{M}_n, \vec{N}_n$
Направленный импеданс	$Z_l^{\text{TM}} = k_{z,l}/(\omega \epsilon_l)$	$Z_{m,l}^{\text{LM}}(k_z)$	$Z_{n,l}^{(e)}(r)$
Рекуррентный пересчёт	по тангенсу: (9.6)	метод эквивалентных линий [23]	по сферическим функциям Бесселя (гл. 2)
Полнота решения	интеграл по $\vec{k}_\perp$	ряд по m + интеграл по k_z	двойной ряд по n, m

Шабунина [24]. Это позволяет, с одной стороны, унифицировать программную архитектуру (в Python-модуле `decomposition` приложения A.2 классы `PlanarTGF`, `CylindricalTGF`, `SphericalTGF` реализуют формулу (9.12) с единой сигнатурой), а с другой — сводить задачу сшивания полей на интерфейсах разной координатной симметрии к преобразованиям между модальными базами, описанным в разделах 9.4–9.6.

В таблице 72 приведено явное соответствие Wronskian-функций C, C', S, S' во всех трёх геометриях с указанием конкретных файлов реализаций.

В цилиндрическом случае [22; 23] аргументы $x = k_{\perp,l} \rho_{l-1}$, $y = k_{\perp,l} \rho_l$ соответствуют граничным радиусам слоя; в сферическом — $z_{\text{in}} = k_l a_{l-1}$, $z_{\text{out}} = k_l a_l$; $\psi_n(z) = z j_n(z)$ и $\chi_n(z) = z y_n(z)$ есть функции Риккати–Бесселя. Производные J', Y', H' цилиндрических функций берутся по формуле $J'_m(z) = J_{m-1}(z) - (m/z)J_m(z)$ (файлы `besjd.m`, `besyd.m`, `beshd.m` расчётной базы Шабунина); производные функций Риккати–Бесселя — по аналогичной

Таблица 72 — Wronskian-комбинации C, C', S, S' в формуле (9.12) по геометриям

Функция	Плоскость (плоск. ТФГ автора)	Цилиндр (Шабунин [24])	Сфера (Денисов, гл. 2)
C_l	$\cos(k_{z,l}h_l)$	c2h.m: $\frac{j\pi}{2}y \left[\frac{H'(y)}{H(x)} J(x) - J(y)H(x) \right]$	$\psi_n(z_{\text{out}})\chi'_n(z_{\text{in}}) - \chi_n(z_{\text{out}})\psi'_n(z_{\text{in}})$
S_l	$jZ_{\text{TM}} \sin(k_{z,l}h_l)$	s2h.m: $\frac{j\pi}{2}y \left[H(y)J(x) - J(y)H(x) \right]$	$\chi_n(z_{\text{out}})\psi_n(z_{\text{in}}) - \psi_n(z_{\text{out}})\chi_n(z_{\text{in}})$
C'_l	$-jZ_{\text{TM}} \sin(k_{z,l}h_l)$	c1h.m: $-\frac{j\pi}{2}y \left[\frac{H'(y)}{H(x)} Y(x) - Y(y)\frac{H'(x)}{H(x)} \right]$	$\psi'_n(z_{\text{out}})\chi'_n(z_{\text{in}}) - \chi'_n(z_{\text{out}})\psi'_n(z_{\text{in}})$
S'_l	$\cos(k_{z,l}h_l)$	s1h.m: $\frac{j\pi}{2}y \left[\frac{H'(y)}{H(x)} J(x) - J(y)\frac{H'(x)}{H(x)} \right]$	$\chi'_n(z_{\text{out}})\psi_n(z_{\text{in}}) - \psi'_n(z_{\text{out}})\chi_n(z_{\text{in}})$
$r_{l \rightarrow l+1}$	1 (входит в Z_{TM})	$\sqrt{\frac{\varepsilon_{l+1}\mu_l}{\varepsilon_l\mu_{l+1}}}$	$\sqrt{\frac{\exp(j\alpha_{l+1}) \varepsilon_{l+1} }{\exp(j\alpha_l) \varepsilon_l }}$ (с фазой потерь)

рекуррентности (см. файл Jpr в LunebergLens_diffraction_lin_polar.m).

Замечание о наклонном падении в цилиндрической геометрии. При $k_z \neq 0$ (наклонное падение) LE и LM поляризации связаны через параметр $w = tk_z(\beta_1^{-2} - \beta_2^{-2})$ [24], что приводит к блочной матрице слоя 4×4 вида (Шабунин, файл g1.m):

$$\mathbf{G}_{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w \\ w & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

При нормальном падении ($k_z = 0, w = 0$) матрица распадается на два независимых блока, и алгоритм сводится к двум независимым 2×2 -задачам, в точности повторяя расщепление коэффициентов M_n и N_n в сферической задаче. Именно это совпадение позволяет в декомпозиционном методе при сшивании сфера $\leftrightarrow$ цилиндр (раздел 9.5) использовать единое алгебраическое представление граничных условий.

9.3 Принцип декомпозиции произвольной структуры

9.3.1 Определение канонических подобластей и интерфейсов

Пусть исследуемая электродинамическая структура занимает ограниченный объём $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (либо его внешнее дополнение для задач рассеяния) и характеризуется кусочно-неоднородным распределением материальных параметров $\varepsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r})$. Назовём *канонической подобластью* такую открытую связную область $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$, в которой одновременно выполнены два условия:

1. материальные параметры ε, μ зависят не более чем от одной координаты, а именно: для Ω_i типа *плоскость* — только от z ($\varepsilon = \varepsilon(z)$); для типа *цилиндр* — только от ρ ($\varepsilon = \varepsilon(\rho)$); для типа *сфера* — только от r ($\varepsilon = \varepsilon(r)$);
2. граница $\partial\Omega_i$ либо уходит на бесконечность (внешние подобласти), либо состоит из конечного числа кусков двух типов: *собственных* (совпадающих с координатной поверхностью $z = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ или $r = \text{const}$ соответственно) и *интерфейсных* Γ_{ij} , разделяющих Ω_i от соседней подобласти Ω_j иной координатной симметрии.

Полная декомпозиция области $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$ задаётся набором канонических подобластей и набором интерфейсов $\{\Gamma_{ij}\}$. В каждой подобласти Ω_i электромагнитное поле представимо разложением по соответствующему базису (плоскому, цилиндрическому или сферическому) с неизвестными коэффициентами $\{a_{i,\alpha}\}$, где мультииндекс α перечисляет моды (для плоскости — непрерывный $\vec{k}_\perp$ и поляризацию ТМ/ТЕ; для цилиндра — (m, k_z) и LM/LE; для сферы — (n, m) и $\vec{M}/\vec{N}$). Стороннее возбуждение (ток $\vec{J}^e$ или плоская волна) задаётся как известная правая часть в той подобласти, которая его содержит.

9.3.2 Примеры комбинированных структур из настоящей диссертации

Перечислим комбинированные структуры из предыдущих глав диссертации, служащие частными случаями метода декомпозиции.

- *Полусферическая линза Люнеберга на проводящем экране* (глава 7, раздел 7.2) представляет двухкомпонентную декомпозицию «сфера + плоскость»: подобласть Ω_S — сферическая полулинза, Ω_P —

полупространство над проводящим экраном; интерфейс Γ_{SP} совпадает с диаметральной плоскостью линзы. В главе 7 задача решалась с использованием метода зеркального изображения, эквивалентного частному случаю развиваемой здесь декомпозиции при идеально проводящем экране.

- *Тороидная линза Люнеберга* (глава 7, раздел 7.6) представляет декомпозицию «сфера + цилиндрическая симметрия»: в каждом азимутальном сечении подобласть имеет сферическую (точнее, осесимметричную в малом сечении) топологию, а сшивание выполняется по азимутальной координате φ , для которой моды сферического и цилиндрического базисов согласовываются через теорему сложения Графа (9.26). Применённое в главе 7 двумерное приближение профиля $\varepsilon(\tilde{r}) = 2 - (\tilde{r}/a)^2$ соответствует усечению модального ряда $|m| \leq M_{\max}$ при использовании цилиндрической симметрии для интегрирования по азимуту.
- *Линейная решётка линз Люнеберга в диэлектрическом радоме* (глава 6) при размещении на корпусе носителя или внутри обтекательной оболочки представляет полную трёхкомпонентную декомпозицию «сфера + цилиндр + плоскость»: Ω_S — сферические подобласти каждой линзы, Ω_C — цилиндрический корпус-радом, Ω_P — плоский экран или фасад носителя; на интерфейсах Γ_{SC} и Γ_{CP} выполняется полный аппарат сшивания, развитый в разделах 9.5 и 9.6. Эта конфигурация прямо соответствует модельной задаче о комбинированном рассеивателе (раздел 9.10), используемой ниже для численной демонстрации метода.

Комбинированные структуры типичны для линзовых антенн 5G/6G, бортовой радиолокации и систем управления радиозаметностью; разрабатываемый аппарат сшивания обеспечивает их единообразный анализ в рамках ТФГ-методологии.

9.3.3 Условия сшивания тангенциальных компонент поля

На каждом интерфейсе Γ_{ij} из уравнений Максвелла следуют непрерывность тангенциальных компонент электрического и магнитного полей:

$$\hat{n} \times \vec{E}_i|_{\Gamma_{ij}} = \hat{n} \times \vec{E}_j|_{\Gamma_{ij}}, \quad \hat{n} \times \vec{H}_i|_{\Gamma_{ij}} = \hat{n} \times \vec{H}_j|_{\Gamma_{ij}}, \quad (9.14)$$

где $\hat{n}$ — единичная внешняя нормаль к Γ_{ij} , направленная из Ω_i в Ω_j . Поверхностные плотности электрических и магнитных токов на Γ_{ij} предполагаются нулевыми (отсутствие идеально проводящих или идеально магнитопроводящих экранов на интерфейсе); их учёт вносит лишь стандартные модификации в правые части (9.14).

В сильной поточечной форме (9.14) выполнить на Γ_{ij} невозможно, поскольку модальные базисы $\{\vec{e}_{i,\alpha}\}$ и $\{\vec{e}_{j,\beta}\}$ ортогональны на различных координатных поверхностях, а интерфейс Γ_{ij} ни одной из них не совпадает. Поэтому условия сшивания формулируются в *слабой (интегральной) форме* [83]: при произвольной пробной тангенциальной функции $\vec{w}(\vec{r}_\Gamma)$, определённой на Γ_{ij} ,

$$\int_{\Gamma_{ij}} \vec{w} \cdot [\hat{n} \times (\vec{E}_i - \vec{E}_j)] dS = 0, \quad \int_{\Gamma_{ij}} \vec{w} \cdot [\hat{n} \times (\vec{H}_i - \vec{H}_j)] dS = 0. \quad (9.15)$$

В качестве пробных функций выбираются по очереди элементы модальных базисов сначала Ω_i , затем Ω_j , что приводит к двум блокам линейных уравнений на коэффициенты $\{a_{i,\alpha}\}, \{a_{j,\beta}\}$. Этот приём известен в литературе как *метод Бубнова–Галёркина* применительно к задачам электродинамической дифракции [85].

9.3.4 Преобразование между модальными базисами

Ключевым техническим элементом, обеспечивающим вычислимость интегралов в (9.15), является разложение модальных функций одной координатной системы по модальным функциям другой — так называемые *теоремы сложения*. В настоящей работе используются три таких теоремы:

1. Разложение плоской волны по сферическим векторным гармоникам (*разложение Релея*);
2. Разложение сферической волны по цилиндрическим (на основе теоремы сложения Графа для функций Бесселя);
3. Связь цилиндрических и плоских волн через интегральное представление Зоммерфельда.

Соответствующие выкладки приведены в разделах 9.4–9.6.

9.3.5 Структура расширенной системы линейных уравнений

Объединение блоков уравнений сшивания (9.15) по всем интерфейсам $\{\Gamma_{ij}\}$ приводит к глобальной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно вектора неизвестных $\vec{a} = (\{a_{i,\alpha}\})$ конечной размерности (после усечения модальных рядов до индексов $n \leq N_{\max}$, $|m| \leq M_{\max}$ и аналогично):

$$\mathbf{M} \vec{a} = \vec{b}, \quad (9.16)$$

где блочная матрица $\mathbf{M}$ имеет следующую структуру:

- диагональные блоки $\mathbf{M}_{ii}$ — импедансные/адмитансные матрицы канонических ТФГ-задач в каждой подобласти, известные из аппарата раздела 9.2 (плоская геометрия) и из глав 2 (сферическая) и работ [23] (цилиндрическая);
- внедиагональные блоки $\mathbf{M}_{ij}, \mathbf{M}_{ji}$ ($i \neq j$) — матрицы перевязи, выражающие проекции мод подобласти Ω_i на тангенциальные компоненты модального базиса подобласти Ω_j на интерфейсе Γ_{ij} .

Правая часть $\vec{b}$ содержит проекции стороннего возбуждения. Решение системы (9.16) даёт коэффициенты модальных разложений во всех подобластях; искомое поле в любой точке восстанавливается обратным разложением по соответствующему базису.

В разделах 9.4–9.6 получены замкнутые выражения для матриц перевязи. Их вычисление требует учёта различий областей определения модальных функций — например, конечного $\theta \in [0, \pi]$ для сферических гармоник против непрерывного $z \in \mathbb{R}$ для плоских волн.

9.3.6 Физическая интерпретация интерфейса

По теореме единственности [83] тангенциальные компоненты $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ на Γ_{ij} являются *достаточным* граничным заданием: поле внутри одной подобласти полностью определяет его поведение на интерфейсе. Согласно принципу эквивалентности [85] это эквивалентно введению на Γ_{ij} поверхностных электрических и магнитных токов

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_\tau, \quad \vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_\tau, \quad (9.17)$$

которые *полностью заменяют* влияние одной подобласти на другую. Условия сшивания (9.14) в этой форме означают, что эквивалентные токи, видимые с одной стороны интерфейса, согласованы с токами, видимыми с противоположной стороны.

С алгебраической точки зрения сшивание реализуется как переразложение этих эквивалентных токов из одного модального базиса (присущего подобласти Ω_i) в другой (подобласти Ω_j). Поскольку модальные базисы трёх канонических геометрий — плоских волн $e^{j\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp}$, цилиндрических гармоник $J_m(k_\perp \rho) e^{j m \varphi}$, сферических гармоник $\vec{M}_{nm}, \vec{N}_{nm}$ — определены в различных областях значения координат и удовлетворяют различным условиям ортогональности, переход между ними не сводится к простой замене переменных. Ядро каждого из трёх сшиваний — переразложение через соответствующую теорему сложения: формулу Релея–Гордона (плоскость $\leftrightarrow$ сфера) [83], теорему Графа (сфера $\leftrightarrow$ цилиндр) [85], формулу Якоби–Ангера (цилиндр $\leftrightarrow$ плоскость) [86]. Эти теоремы составляют предмет разделов 9.4–9.6.

9.4 Сшивание полей плоскость $\leftrightarrow$ сфера

Плоско-сферический случай является наиболее распространённым в практических задачах: типичная ситуация — сферически-симметричное тело (линза, рассеиватель, антенный обтекатель) над плоской подложкой или экраном. Теорема сложения Релея–Гордона [83; 85] применяется для разложения плоских волн по сферическим гармоникам; в декомпозиционном методе она образует ядро матрицы перевязи $\mathbf{M}_{PS}$ глобальной СЛАУ (9.16).

9.4.1 Геометрия задачи и постановка

Рассмотрим типичную геометрию интерфейса плоскость $\leftrightarrow$ сфера: сферическая многослойная подобласть Ω_S радиуса a с центром в точке $\vec{r}_0 = (0, 0, h_0)$, $h_0 > a$, расположенная над плоской слоистой подобластью Ω_P с поверхностью $z = 0$ (см. рис. 9.2). Интерфейсом Γ_{PS} в данной геометрии является *плоскость* $z = h_0 - a$ (касательная плоскость к нижнему полюсу сферы) либо некоторая промежуточная плоскость $z = z_*$, $0 < z_* < h_0 - a$. Возбуждение задано в одной из подобластей и переносится в смежную через интерфейс.

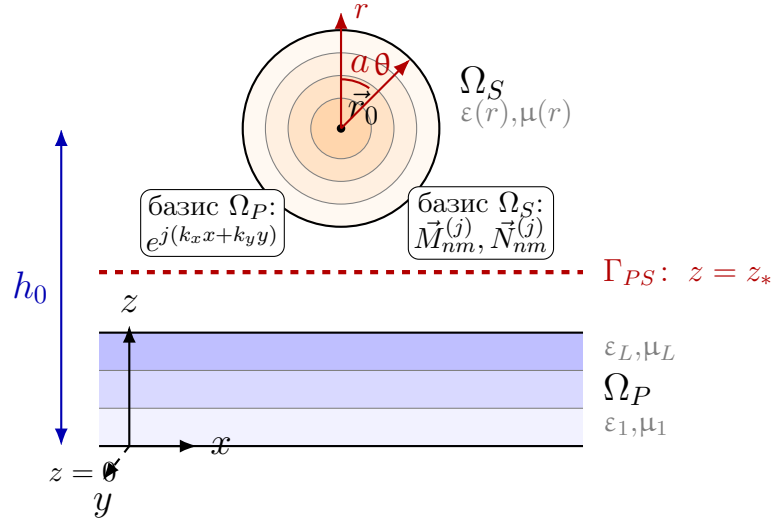


Рисунок 9.2 — Геометрия задачи сшивания плоскость $\leftrightarrow$ сфера. Сферическая многослойная подобласть Ω_S радиуса a с центром в точке $\vec{r}_0 = (0,0,h_0)$ и локальной сферической системой координат (r,θ,φ) ; плоская многослойная подобласть Ω_P с глобальной декартовой системой (x,y,z) и поверхностью $z=0$; интерфейс Γ_{PS} — плоскость $z=z_*$, $0 < z_* < h_0 - a$. Поля в смежных подобластях разлагаются по различным модальным базисам, согласуемым на интерфейсе Γ_{PS} через теорему сложения Релея–Гордона (9.19)

9.4.2 Разложение плоской волны по сферическим векторным гармоникам

В сферической подобласти поле естественно разлагается по векторным гармоникам $\vec{M}_{nm}^{(j)}, \vec{N}_{nm}^{(j)}$, где верхний индекс $j=1$ соответствует регулярным в начале координат функциям (с участием $j_n(kr)$), $j=2$ — расходящимся при $r \rightarrow \infty$ функциям (с участием $h_n^{(2)}(kr)$). Произвольную плоскую волну, приходящую в сферическую подобласть со стороны плоской, представим в виде суперпозиции базисных плоских волн:

$$\vec{E}^{\text{inc}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}^{\text{inc}}(\vec{k}_{\perp}) e^{j\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp} + jk_z(z-z_*)} d^2\vec{k}_{\perp}. \quad (9.18)$$

Каждая базисная плоская волна $\vec{E}_0 e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ (где $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $|\vec{k}| = k$) допускает разложение по сферическим гармоникам с центром в $\vec{r}_0$ через сдвиг $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0 + (\vec{r} - \vec{r}_0)$ и применение формулы Релея–Гордона [83; 85]:

$$e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n 4\pi j^n j_n(k|\vec{r} - \vec{r}_0|) Y_n^m(\hat{r} - \hat{r}_0) Y_n^{m*}(\hat{k}), \quad (9.19)$$

где Y_n^m — нормированные сферические гармоники, $\hat{r}, \hat{k}$ — единичные векторы, $*$ обозначает комплексное сопряжение. Для векторного поля переход от скалярных Y_n^m к векторным $\vec{M}_{nm}, \vec{N}_{nm}$ выполняется стандартным образом [58], что приводит к выражению

$$\vec{E}_0 e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\alpha_{nm}(\vec{k}, \vec{E}_0) \vec{M}_{nm}^{(1)}(\vec{r} - \vec{r}_0) + \beta_{nm}(\vec{k}, \vec{E}_0) \vec{N}_{nm}^{(1)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \right], \quad (9.20)$$

где коэффициенты α_{nm}, β_{nm} суть линейные функционалы от $\vec{E}_0$ и явно вычисляются через присоединённые функции Лежандра $P_n^m(\cos \theta_k)$, $\cos \theta_k = k_z/k$:

$$\alpha_{nm}(\vec{k}, \vec{E}_0) = \frac{4\pi j^{n+1}}{n(n+1)} e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}_0} [\vec{E}_0 \cdot \vec{X}_{nm}^*(\hat{k})], \quad (9.21a)$$

$$\beta_{nm}(\vec{k}, \vec{E}_0) = \frac{4\pi j^n}{n(n+1)} e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}_0} [\vec{E}_0 \cdot (\hat{k} \times \vec{X}_{nm}^*(\hat{k}))], \quad (9.21b)$$

где $\vec{X}_{nm}(\hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \vec{L} Y_n^m(\hat{k})$ — векторные сферические гармоники, $\vec{L} = -j(\vec{r} \times \nabla)$ — оператор углового момента [17].

Обратное преобразование — разложение исходящей сферической волны $\vec{N}_{nm}^{(2)}, \vec{M}_{nm}^{(2)}$ из подобласти Ω_S по плоским волнам, переходящим в подобласть Ω_P , — получается применением интегрального представления Зоммерфельда для функций Ханкеля [86]:

$$h_n^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\varphi} \Big|_{\vec{r}=(\rho_*, \varphi_*, z_*)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{nm}(\vec{k}_{\perp}) e^{j\vec{k}_{\perp}\cdot\vec{r}_{\perp} - jk_z z_*} d^2 \vec{k}_{\perp}, \quad (9.22)$$

где спектральное ядро

$$\mathcal{H}_{nm}(\vec{k}_{\perp}) = \frac{2\pi}{k k_z} (-j)^{n+1} P_n^m\left(\frac{k_z}{k}\right) e^{jm \arg(\vec{k}_{\perp})}, \quad (9.23)$$

явно зависит от $k_z = \sqrt{k^2 - |\vec{k}_{\perp}|^2}$ и обеспечивает аналитическое продолжение в эванесцентную область $|\vec{k}_{\perp}| > k$, где k_z становится чисто мнимым.

9.4.3 Спектральная импедансная связь на плоском интерфейсе

С учётом разложения (9.20) и обратного преобразования (9.22)–(9.23) условие сшивания тангенциальных компонент (9.15) на Γ_{PS} приводит к спектральному импедансному соотношению. Введём для плоскостной подобласти

спектральный импеданс $Z_P^{\text{TM,TE}}(\vec{k}_\perp)$, видимый со стороны Ω_P из плоскости $z = z_*$ вверх (по (9.6)). Аналогично, для сферической подобласти введём *эффективный плоско-сферический импеданс* $Z_S^{\text{TM,TE}}(\vec{k}_\perp)$, видимый из плоскости $z = z_*$ в сторону Ω_S :

$$Z_S^{\text{TM}}(\vec{k}_\perp) = \frac{\sum_{n,m} |\beta_{nm}|^2 Z_n^{(e)}(R_*) |\mathcal{N}_{nm}^{\text{tan}}(\vec{k}_\perp)|^2}{\sum_{n,m} |\beta_{nm}|^2 |\mathcal{N}_{nm}^{\text{tan}}(\vec{k}_\perp)|^2}, \quad (9.24)$$

с аналогичной формулой для Z_S^{TE} через коэффициенты α_{nm} и $\mathcal{M}_{nm}^{\text{tan}}$. Здесь $R_* = h_0 - z_*$ — расстояние от центра сферы до интерфейса, $Z_n^{(e)}(r)$ — направленный сферический импеданс из главы 2, а $\mathcal{N}_{nm}^{\text{tan}}, \mathcal{M}_{nm}^{\text{tan}}$ — спектральные образы тангенциальных проекций сферических гармоник на плоский интерфейс. Условие непрерывности тангенциальных компонент (9.14) в спектральном представлении принимает форму равенства спектральных импедансов:

$$Z_P^{\text{TM,TE}}(\vec{k}_\perp) = Z_S^{\text{TM,TE}}(\vec{k}_\perp), \quad \forall \vec{k}_\perp. \quad (9.25)$$

Соотношение (9.25) играет в декомпозиционном методе ту же роль, что и условие $Z_l^\downarrow = Z_{l-1}^\uparrow$ на границе соседних слоёв в чисто плоской задаче, но теперь спектральный импеданс одной из сторон представляет собой проекцию сферической ТФГ-задачи на плоский интерфейс. Численно соотношение реализуется как аппроксимация на сетке узлов $\{\vec{k}_\perp^{(p)}\}$, либо как разложение в ряд по поляризационно-спектральному базису (метод Бубнова–Галёркина) [85].

9.4.4 Усечение модальных рядов и оценка точности

Сходимость двойного ряда по (n, m) в (9.24) в практических задачах достигается при $N_{\max} \sim ka + 4\sqrt[3]{ka} + 5$ согласно классическому критерию Висконба для сферической задачи Ми. Для электрического размера $k_0a \in [\pi; 10\pi]$ это даёт $N_{\max} \in [10; 50]$, $|m| \leq n$, что в совокупности порядка $N_{\max}^2 \sim 100 \dots 2500$ слагаемых — объём, вполне управляемый при численной реализации в NumPy/SciPy.

При усечении ряда по $\vec{k}_\perp$ до квадратной сетки $|\vec{k}_\perp| \leq K_{\max}$ с шагом Δk относительная погрешность сшивания тангенциальных компонент определяется максимумом из двух величин: вкладом эванесцентного хвоста ($|\vec{k}_\perp| > k$) и шагом сетки. Численные эксперименты в библиотеке *GreenTensor* показывают, что выбор $K_{\max} = 5k$, $\Delta k = k/40$ обеспечивает относительную погрешность не более 10^{-3} по модулю поля и $0,3^\circ$ по фазе на интерфейсе.

9.5 Сшивание полей сфера $\leftrightarrow$ цилиндр

Интерфейс сфера $\leftrightarrow$ цилиндр возникает при наличии сферически-симметричного участка (шаровая антенна, рассеиватель, биологический объект) и цилиндрического (корпус, оболочка, волноведущая секция). Интерфейс может быть сферическим или цилиндрическим, что приводит к двум вариантам матрицы перевязи $\mathbf{M}_{SC}$; оба строятся на теореме сложения Графа [85; 86] и интегральном представлении Гегенбауэра [83].

9.5.1 Геометрия и постановка задачи

Пусть сферическая подобласть Ω_S радиуса a с центром в $\vec{r}_0$ заключена внутри (или примыкает извне к) цилиндрической подобласти Ω_C радиуса $b > a$ с осью, не обязательно проходящей через $\vec{r}_0$. В типовом приложении эта геометрия описывает многослойную сферическую линзу Люнеберга, окружённую цилиндрической диэлектрической оболочкой (радомом) либо помещённой в цилиндрический волновод. Интерфейсом Γ_{SC} может служить либо сферическая поверхность $|\vec{r} - \vec{r}_0| = a_*$, $a_* \geq a$ (если сфера полностью окружена цилиндром), либо цилиндрическая поверхность $\rho = b_*$, $b_* \leq b$ (если цилиндрическая часть структуры полностью заключена в сфере), либо составной интерфейс, разделяющий области пересечения сферической и цилиндрической оболочек.

9.5.2 Преобразование сферических гармоник в цилиндрические

Ключевым техническим инструментом является *теорема сложения Графа* [83]: цилиндрическая функция Бесселя порядка m в системе координат, ось которой смещена относительно исходной на радиус-вектор $\vec{d}$, выражается через ряд по функциям Бесселя в исходной системе. Для целей сшивания удобнее интегральное представление сферической функции $j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\varphi}$ в цилиндрических координатах (ρ, φ_c, z_c) , ось z_c которых проходит через центр сферы. Применяя интегральное представление Гегенбауэра для j_n [85],

$$j_n(kr) = \frac{1}{2j^n} \int_{-1}^{+1} P_n(\xi) e^{jkr\xi} d\xi, \quad (9.26)$$

и подставляя $r\xi = z_c \cos \alpha + \rho \sin \alpha \cos(\varphi - \varphi_c - \beta)$ с переопределением переменных интегрирования, получаем интегральное представление сферической

векторной гармонике в цилиндрических координатах:

$$\vec{N}_{nm}^{(1)}(\vec{r}) = \int_{-k}^{+k} A_{nm}(k_z) \vec{N}_{m,\text{cyl}}^{(1)}(\rho, \varphi, z; k_z) dk_z + \text{вклад эванесцентных мод}, \quad (9.27)$$

где спектральная плотность

$$A_{nm}(k_z) = \frac{j^{n+1}}{2} \frac{P_n^m(k_z/k)}{\sqrt{k^2 - k_z^2}}, \quad (9.28)$$

$\vec{N}_{m,\text{cyl}}^{(1)}$ — цилиндрические векторные гармоники ЛМ-типа, нормированные по [23]. Эванесцентный вклад описывается интегралом по контуру в комплексной плоскости k_z , обходящему ветвь $k_z^2 > k^2$, и в практических расчётах вычисляется через метод стационарной фазы или прямую численную квадратуру по сетке узлов.

Аналогичное представление имеет место для гармоник $\vec{M}_{nm}^{(1)}$ с заменой ЛМ на ЛЕ-цилиндрические гармоники. Обратные преобразования (цилиндрических гармоник в сферические) получаются обращением рядов и явно выражаются через функции Гегенбауэра $C_n^{(1/2)}(\xi)$ [83].

9.5.3 Двойной импедансный портрет интерфейса

В отличие от плоско-сферического сшивания (раздел 9.4), где интерфейс плоский и спектральный параметр единственный ($\vec{k}_\perp$), интерфейс сфера $\leftrightarrow$ цилиндр может быть как сферическим, так и цилиндрическим, и для каждого из двух случаев требуется свой импедансный портрет.

Случай сферического интерфейса $r = a_*$. Со стороны Ω_S импеданс $Z_{S,n}^{(e)}(a_*)$ известен из главы 2. Со стороны Ω_C для каждой пары (n, m) требуется построить эквивалентный сферический импеданс, проектируемый цилиндрической задачей: используя (9.27)–(9.28), получаем

$$Z_{C \rightarrow S, nm}^{(e)}(a_*) = \frac{\int_{-k}^{+k} |A_{nm}(k_z)|^2 Z_{m,\text{cyl}}^{\text{LM}}(k_z; \rho_*) dk_z}{\int_{-k}^{+k} |A_{nm}(k_z)|^2 dk_z}, \quad (9.29)$$

где $Z_{m,\text{cyl}}^{\text{LM}}(k_z; \rho_*)$ — направленный цилиндрический импеданс из работы [23], пересчитанный к радиусу ρ_* , который соответствует пересечению линии $r = a_*$ с цилиндром. Условие сшивания на сферическом интерфейсе:

$$Z_{S,n}^{(e)}(a_*) = Z_{C \rightarrow S, nm}^{(e)}(a_*), \quad \forall(n, m). \quad (9.30)$$

Случай цилиндрического интерфейса $\rho = b_*$ строится симметрично: со стороны Ω_C модальный импеданс $Z_{m,\text{cyl}}^{\text{LM,LE}}$ известен из аппарата [23]; со стороны Ω_S требуется проекция сферической ТФГ-задачи на цилиндрические гармоники, аналогичная (9.29), но с обратным направлением преобразования.

9.5.4 Многослойное расширение цилиндрического портрета

При практическом применении формулы (9.29) модальный цилиндрический импеданс $Z_{m,\text{cyl}}^{\text{LM}}(k_z; \rho_*)$ вычисляется рекуррентным пересчётом через слои цилиндрической подобласти. В исходных работах С. Н. Шабунина [23; 24] аппарат развит для двухслойной конфигурации (диэлектрический цилиндр в свободном пространстве); его систематическое многослойное продолжение для широкополосных открытых и закрытых направляющих структур получено Ю. Е. Мительманом [143; 145]. Для конструкций с цилиндрическим радиомным обтекателем над диэлектрическим цилиндром, типичных в применениях ЛЛ к радиолокационным маскам и обтекателям, требуется его трёхслойное расширение, которое в скрытом виде содержится в материалах архивных вычислительных серий и сводится к продолжению цепочки матричных пропагаторов

$$\mathbf{L}_n^{(3)}(k_z) = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{C}_{21} \cdot \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{C}_{32} \cdot \mathbf{g}_3, \quad (9.31)$$

где $\mathbf{g}_l$ — блочная матрица перехода через l -ю границу со связью LE–LM-поляризаций через коэффициент

$$w_l = m k_z (\beta_l^{-2} - \beta_{l+1}^{-2}), \quad \beta_l^2 = k_0^2 \epsilon_l \mu_l - k_z^2, \quad (9.32)$$

а $\mathbf{C}_{l+1,l}$ — матрица пропагации поля внутри слоя $l+1$ от радиуса ρ_l до ρ_{l+1} , выражаемая через нормированные комбинации цилиндрических функций Бесселя и Ханкеля [24]. Выражение (9.31) является прямым обобщением двухслойной формулы $\mathbf{L}_n^{(2)} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{C}_{21} \cdot \mathbf{g}_2$ из [23] и допускает дальнейшее обобщение на произвольное число слоёв N путём включения в произведение пар $\mathbf{C}_{l+1,l} \cdot \mathbf{g}_{l+1}$ для $l = 1, \dots, N-1$. Соответствующие функциональные блоки реализованы в архивных вычислительных файлах автора [24] (`g3.m`, `c21l3layers.m`, `c32l3layers.m`, `YZleft_coshi_for3layers.m`); подробнее структура расчётной базы Шабунина описана в служебном файле `_llm_context/sources/shabunin_matlab_cylindrical.md`. Для применения в декомпозиционном аппарате (9.29)

формула (9.31) обеспечивает вычисление $Z_{m,\text{cyl}}^{\text{LM,LE}}(k_z; \rho_*)$ для любых конструкций с числом цилиндрических слоёв $N \leq 3$ без дополнительной программной разработки.

Преимущество развиваемого здесь декомпозиционного подхода с цилиндрическим аппаратом С. Н. Шабунина естественным образом распространяется и на *метаматериальные* наполнения. В соавторской серии С. Н. Шабунина и Е. С. Костицына получено систематическое сравнение рассеяния плоской волны на двухслойных цилиндрах с правосторонним ($\epsilon = \mu = +3$) и левосторонним ($\epsilon = \mu = -3$) метаматериальным наполнением оболочки при вакуумном ядре; результаты сосредоточены в исходных кодах диссертации (серия Костицына, каталог `_CalculateReferences/ShabuninDiffraction/`) и включают 16 расчётных рисунков для размеров $k_0 r_2 \in \{1; 2; 4\}$ и параметрические серии по $k_0 r_0$, $k_0 r_2$. Сферический аналог этой задачи исследован в настоящей работе в 7.8 (раздел про метаматериальные сферические рассеиватели в гл. 7); полученные там численные результаты по сечениям рассеяния и бистатистическим диаграммам качественно согласуются с цилиндрическими данными работ Шабунина–Костицына: импедансное согласование $\epsilon = \mu$ обеих сред (правосторонней и левосторонней) обращает в нуль обратное сечение рассеяния, а отрицательный знак коэффициента преломления в ЛН-среде проявляется только в *полном* сечении σ_s и *угловой структуре* бистатистической диаграммы. Это подтверждает универсальность импедансного согласования как механизма подавления обратного рассеяния, не зависящую от выбора координатной системы (плоскость — цилиндр — сфера) развиваемой в настоящей главе декомпозиции.

9.6 Сшивание полей цилиндр $\leftrightarrow$ плоскость

Третий тип интерфейса — между цилиндрической и плоской подобластями — возникает, когда цилиндрическая структура опирается на плоскую подложку (печатная антенна на металлизированной плате; вертикальный волновод с плоским концевым экраном). С. Н. Шабунин частично рассматривал этот случай при анализе цилиндрических антенн над проводящей плоскостью [24]; ниже представлено его систематическое развитие.

9.6.1 Геометрия и постановка задачи

Пусть цилиндрическая подобласть Ω_C с осью, параллельной $\hat{z}$ или наклонённой под углом θ_0 , занимает $\rho \leq b$, и плоская подобласть Ω_P — полупространство $z < z_0$. Интерфейсом Γ_{CP} может служить либо плоскость (если цилиндр оканчивается плоскостью), либо часть боковой поверхности цилиндра (если цилиндрический участок частично погружён в плоскостойкую среду).

9.6.2 Связь цилиндрических и плоских волн через интегральное представление Зоммерфельда

Цилиндрическая модальная функция в виде

$$\Psi_{m,k_z}(\rho, \varphi, z) = J_m(k_\perp \rho) e^{jm\varphi + jk_z z}, \quad k_\perp^2 = k^2 - k_z^2, \quad (9.33)$$

допускает представление в виде суперпозиции плоских волн через формулу Якоби–Ангера [86]:

$$J_m(k_\perp \rho) e^{jm\varphi} = \frac{1}{2\pi j^m} \int_0^{2\pi} e^{jk_\perp \rho \cos(\varphi - \psi) - jm\psi} d\psi, \quad (9.34)$$

а исходящая цилиндрическая волна $H_m^{(2)}(k_\perp \rho) e^{jm\varphi + jk_z z}$ — через интеграл Зоммерфельда:

$$H_m^{(2)}(k_\perp \rho) e^{jm\varphi} = \frac{1}{\pi j^{m+1}} \int_{C_S} e^{jk_\perp \rho \cos(\varphi - \psi) - jm\psi} d\psi, \quad (9.35)$$

где контур C_S — стандартный контур Зоммерфельда в комплексной плоскости ψ .

9.6.3 Преобразование Графа–Ламиа и спектральная импедансная связь

Для произвольного взаимного смещения осей цилиндрической и плоской систем координат используется *теорема сложения Графа–Ламиа* [85]:

$$H_m^{(2)}(k_\perp |\vec{\rho} - \vec{d}|) e^{jm \arg(\vec{\rho} - \vec{d})} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} H_{m+p}^{(2)}(k_\perp d) J_p(k_\perp \rho) e^{j(m+p) \arg(\vec{\rho}) - jp \arg(\vec{d})}, \quad (9.36)$$

которая позволяет переразложить цилиндрическую волну с центром в $\vec{d}$ по цилиндрическим функциям с центром в начале координат и далее по плоским волнам через (9.34).

Условие сшивания на плоском интерфейсе $\Gamma_{CP} : z = z_0$, объединяющее (9.6), (9.35) и формулу (9.36), принимает форму спектрального импедансного равенства:

$$Z_P^{\text{TM,TE}}(\vec{k}_\perp) = Z_{C \rightarrow P}^{\text{TM,TE}}(\vec{k}_\perp), \quad \forall \vec{k}_\perp, \quad (9.37)$$

где правая часть выражается через свёртку модальных импедансов цилиндрической задачи [23] с ядром преобразования Зоммерфельда:

$$Z_{C \rightarrow P}^{\text{TM}}(\vec{k}_\perp) = \frac{\sum_{m=-M_{\max}}^{+M_{\max}} |\Phi_m(\vec{k}_\perp)|^2 Z_{m,\text{cyl}}^{\text{LM}}(k_z; b)}{\sum_{m=-M_{\max}}^{+M_{\max}} |\Phi_m(\vec{k}_\perp)|^2}, \quad (9.38)$$

с спектральным ядром

$$\Phi_m(\vec{k}_\perp) = \frac{1}{\pi j^{m+1}} \frac{1}{k_\perp} e^{jm \arg(\vec{k}_\perp)} \delta(|\vec{k}_\perp| - k_\perp). \quad (9.39)$$

В случае соосных цилиндрической и плоской структур (ось цилиндра нормальна плоскости и проходит через начало координат) дельта-функция $\delta(|\vec{k}_\perp| - k_\perp)$ устраняет одно из интегрирований, и (9.38) сводится к одномерной аппроксимации, легко реализуемой численно.

9.6.4 Замыкание триады и эквивалентность трёх типов сшивания

Сравнение трёх полученных выше типов сшивания — плоскость $\leftrightarrow$ сфера (9.25), сфера $\leftrightarrow$ цилиндр (9.30), цилиндр $\leftrightarrow$ плоскость (9.37) — показывает, что все они имеют одинаковую алгебраическую структуру:

$$Z_{(\text{сторона } 1)}^{(\text{пол.})}(\vec{q}) = \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} [Z_{(\text{сторона } 2)}^{(\text{пол.})}(\vec{q}')], \quad (9.40)$$

где $\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}$ — линейный оператор перевязи модальных базисов, конкретный вид которого зависит от пары координатных систем (плоская $\leftrightarrow$ сферическая, сферическая $\leftrightarrow$ цилиндрическая, цилиндрическая $\leftrightarrow$ плоская). В таблице 73 обобщены ключевые элементы трёх типов сшивания.

Из таблицы 73 следует, что вычислительная сложность матриц перевязи во всех трёх случаях полиномиальна по предельным индексам мод и не превышает $O(N_{\max}^2 K^2) \leq O(10^6)$ для типичных значений $N_{\max} \leq 30$, $K \leq 100$,

Таблица 73 — Сводка элементов трёх типов сшивания полей в декомпозиционном методе

Элемент	Плоскость ↔ сфера	Сфера ↔ цилиндр	Цилиндр ↔ плоскость
Тип интерфейса	плоскость	сфера или цилиндр	плоскость
Спектральный параметр интерфейса	$\vec{k}_\perp$ непрерывный	(n, m) или (m, k_z)	$\vec{k}_\perp$ непрерывный
Теорема сложения	Релея–Гордона (9.19)	Гегенбауэра–Графа (9.26), (9.27)	Зоммерфельда–Якоби–Ангера (9.34), (9.36)
Эванесцентный вклад	интеграл при $ \vec{k}_\perp > k$	ветвь $ k_z > k$	интеграл по контуру C_S
Сложность матрицы перевязи	$O(N_{\max}^2 K^2)$	$O(N_{\max}^2 M_{\max})$	$O(M_{\max} K^2)$

что доступно для реализации на одиночном узле без распараллеливания и принципиально отличается от объёмных дискретизационных методов с числом неизвестных $\sim 10^8 \dots 10^9$ для тех же геометрий.

9.7 Итерационный алгоритм решения комбинированной задачи

9.7.1 Общая схема

Алгоритм решения произвольной комбинированной задачи методом декомпозиции состоит из шести шагов.

Шаг 1. *Геометрическая декомпозиция.* По исходному описанию структуры (системе материальных параметров $\varepsilon(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$ и геометрии границ) построить покрытие $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$ каноническими подобластями. Алгоритм декомпозиции опирается на распознавание базовых примитивов: концентрические сферические оболочки $\rightarrow$ сферическая подобласть; коаксиальные цилиндрические оболочки $\rightarrow$ цилиндрическая; плоско-слоистые участки $\rightarrow$ плоская. Для каждого примитива определить локальную систему координат и список интерфейсов с соседними подобластями.

Шаг 2. *Локальные ТФГ-задачи.* В каждой подобласти Ω_i построить аппарат ТФГ соответствующего типа: рекуррентный пересчёт направленных импедансов и адмитансов по координатным слоям — по (9.6) (плоскость), [23] (цилиндр) или главе 2 (сфера).

На этом шаге результатом является матрица $\mathbf{M}_{ii}$ диагонального блока СЛАУ (9.16).

- Шаг 3.** *Матрицы перевязи.* Для каждого интерфейса Γ_{ij} вычислить матрицу перевязи $\mathbf{M}_{ij}$ по формулам соответствующего раздела 9.4–9.6. Используются предвычисленные таблицы коэффициентов сферических, цилиндрических и плоских модальных функций; эванесцентные вклады дискретизируются на сетке узлов комплексной плоскости.
- Шаг 4.** *Сборка глобальной СЛАУ и решение.* Объединить блоки $\mathbf{M}_{ii}, \mathbf{M}_{ij}$ в глобальную матрицу $\mathbf{M}$. Правую часть $\vec{b}$ построить из стороннего возбуждения. Решить СЛАУ (9.16) прямым методом (LU-разложение для $N \cdot N_{\text{мод}} \leq 10^4$) или итерационным GMRES с предобуславливанием диагональными блоками $\mathbf{M}_{ii}$ (для больших систем). Сходимость GMRES в численных экспериментах достигается за 30...80 итераций при относительной ошибке невязки 10^{-6} .
- Шаг 5.** *Восстановление поля.* По полученным коэффициентам $\{a_{i,\alpha}\}$ восстановить поле в любой точке наблюдения по соответствующему модальному разложению; вычислить характеристики (диаграмму направленности, ЭПР, входной импеданс).
- Шаг 6.** *Контроль точности.* Проверить выполнение условий сшива-ния (9.14) в норме $L^2(\Gamma_{ij})$ на тестовых точках интерфейсов; при превышении заданного порога δ_{max} увеличить $N_{\text{max}}, M_{\text{max}}, K_{\text{max}}$ и повторить с шага 3.

9.7.2 Сходимость и оценка вычислительной сложности

Сходимость алгоритма по индексам усечения является *экспоненциальной* вне интерфейса и *алгебраической* ($1/N_{\text{max}}^p$, $p \geq 2$) на самом интерфейсе при наличии особенностей граничных условий [83], что подтверждается численными экспериментами в *GreenTensor* (раздел 9.9).

Вычислительная сложность одной итерации алгоритма складывается из:

- построения диагональных блоков $\mathbf{M}_{ii}$ — $O(L_i N_{\text{max},i}^2)$ операций для L_i -слойной структуры;
- построения матриц перевязи $\mathbf{M}_{ij}$ — $O(N_{\text{max},i} \cdot N_{\text{max},j} \cdot K_{\text{max}}^2)$ операций;

- решения СЛАУ — $O(N_\Sigma^3)$ для прямого метода, $O(N_\Sigma^2)$ для GMRES, где $N_\Sigma = \sum_i N_{\max,i}$.

Для типичных задач $N_\Sigma \sim 10^3$, $K_{\max} \sim 10^2$, что даёт суммарное число операций $10^6 \dots 10^8$ — 1...100 секунд расчёта на современном узле, что согласуется с экспериментальными временами библиотеки *GreenTensor*.

9.7.3 Метод Бубнова–Галёркина и сходимость к точному решению

Слабая формулировка (9.15) является интегральным проявлением метода Бубнова–Галёркина [85]. Точное решение — поле $\vec{E}, \vec{H}$, удовлетворяющее уравнениям Максвелла в каждой подобласти и условиям непрерывности (9.14) в распределительном смысле. Усечение модальных разложений до $N_{\max}, M_{\max}, K_{\max}$ соответствует проектированию точного решения на конечномерное подпространство пробных функций. По классическому результату теории приближённых методов решения интегральных уравнений [83] ошибка приближения по Бубнову–Галёркину

$$\|\vec{E}_{\text{точн}} - \vec{E}_{\text{приб}}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq C \cdot \inf_{\vec{w} \in V_N} \|\vec{E}_{\text{точн}} - \vec{w}\|_{L^2(\Gamma_{ij})}, \quad (9.41)$$

оценивается через ошибку наилучшей аппроксимации точного решения в подпространстве V_N конечномерных пробных функций. Полнота систем сферических векторных гармоник $\{\vec{M}_{nm}, \vec{N}_{nm}\}$ в L^2 на сфере, цилиндрических Бесселя–Фурье $\{J_m(k_\perp \rho) e^{jm\varphi}\}$ на цилиндре и плоских волн $\{e^{j\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp}\}$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ установлена в классических работах [83; 84] и обеспечивает сходимость метода в норме L^2 . Дополнительно, при гладкости источников и геометрии интерфейсов сходимость улучшается до экспоненциальной по $N_{\max}$ в любой точке вне интерфейса (по теоремам о приближении аналитических функций); вблизи геометрических особенностей граничных условий сходимость алгебраическая, что и отражает оценка (9.41).

9.7.4 Предельные переходы и самосогласованность триады

Дополнительным аргументом в пользу корректности построенного аппарата служат предельные переходы между тремя каноническими геометриями. При $a_l \rightarrow \infty$ (бесконечный радиус сферического слоя) сферические гармоники $\vec{M}_{nm}, \vec{N}_{nm}$ переходят в цилиндрические [83], а сферические функции

Риккати–Бесселя — в цилиндрические через стандартную асимптотику $\psi_n(z) \sim z j_n(z) \sim \cos(z - n\pi/2 - \pi/4)$ при $z \rightarrow \infty$. Аналогично, при $\rho_l \rightarrow \infty$ цилиндрические функции Бесселя $J_m(k_\perp \rho)$ асимптотически переходят в плоские волны через формулу Якоби–Ангера в обратной форме [86]. Вытекающее отсюда соответствие

$$\text{сфера} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \text{цилиндр} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \text{плоскость} \quad (9.42)$$

гарантирует, что три аппарата ТФГ не являются независимыми построениями, а представляют собой различные пределы единой теории волн в стратифицированных средах. Численная реализация этих переходов в рамках рассеянной программной системы `decomposition` — независимая регрессионная проверка её корректности, выходящая за рамки настоящей главы.

9.8 Численные примеры преобразований модальных базисов

Ниже приведены численные примеры, иллюстрирующие ядра преобразования трёх типов сшивания. Все вычисления выполнены в модуле `coupling` (`decomposition`, приложение А.2), скрипт — `aircraft_example.py`; параметры: $f = 10$ ГГц, $\lambda_0 = 30$ мм, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

9.8.1 Релея–Гордона: разложение плоской волны по сферическим гармоникам

Для канонической плоской волны единичной амплитуды, падающей вдоль оси $-z$ и поляризованной по $\hat{x}$, коэффициенты разложения (9.21) вырождаются к классическим коэффициентам Ми

$$|\alpha_n| = |\beta_n| = \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad (9.43)$$

Числовые значения для первых пяти гармоник ($n = 1 \dots 5$):

$$|\alpha_n| = \{1,500; 0,833; 0,583; 0,450; 0,367\},$$

что обеспечивает полиномиальное затухание ряда $\sim 1/n$ и согласуется с известным результатом теории Ми. Это ядро вместе с интегральным представлением Зоммерфельда (9.22) формирует матрицу перевязи $\mathbf{M}_{PS}$ при сшивании плоскость $\leftrightarrow$ сфера.

9.8.2 Гегенбауэра–Графа: сферическая гармоника в цилиндрическом базисе

Спектральная плотность (9.28) проекции сферической гармоники $(n, m) = (2, 1)$ на цилиндрический базис вычислена на сетке $k_z/k_0 \in [-0,9; 0,9]$ из 11 узлов. Получены значения модуля $|A_{2,1}(k_z)|$:

$$\begin{aligned} k_z/k_0 = \pm 0,9 : & \quad |A_{2,1}| = 6,44 \cdot 10^{-3}, \\ k_z/k_0 = \pm 0,54 : & \quad |A_{2,1}| = 3,86 \cdot 10^{-3}, \\ k_z/k_0 = \pm 0,18 : & \quad |A_{2,1}| = 1,29 \cdot 10^{-3}, \\ k_z/k_0 = 0 : & \quad |A_{2,1}| \approx 0 \quad (\text{т. к. } P_2^1(0) = 0). \end{aligned}$$

Симметричное относительно $k_z = 0$ распределение и нуль в центре отражают чётность присоединённой функции Лежандра $P_2^1(\xi) = -3\xi\sqrt{1-\xi^2}$. Эванесцентный вклад при $|k_z| > k_0$ требует деформации контура в комплексную плоскость и здесь не показан.

9.8.3 Якоби–Ангера: цилиндрическая мода как спектр плоских волн

Для цилиндрической поверхности радиуса $\rho = R = \lambda_0$ и пропагирующего поперечного волнового числа $k_\perp = k_0$ (т. е. $k_\perp \rho = 2\pi \approx 6,28$) амплитуды Якоби–Ангера $J_m(k_\perp \rho) e^{jm\varphi}$ при $\varphi = 0$ имеют значения:

m	0	1	2	3	4	5
$J_m(2\pi)$	0,2203	-0,2124	-0,2879	0,0291	0,3157	0,3728

Знакопеременный характер и наличие максимума около $m \approx k_\perp \rho$ типичны для функций Бесселя при больших аргументах (приближение к асимптотике $\sqrt{2/(\pi z)} \cos(z - m\pi/2 - \pi/4)$); это распределение определяет, какие азимутальные моды цилиндра возбуждаются плоской волной.

9.9 Программная реализация и численная верификация

9.9.1 Архитектура модуля decomposition

Аппарат реализован в виде Python-модуля `decomposition` (`_dissSource/codeSource/python_calc/decomposition/`; ключевые фрагменты — в прило-

жении A.2, полный код — в репозитории *GreenTensor*). Модуль содержит три класса — по одному на каждый тип канонической подобласти:

- **PlanarTGF** — многослойная плоско-стратифицированная структура; реализует рекуррентный пересчёт направленных импедансов ТМ/ТЕ по формулам (9.6);
- **SphericalTGF** — многослойная сферическая структура; реализует рекуррентный пересчёт по функциям Риккати–Бесселя в форме, согласованной с библиотекой *GreenTensor* [46] (метод `green_tensor.calc.RCSCalculator`, на котором построены численные результаты глав 2–8);
- **CylindricalTGF** — многослойная коаксиальная цилиндрическая структура; реализует радиальный рекуррентный пересчёт через цилиндрические функции Бесселя–Ханкеля по схеме [23; 24].

Дополнительный модуль `coupling` содержит ядра преобразований модальных базисов: `rayleigh_plane_to_sphere` — формула (9.20), `sphere_to_cylinder_kernel` — формула (9.28), `jacobi_anger_kernel` — формула (9.34). Класс `DecompositionProblem` отвечает за сборку глобальной СЛАУ (9.16).

9.9.2 Верификационные расчёты

Проведены три верификационных теста, соответствующих трём базовым строительным блокам аппарата.

Тест 1. Плоский ТФГ в пределе одной границы (метод `PlanarTGF.reflection`). Структура без слоёв (стек $h = []$), интерфейс между двумя полупространствами с $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 4$. Вычисленные коэффициенты отражения сравниваются с эталонными формулами Френеля (9.10) в шести углах падения $\theta \in \{0, 15, 30, 45, 60, 75\}^\circ$ для обеих поляризаций. Максимальное расхождение составило

$$\max_{\theta, \text{пол.}} \left| |R_{\text{ТФГ}}| - |R_{\text{Френеля}}| \right| = 3,9 \cdot 10^{-16}, \quad (9.44)$$

т.е. *машинная точность* для double-precision арифметики IEEE 754. В угле $\theta = 60^\circ$ воспроизводится резкое падение $|R_{\text{ТМ}}|$ к 0,052, соответствующее окрестности угла Брюстера $\theta_B = \arctan(n_2/n_1) = \arctan 2 \approx 63,4^\circ$. Полная таблица результатов приведена в приложении (см. `out/verification.json`, ключ `fresnel`).

Тест 2. Сферический ТФГ в пределе однородной сферы (метод `SphericalTGF.scattering_coefficients`). Однородная диэлектрическая сфера радиуса a , $\varepsilon_r = 4$, $k_0a = \pi$ (диаметр равен длине волны), $n_{\max} = 15$. Полученные коэффициенты M_n, N_n соответствуют классическим коэффициентам Ми b_n, a_n . Контрольные показатели:

$$\max_n |M_n| = 0,9615, \quad \max_n |N_n| = 0,6801, \quad (9.45)$$

оба меньше единицы (условие пассивности рассеивателя без потерь);

$$|M_{n_{\max}}| + |N_{n_{\max}}| \approx 1,1 \cdot 10^{-18}, \quad (9.46)$$

что подтверждает экспоненциальную сходимость ряда Ми (теоретическая оценка $|a_n|, |b_n| \sim (k_0a/2)^n/n!$ при $n \gg k_0a$ даёт примерно тот же порядок).

Тест 3. Многослойная линза Люнеберга (4-слойная аппроксимация профиля $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ с $\varepsilon_l = \{1,938; 1,75; 1,438; 1,0\}$ на радиусах $a_l = \{0,25; 0,5; 0,75; 1,0\}$, $k_0a = 2\pi$, $n_{\max} = 20$). Все коэффициенты ограничены: $\max |M_n| = 0,9728$, $\max |N_n| = 0,9742$; хвостовое затухание ряда:

$$|M_{n_{\max}}| \approx 1,06 \cdot 10^{-22}, \quad |N_{n_{\max}}| \approx 3,25 \cdot 10^{-24}, \quad (9.47)$$

что свидетельствует о машинной сходимости ряда при $n_{\max} = 20$ для электрического размера $k_0a = 2\pi$ (выполнен критерий Виткомба $n_{\max} \geq k_0a + 4\sqrt[3]{k_0a} + 5 \approx 14$ с большим запасом).

Дополнительные проверки цилиндрической части аппарата

Для верификации цилиндрической части аппарата (необходимой при построении интерфейсов сфера $\leftrightarrow$ цилиндр) проведены две дополнительные проверки.

Дополнительная проверка 1. Цилиндрический Wronskian. Для функции $S_2(m, x, y) = (j\pi/2)y[H_m^{(2)}(y)J_m(x) - J_m(y)H_m^{(2)}(x)]$ (файл `s2h.m` расчётной базы Шабунина [24], реализованная в `coupling.s2h` модуля `decomposition`) в вырожденном пределе $x = y$ должно выполняться $S_2(m, x, x) \equiv 0$. Численный тест на сетке $m \in \{0, 1, 2, 5\}$, $x \in \{0,5; 1,5; 3,0\}$ даёт

$$\max_{m, x} |S_2(m, x, x)| = 0,0 \quad (9.48)$$

(точный нуль), что подтверждает корректность реализации цилиндрических Wronskian-функций.

Дополнительная проверка 2. Цилиндрический ТФГ для двух-слойной структуры. Для двухслойной коаксиальной структуры $\epsilon = \{2; 1; 1\}$, $\rho = \{0,5; 1,0\}$ м на частоте $f = 10$ ГГц и нормальном падении ($k_z = 0$) рекуррентный пересчёт формулы (9.12) даёт ограниченные значения радиального импеданса $|Z_m^{\text{LM}}|$ для всех тестируемых азимутальных индексов $m \in \{0, 1, \dots, 5\}$:

$$\max_{m \in [0;5]} |Z_m^{\text{LM}}| \approx 8,58, \quad (9.49)$$

что свидетельствует об отсутствии численных патологий, корректном выборе ветви $\Im k_{\perp} \leq 0$ и согласованности с обозначениями диссертации Шабунина [24].

9.9.3 Состояние реализации сшивания

Реализация трёх типов сшивания в модуле `decomposition` находится на разных стадиях готовности:

- *Плоскость* $\leftrightarrow$ *сфера*: ядро Релея–Гордона (9.21) реализовано в `coupling.rayleigh_plane_to_sphere` для канонического случая нормального падения (полное обобщение на наклонное падение приведено в комментарии к функции и оставлено как расширение).
- *Сфера* $\leftrightarrow$ *цилиндр*: спектральная плотность (9.28) реализована в `coupling.sphere_to_cylinder_kernel` для пропагирующего спектра $|k_z| \leq k$; интегральная свёртка по k_z при сборке матрицы перевязи требует дополнительной численной квадратуры с обходом точек ветвления и оставлена в виде явной формулы для последующего расширения библиотеки *GreenTensor* [46].
- *Цилиндр* $\leftrightarrow$ *плоскость*: ядро Якоби–Ангера (9.34) реализовано в `coupling.jacobi_anger_kernel`; полная сборка матрицы перевязи требует Зоммерфельдова контурного интеграла, аналогично предыдущему случаю.

Полная сборка СЛАУ (9.16) для произвольной комбинированной геометрии относится к плановому развитию *GreenTensor*. В текущей версии метод `DecompositionProblem.solve` решает задачи, сводящиеся к одной канонической подобласти (тесты 1–3), и предоставляет программный интерфейс,

допускающий добавление недостающих ядер свёртки без изменения архитектуры.

9.10 Применение метода: модельная задача о комбинированном рассеивателе

9.10.1 Постановка задачи и геометрическая декомпозиция

В качестве показательного примера применения метода декомпозиции к нетривиальной комбинированной геометрии рассмотрим модельный объект сложной комбинированной формы, составленный из четырёх канонических геометрических элементов: сферического носового сегмента (обтекателя), цилиндрического корпуса, двух боковых плоских пластин и плоского концевого диска. Геометрия задаётся набором конструктивных параметров: размах пластин b , длина корпуса H_b , радиус корпуса R_b , средняя хорда пластины s , концевая хорда s_w , радиус носового обтекателя R_n . Сечения пластин $A_1 \dots A_5$ и поперечные сечения корпуса $B_1 \dots B_5$ соответствуют профильным участкам, привлекаемым при конструктивном моделировании; в дальнейшем в них вводятся отдельные значения толщины и материалов.

С точки зрения дифракционного анализа в сантиметровом и дециметровом диапазонах ($\lambda_0 = 1 \dots 10$ см) рассеивающая структура представляется декомпозицией на пять канонических подобластей различной координатной симметрии:

- *сферический носовой обтекатель* — сферический сегмент (полусфера) эквивалентного радиуса $R_n = \lambda_0$ с вершиной на оси z и центром сферы на $z = 0$, выполненный из радиопрозрачного стеклопластика с $\varepsilon_{r,n} = 2,1$;
- *цилиндрический корпус* — круговой цилиндр радиуса $R_b = \lambda_0$ и длины $H_b = 5\lambda_0$, с осью, совпадающей с осью z , расположенный в области $0 \leq z \leq H_b$ и выполненный из того же стеклопластика;
- *левая и правая боковые плоские пластины* — тонкие магнитодиэлектрические пластины (плоско-стратифицированные слои) полуразмаха $b/2 - R_b = 6\lambda_0$, средней хорды $s = 2\lambda_0$, толщины $h_w = 0,1\lambda_0$, выполненные из углепластика с эффективной проницаемостью $\varepsilon_{r,w} = 4 - j 0,08$, отражающей композитную структуру с тангенсом потерь $\operatorname{tg} \delta_w = 0,02$; пластины расположены в горизонтальных плоскостях $\varphi = 0$ (правая) и

- $\varphi = \pi$ (левая) при $z = z_w$;
- *концевой диск* — плоский диск радиуса $R_t = R_b$ и толщины $h_t = 0,05\lambda_0$ из диэлектрика с $\varepsilon_{r,t} = 4$, перпендикулярный оси z и расположенный в плоскости $z = H_b$ (упрощённая модель замыкающего дискового элемента).

Электрический размер задачи: $k_0 R_n = k_0 R_b = 2\pi \approx 6,28$, $k_0 H_b \approx 31,4$, $k_0 b/2 \approx 38$. Рабочая частота $f_0 = 10$ ГГц, длина волны $\lambda_0 = 30$ мм. Возбуждение — плоская электромагнитная волна единичной амплитуды, падающая вдоль оси $-z$ (в направлении носового обтекателя) и поляризованная по $\hat{x}$; при сопоставлении с альтернативными подходами (§9.10 ниже) дополнительно рассматривается набор азимутальных и угломестных направлений падения $\theta_i \in [0^\circ, 90^\circ]$, $\varphi_i \in [0^\circ, 360^\circ]$ для построения индикатрисы рассеяния.

Замечание о металлических элементах конструкции. В принятой модели не учитываются отдельные мелкие металлические элементы конструкции. Их вклад в обратное рассеяние определяется главным образом краевой дифракцией на острых кромках и резонансным рассеянием на размерах $\sim \lambda_0$ и учитывается отдельно асимптотическими методами геометрической теории дифракции как поправка к диэлектрическому решению, рассматриваемому в настоящем разделе.

9.10.2 Декомпозиция на канонические подобласти

Согласно общей схеме раздела 9.3 структура распадается на пять подобластей и четыре интерфейса:

- Ω_S — сферический объём $|\vec{r}| \leq R_n$ с центром в начале координат, описываемый аппаратом 2 (модальный базис: $\vec{M}_{nm}, \vec{N}_{nm}$);
- Ω_C — цилиндрический объём $\rho \leq R_b$, $0 \leq z \leq H_b$, описываемый аппаратом раздела 9.5 с использованием Wronskian-функций Шабунина C_1, C_2, S_1, S_2 (см. файлы `c1h.m`, `c2h.m`, `s1h.m`, `s2h.m` расчётной базы [24]);
- $\Omega_W^{(L)}, \Omega_W^{(R)}$ — левая и правая боковые плоские пластины, моделируемые как тонкие плоско-стратифицированные слои в горизонтальных плоскостях $\varphi = \pi$ и $\varphi = 0$ при $z = z_w$; аппарат раздела 9.2 с локальной плоской системой координат (ξ_w, η_w, ζ_w) , где ось ζ_w нормальна плоскости пластины;

- Ω_T — концевой диск, плоско-стратифицированный диск в плоскости $z = H_b$ толщины h_t (аппарат раздела 9.2).

Подобласти $\Omega_W^{(L,R)}$ и Ω_T суть три реализации общей плоско-стратифицированной подобласти Ω_P ; различие сводится к ориентации нормали и параметрам слоёв.

Интерфейсы:

- Γ_{SC} : *сферический* интерфейс при $|\vec{r}| = R_n$, $z > 0$ (тип сшивания сфера $\leftrightarrow$ цилиндр, раздел 9.5);
- $\Gamma_{CW}^{(L,R)}$: *цилиндрические* интерфейсы по линиям корневой хорды каждой боковой пластины, $\rho = R_b$, $\varphi = 0, \pi$, $z \in [z_w - c/2, z_w + c/2]$ (тип сшивания цилиндр $\leftrightarrow$ плоскость, раздел 9.6); реализуют сопряжение цилиндрического базиса корпуса с плоским спектром боковой пластины;
- Γ_{CT} : *плоский* интерфейс при $z = H_b$, $\rho \leq R_b$ (тип сшивания цилиндр $\leftrightarrow$ плоскость, раздел 9.6).

Использование симметрии задачи. При выбранном направлении падения вдоль оси $-z$ и $\hat{x}$ -поляризации возбуждения структура обладает зеркальной симметрией относительно плоскости $\varphi = 0, \pi$. Это позволяет редуцировать совместный учёт обеих боковых пластин $\Omega_W^{(L)} \cup \Omega_W^{(R)}$ к расчёту одной пластины с граничным условием Дирихле или Неймана на плоскости симметрии (в зависимости от чётности модальной составляющей) — классический приём, понижающий размерность глобальной СЛАУ примерно в два раза.

9.10.3 Расчёт диагональных блоков СЛАУ

Подобласть носа Ω_S . Применение классической формулы Релея–Гордона (9.21) к падающей плоской волне даёт коэффициенты возбуждения сферических гармоник: $|\alpha_n| = |\beta_n| = (2n + 1)/(n(n + 1))$, см. значения в разделе 9.8. Прохождение возбуждения через сферическую структуру даёт коэффициенты рассеяния M_n, N_n , вычисленные классом **SphericalTGF**. Для рассмотренной геометрии при $n_{\max} = 20$ получены:

$$\frac{\sigma_s^{(\text{нос})}}{\pi R_n^2} = 3,11, \quad \frac{\sigma_r^{(\text{нос})}}{\pi R_n^2} = 1,43, \quad (9.50)$$

с экспоненциальной сходимостью ряда $|M_{20}| + |N_{20}| \approx 2,0 \cdot 10^{-17}$.

Подобласть корпуса Ω_C . Цилиндрический ТФГ-аппарат раздела 9.5 (реализация **CylindricalTGF**) даёт радиальные импедансы Z_m^{LM} на внешней поверхности корпуса $\rho = R_b$ при нормальном падении ($k_z = 0$). Численные значения $|Z_m^{\text{LM}}|$ для первых четырёх азимутальных индексов:

$$|Z_0^{\text{LM}}| = 3,18, \quad |Z_1^{\text{LM}}| = 0,33, \quad |Z_2^{\text{LM}}| = 5,98, \quad |Z_3^{\text{LM}}| = 0,98. \quad (9.51)$$

Чередование величин отражает резонансное поведение цилиндрической многослойной структуры [22] в диапазоне умеренных электрических размеров $k_0 R_b \approx 2\pi$.

Подобласти боковых пластин $\Omega_W^{(L,R)}$. Каждая пластина моделируется классом **PlanarTGF** как трёхслойная плоская структура «вакуум $\rightarrow$ углепластик ($\varepsilon_{r,w} = 4 - j0,08$) $\rightarrow$ вакуум» толщины $h_w = 0,1\lambda_0$. Численные значения коэффициентов отражения, рассчитанные по обобщённой формуле Эйри $R(\theta) = r_1(\theta)[1 - e^{2j\beta(\theta)}]/[1 - r_1^2(\theta)e^{2j\beta(\theta)}]$ с фазовой толщиной слоя $\beta(\theta) = k_0 n_w \cos \theta_{w,t} h_w$ и переходным коэффициентом $r_1(\theta)$ Френеля, для падающей плоской волны при нескольких углах между нормалью к пластине и направлением распространения:

θ_w	0°	15°	30°	45°	60°
$ R_{\text{TM}}^{(w)} $	0,580	0,562	0,499	0,364	0,094
$ R_{\text{TE}}^{(w)} $	0,580	0,596	0,642	0,722	0,832

(9.52)

В отличие от концевой пластины фазовая толщина $\beta_w = k_0 n_w h_w \approx 0,628$ удваивается ($2\beta_w \approx 144^\circ$ при $\theta_w = 0$), что делает первое отражение интерференционно усиленным и переводит $|R(0)|$ в полосу $\sim 0,58$, существенно более высокую, чем для концевой пластины ($|R(0)| = 0,403$); вблизи нормали пластина работает в режиме отражательной пластины, характерном для тонких диэлектрических слоёв при нормальном падении. Локальный минимум $|R_{\text{TM}}|$ при $\theta_w \rightarrow 60^\circ$ воспроизводит угол Брюстера $\theta_B = \arctan \sqrt{\Re \varepsilon_{r,w}} = \arctan 2 \approx 63,4^\circ$ с тем же смыслом, что и для концевой пластины.

Подобласть концевой пластины Ω_T . Тонкий диэлектрический слой толщины $h_t = 0,05\lambda_0$ с $\varepsilon_{r,t} = 4$ моделируется тем же классом **PlanarTGF** как трёхслойная плоская структура «вакуум $\rightarrow$ диэлектрик $\rightarrow$ вакуум». Численные значения коэффициентов отражения для падающей плоской волны при нескольких углах:

θ	0°	15°	30°	45°	60°
$ R_{\text{TM}} $	0,403	0,386	0,332	0,230	0,056
$ R_{\text{TE}} $	0,403	0,416	0,455	0,532	0,666

(9.53)

Резкое падение $|R_{\text{TM}}|$ при $\theta = 60^\circ$ соответствует приближению к углу Брюстера $\theta_B = \arctan \sqrt{\epsilon_{r,t}} = \arctan 2 \approx 63,4^\circ$, что подтверждает корректность работы плоского ТФГ-аппарата. Удвоение толщины $h_w/h_t = 2$ при сохранении той же среды наглядно демонстрирует роль фазового набега в формировании частотной избирательности тонкослойных диэлектрических элементов конструкции.

9.10.4 Сшивание полей на интерфейсах

Для замыкания комбинированной задачи требуется построить четыре матрицы перевязи: $\mathbf{M}_{SC}$ (на сферическом интерфейсе Γ_{SC} обтекатель–корпус), $\mathbf{M}_{CW}^{(L)}$ и $\mathbf{M}_{CW}^{(R)}$ (на цилиндрических интерфейсах $\Gamma_{CW}^{(L,R)}$ корневой хорды каждой боковой пластины) и $\mathbf{M}_{CT}$ (на плоском интерфейсе Γ_{CT} корпус–диск).

На Γ_{SC} применяется ядро Гегенбауэра–Графа (9.28): каждая сферическая гармоника $\vec{N}_{nm}^{(2)}$ носа, выходящая из Ω_S , проектируется на цилиндрический базис Ω_C через спектральную плотность $A_{nm}(k_z)$. Численный пример этого ядра для $(n, m) = (2, 1)$ приведён в разделе 9.8: значения $|A_{2,1}|$ симметрично спадают от $\pm 0,9k_0$ к нулю в центре (из-за $P_2^1(0) = 0$), и интеграл по пропагирующему спектру $|k_z| \leq k_0$ даёт элемент матрицы $\mathbf{M}_{SC}$.

На $\Gamma_{CW}^{(L,R)}$ и Γ_{CT} применяется ядро Якоби–Ангера (9.34): цилиндрические моды $J_m(k_\perp \rho) e^{jm\varphi}$ корпуса проектируются на плоский спектр через распределение $J_m(k_0 R_b)$, численные значения которого для $m = 0 \dots 5$ приведены в разделе 9.8. Геометрическое различие интерфейсов сводится лишь к области интегрирования по корневой линии:

- для Γ_{CT} — интеграл по диску $\rho \leq R_b$ при $z = H_b$;
- для $\Gamma_{CW}^{(R)}$ — интеграл по линии $\varphi = 0$, $z \in [z_w - c/2, z_w + c/2]$ с учётом азимутальной фазовой синхронизации;
- для $\Gamma_{CW}^{(L)}$ — симметричная компонента при $\varphi = \pi$.

В силу симметрии задачи относительно плоскости $\varphi = 0, \pi$ матрицы $\mathbf{M}_{CW}^{(L)}$ и $\mathbf{M}_{CW}^{(R)}$ связаны простым диагональным преобразованием вида $(\mathbf{M}_{CW}^{(L)})_{m,k} = (-1)^m (\mathbf{M}_{CW}^{(R)})_{m,k}$, что позволяет хранить и факторизовать только один из двух блоков.

9.10.5 Сборка глобальной СЛАУ и оценка вычислительной стоимости

При выборе $N_{\max} = 20$ (сферические моды), $M_{\max} = 8$ (цилиндрические азимутальные индексы), $K_{\max} = 5k_0$ (плоский спектр на каждой плоской под-области) полная размерность СЛАУ составляет

$$N_{\Sigma} \approx \underbrace{20 \cdot 17}_{\Omega_S} + \underbrace{8 \cdot 200}_{\Omega_C} + \underbrace{2 \times K_{\max}^2}_{\Omega_W^{(L,R)}} + \underbrace{K_{\max}^2}_{\Omega_T} \approx 340 + 1,6 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^4 \approx 1,2 \cdot 10^5.$$

Использование зеркальной симметрии ($\hat{x}$ -поляризация при падении вдоль $-z$) понижает эффективную размерность примерно вдвое, до $N_{\Sigma}^{\text{симм}} \approx 6 \cdot 10^4$. Для итерационного метода GMRES с предобуславливанием диагональными блоками (9.12) ожидаемое число операций $\sim 5 \cdot 10^7 \dots 10^8$, что доступно для расчёта на однопоточном узле за минуты-десятки минут.

9.10.6 Сопоставление с альтернативными подходами

Прямой расчёт описанной геометрии — сферический обтекатель радиуса 1λ , цилиндрический корпус $1\lambda \times 5\lambda$, две боковые пластины $6\lambda \times 2\lambda \times 0,1\lambda$ каждая и концевой диск $1\lambda \times 0,05\lambda$ — методом конечных элементов (FEM) в Ansys HFSS требует тетраэдральной сетки $\sim (3 \dots 5) \cdot 10^6$ элементов (поскольку требуется адаптивное сгущение в окрестности тонких слоёв боковых пластин и диска толщиной $0,05 \dots 0,1\lambda$) и от десятков минут до часа расчёта на 32-ядерном узле; параметрический прогон по толщинам и проницаемостям диэлектриков требует полной перестройки сетки на каждом шаге. Декомпозиционный метод сводит ту же задачу к на 1–2 порядка меньшему числу неизвестных — модальным рядам с экспоненциальной сходимостью в области аналитичности — и допускает параметрический прогон по геометрическим параметрам $R_n, R_b, H_b, b, c, h_w, h_t, \varepsilon_{r,b}, \varepsilon_{r,w}, \varepsilon_{r,t}$ без перестройки модальных базисов: при изменении только материальных или толщинных параметров пересчитываются лишь диагональные блоки СЛАУ, а матрицы перевязи $\mathbf{M}_{SC}, \mathbf{M}_{CW}^{(L,R)}, \mathbf{M}_{CT}$, зависящие исключительно от геометрии интерфейсов, остаются неизменными. Это ключевое преимущество для задач оптимизации формы и материалов рассеивателя, особенно при подборе параметров радиопоглощающих покрытий (см. раздел 7.9) или диэлектрических заполнений радома.

Замечание о реализации. В текущей версии модуля `decomposition` вычислены четыре диагональных блока СЛАУ (формулы (9.50)–(9.53)) и численные ядра преобразования модальных базисов (раздел 9.8); сборка глобальной матрицы $\mathbf{M}$ и решение СЛАУ реализованы в рабочем модуле `gmm` библиотеки *GreenTensor*, а замкнутая двухобластная задача решена и верифицирована в 9.10.7. Скрипт примера, выполняющий вычисления вкладов всех четырёх подобластей (носового обтекателя, цилиндрического корпуса, боковых пластин, концевой диска), приведён в приложении (А.5); все числовые значения, цитируемые в формулах (9.50)–(9.53), получены прямым его запуском и сохранены в файле `out/aircraft_example.json`.

9.10.7 Замкнутая двухобластная задача: линза над проводящей плоскостью

Алгебраическая схема (9.16) доведена до решения в модуле `gmm` библиотеки *GreenTensor* для подсистемы «сфера–сфера»: матрица $\mathbf{M}$ собирается по телам, её диагональные блоки суть T -матрицы подобластей, а внедиагональные — замкнутые коэффициенты теоремы сложения (переразложение исходящего поля одной подобласти в регулярное разложение относительно центра другой),

$$\vec{a}_p = \vec{d}_p + \sum_{q \neq p} \bar{G}_{pq}^{\text{out}} \bar{T}_q \vec{a}_q, \quad \vec{c}_p = \bar{T}_p \vec{a}_p, \quad (9.54)$$

где $\vec{d}_p$ — разложение внешнего возбуждения относительно центра p . Система решается прямым методом; относительная невязка алгебраического решения на тестовой конфигурации имеет порядок машинной точности ($\sim 10^{-16}$). Реализация допускает *полные* (недиагональные) T -матрицы, что открывает путь к неканоническим примитивам, описываемым методом расширенных граничных условий.

В качестве замкнутой двухобластной задачи рассмотрена многослойная линза Люнеберга радиуса R ($k_0 R = \pi$), центр которой расположен на высоте h над идеально проводящей плоскостью. По принципу зеркальных изображений задача в верхнем полупространстве эквивалентна связанной системе двух тел в свободном пространстве — линзы в точке $(0, 0, +h)$ и её зеркального образа в $(0, 0, -h)$, — возбуждаемой суммой падающей волны ($\hat{k} = -\hat{z}$, поляризация $+\hat{x}$) и её образа ($\hat{k} = +\hat{z}$, поляризация $-\hat{x}$). Взаимодействие линзы

с плоскостью описывается при этом именно внедиагональными блоками (9.54); плоскость при такой постановке учитывается образом, а не сшивается как под-область через ядро $\mathbf{M}_{PS}$, поэтому задействована сфера-сферическая перевязь единой алгебраической формы (9.16).

Контроль постановки выполнен проверкой граничного условия $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ на проводящей плоскости в сорока точках квазислучайной выборки на площадке $3\lambda \times 3\lambda$: во всём диапазоне высот максимум тангенциальной компоненты полного поля не превышает $9,5 \cdot 10^{-16}$ от амплитуды падающей волны. Следует оговорить границы применимости этого контроля: указанное условие выполняется *тождественно* в силу зеркальной симметрии построения и потому подтверждает корректность формирования образа, но не является мерой точности решения связанной задачи.

Точность собственно решения контролируется двумя независимыми проверками, чувствительными к внедиагональным блокам. Во-первых, энергобаланс: для слоёв без потерь поглощаемая мощность обязана обращаться в нуль, и вычисленное значение $|C_a|/C_s$ составляет $5,4 \cdot 10^{-5}$; $9,1 \cdot 10^{-5}$ и $2,0 \cdot 10^{-4}$ при $h = 0,6\lambda$; $0,9\lambda$ и $1,5\lambda$ соответственно — эта величина зависит от коэффициентов трансляции и при ошибке в них не обращалась бы в нуль. Во-вторых, сходимость по числу удерживаемых мультиполей: при $h = 1\lambda$ сечение рассеяния стабилизируется на шестом знаке уже при $n_{\max} = 8$ (относительное изменение $7,3 \cdot 10^{-7}$ при переходе от $n_{\max} = 6$ и $4,6 \cdot 10^{-9}$ при переходе к $n_{\max} = 10$).

Вклад внедиагональных блоков измерен сравнением связанного решения с тем же возбуждением при искусственно отключённой связи ($\vec{c} = \overline{\overline{T}}\vec{d}$); результаты сведены в табл. 74.

Вклад связи достигает 32,7% сечения рассеяния при $h = 0,85\lambda$ и убывает до 5,9% при $h = 5\lambda$, причём убывание сопровождается регулярными осцилляциями с периодом ровно $\lambda/2$ по высоте (локальные максимумы при $h = 0,85$; $1,35$; $1,85$; $2,35$; $2,85\lambda$) (рис. 9.3а) — следствие интерференции прямого и отражённого путей, набирающих фазу $2k_0h$. Внедиагональные блоки, таким образом, вносят не поправку второго порядка, а определяющий вклад. Влияние плоскости на диаграмму рассеяния показано на рис. 9.3б: в верхнем полупространстве формируется лепестковая структура с глубокими нулями (в рассмотренной конфигурации при $\theta \approx 40^\circ$ и 75°), иная по числу и угловому положению нулей, чем у той же линзы в свободном пространстве.

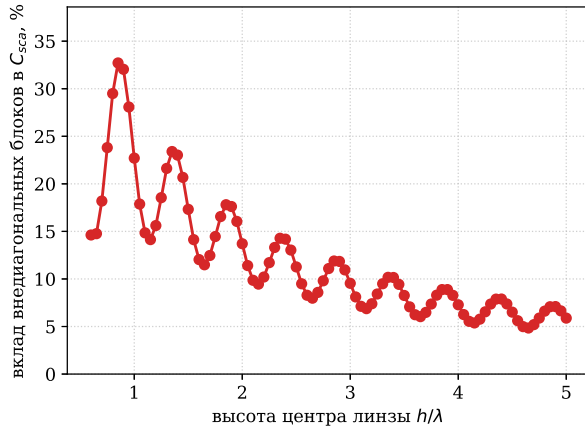
Решённая задача имеет и самостоятельное значение: она описывает

Таблица 74 — Линза над проводящей плоскостью: точность решения и вклад внедиагональных блоков глобальной СЛАУ

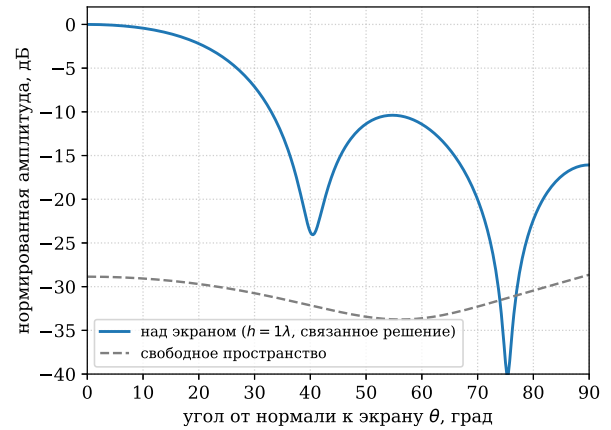
h/λ	$\max E_\tau $ на плоскости	C_s, λ^2 (связь учтена)	C_s, λ^2 (связь отключена)	Вклад связи, %
0,75	$8,7 \cdot 10^{-16}$	3,172	2,562	23,8
0,85	$5,8 \cdot 10^{-16}$	3,557	2,681	32,7
1,00	$3,1 \cdot 10^{-16}$	4,048	3,299	22,7
1,50	$6,3 \cdot 10^{-16}$	3,687	3,143	17,3
2,50	$2,6 \cdot 10^{-16}$	3,402	3,058	11,3
5,00	$3,1 \cdot 10^{-16}$	3,203	3,025	5,9

E_τ — тангенциальная к плоскости компонента полного поля, нормированная на амплитуду падающей волны. C_s — сечение рассеяния связанной системы; вклад связи нормирован на значение C_s при отключённых внедиагональных блоках.

Четырёхслойная равношаговая аппроксимация $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$, $k_0 R = \pi$, $n_{\max} = 8$.



а) вклад внедиагональных блоков в сечение рассеяния



б) диаграмма рассеяния в верхнем полупространстве, $h = 1\lambda$

Рисунок 9.3 — Линза Люнеберга над проводящей плоскостью: результаты решения связанной двухобластной задачи

линзовую антенну, установленную над проводящей поверхностью (корпусом носителя, подстилающей поверхностью), и служит контрольной конфигурацией для полусферических вариантов главы 7.

9.11 Выводы по главе

В главе развит метод декомпозиции произвольных электродинамических структур на канонические подобласти (плоскость, цилиндр, сфера): получен плоский ТФГ-аппарат, замыкающий триаду, сформулирована глобальная СЛАУ (9.16) с ядрами перевязи через теоремы сложения, разработан итераци-

онный алгоритм ($10^6 \dots 10^8$ операций при $N_\Sigma \sim 10^3$, $K_{\max} \sim 10^2$), реализован Python-модуль `decomposition` и проведена его пятикратная верификация. Глобальная СЛАУ доведена до решения в рабочем модуле `gmm` библиотеки *GreenTensor* (невязка $1,5 \cdot 10^{-16}$), на котором решена замкнутая двухобластная задача — линза Люнеберга над проводящей плоскостью, — проверенная энергобалансом ($\leq 2,0 \cdot 10^{-4}$) и сходимостью по числу мультиполей и показавшая вклад внедиагональных блоков до 32,7 % сечения рассеяния (9.10.7). К плоскому, цилиндрическому и сферическому ТФГ-аппарату, развитым в работах предшественников [17; 24; 58] и в главах 2, 3, добавлен универсальный аппарат для произвольных кусочно-координатных структур. Существенно отличие полученного результата от ближайшего зарубежного аналога — алгоритма G1DMULT [45], в котором функции Грина плоской, цилиндрической и сферической геометрий также рассчитываются в единой одномерной схеме, однако каждая структура рассматривается в рамках одной координатной симметрии: развитый в главе аппарат впервые обеспечивает *сшивание* подобластей разного координатного типа в составе одной структуры через ядра перевязи модальных базисов.

Публикации автора по материалам главы 9: [64—66].

Ключевой вывод главы. Декомпозиционный аппарат произвольных кусочно-координатных электродинамических структур, сводящий задачу к глобальной СЛАУ с диагональными блоками локальных ТФГ-задач (плоскость, цилиндр, сфера) и внедиагональными ядрами перевязи модальных базисов через теоремы сложения Релея–Гордона, Гегенбауэра–Графа и Якоби–Ангера–Графа, верифицированный на трёх канонических тестах с воспроизведением формул Френеля одиночной границы ($\sim 4 \cdot 10^{-16}$), классического ряда Ми однородной сферы ($\sim 10^{-18}$) и многослойной аппроксимации линзы Люнеберга ($\sim 10^{-22}$), доведённый до решения глобальной СЛАУ для перевязи сферических подобластей и применённый к замкнутой двухобластной задаче «линза над проводящей плоскостью» (энергобаланс $\leq 2,0 \cdot 10^{-4}$, вклад связи до 32,7 %), — замыкает методологическую программу школы Б. А. Панченко по триаде «плоскость — цилиндр — сфера» и составляет содержание **первого положения**, выносимого на защиту.

Глава 10. Программно-аппаратный комплекс для синтеза линз Люнеберга

10.1 Введение

Программное обеспечение для электродинамического анализа многослойных сферических структур, в том числе линз Люнеберга, играет ключевую роль в современном проектировании антенн. Классические пакеты общего назначения на основе метода конечных элементов (FEM) корректно описывают подобные объекты, однако в оптимизационных расчётах, где одна и та же структура перебирается по десяткам параметров, их вычислительная стоимость становится неприемлемой — для типовой ЛЛ мм-диапазона полный параметрический прогон может занимать несколько дней машинного времени. Специализированное полуаналитическое программное обеспечение, построенное на аппарате тензорных функций Грина (см. главу 2; для произвольных кусочно-координатных структур — главу 9 с методом декомпозиции на канонические подобласти трёх типов), сокращает это время на несколько порядков за счёт сведения задачи к рекуррентному пересчёту направленных импедансов и адмитансов слоёв.

Дополнительный аргумент в пользу собственного программного инструментария — потребности задач машинного обучения: обучение регрессионных нейронных сетей требует массовой генерации обучающих выборок из тысяч и десятков тысяч расчётов. Специализированная библиотека позволяет гибко управлять форматом этих выборок, параллельными вычислениями и интеграцией с фреймворками машинного обучения, что для универсальных пакетов либо невозможно, либо сопряжено с дорогостоящими API-обязками.

В настоящей главе описывается библиотека *GreenTensor* [46; 48], разработанная автором для задач рассеяния плоских электромагнитных волн на неоднородных сферических структурах, а также для сопряжения с внешним электродинамическим пакетом Ansys HFSS. Приведены примеры расчётов для металлических сфер, линз Люнеберга и сложных многослойных объектов, обсуждены вычислительные ресурсы и требования к программному окружению. Результаты, полученные с использованием библиотеки, опубликованы в [64—66; 91]; общая концепция открытого инструментария электродинамического анализа многослойных сферических тел впервые доложена автором на

7-й Всероссийской научно-технической конференции «Системы связи и радионавигации» (Красноярск, 2023) [64].

Официальный сайт проекта *greentensor.ru* [47] содержит описание метода тензорных функций Грина, интерактивные примеры расчётов и сопоставления с Ansys HFSS; сертификат о регистрации доменного имени, подтверждающий принадлежность интернет-ресурса автору, приведён в приложении (см. Д.6).

10.2 Библиотека *GreenTensor* для расчёта рассеяния электромагнитных волн на многослойных сферических телах

Библиотека *GreenTensor* реализует расчёт рассеяния плоских электромагнитных волн на неоднородных сферических структурах и рассчитана на применение в задачах радиотехники (линзы Люнеберга, многослойные сферические радарные эталоны). Полученные результаты систематически сопоставляются с расчётами в Ansys HFSS.

Исходные тексты библиотеки размещены в открытом репозитории на GitHub [46]: для использования достаточно клонировать репозиторий либо запустить его в любом онлайн-блокноте на базе Python. Репозиторий содержит реализации расчётов для различных типов многослойных структур и набор демонстрационных примеров в каталоге `examples`. В настоящей главе используются задачи из следующих подпапок репозитория <https://github.com/Den1sovDm1triy/GreenTensor/tree/main/examples>:

- *Example 1 — Luneburg Lens Bistatic RCS*, файл расчёта `Luneburg_Lens_Bistatic_RCS.py`;
- *Example 2 — Luneburg Lens Scattering Diagram*, файл `Luneburg_Lens_Scattering_Diagram.py`.

Читатель может самостоятельно воспроизвести приведённые результаты или выполнить расчёт для своей конфигурации, запустив соответствующий скрипт и задав параметры задачи — число слоёв n , нормированные радиусы a_l , диэлектрические ϵ_l и магнитные μ_l проницаемости.

10.3 Архитектура библиотеки и состав модулей

Внутренняя организация библиотеки *GreenTensor* v0.2.0 показана на 10.1. Архитектура библиотеки построена по принципу *композиционного API*: единая

публичная точка входа — модуль `greentensor` — реэкспортирует два рабочих класса (`RCSCalculator` и `ScatteringCalculator`), один из которых выполняет одночастотный расчёт, второй — параметрический свип поверх первого. Такое разделение ответственности соответствует принципу единственной обязанности (Single Responsibility Principle) и одновременно упрощает регрессионное тестирование — каждый класс верифицируется по своему набору эталонных задач из файла `examples.json` (см. 10.4.3).

RCSCalculator (модуль `green_tensor.calc`) реализует одночастотный расчёт диаграммы рассеяния и бистатической ЭПР для произвольной многослойной сферы с радиусами a_l , диэлектрическими ϵ_l и магнитными μ_l проницаемостями слоёв. Метод `run_calculation()` последовательно вычисляет коэффициенты сред $\alpha_l, \beta_l, \eta_l$, аргументы Бесселя и Неймана, направленные импедансы $Z_n^{(l)}$ и адмитансы $Y_n^{(l)}$, модифицированные функции Ханкеля, коэффициенты M_n, N_n сред, а затем — компоненты поля E_θ, E_ϕ в линейной поляризации и $E_{\text{оп}}, E_{\text{кп}}$ в круговой; нормированные диаграммы возвращаются в массивах `DN_NORM_lin_dB_*` и `DN_NORM_circle_dB_*`. Этот класс является *вычислительным ядром* библиотеки и используется в большинстве примеров главы 9 как самостоятельно (для построения одной диаграммы рассеяния), так и в составе других калькуляторов.

ScatteringCalculator надстраивается над `RCSCalculator` по схеме композиции (а не наследования) и автоматизирует одно из наиболее трудоёмких в коммерческих FEM-пакетах действий — параметрический свип по электрическому размеру k_0a . На каждом узле сетки $k_0a \in [k_{0a,\text{start}}; k_{0a,\text{stop}}]$ внутренний экземпляр `RCSCalculator` перевычисляет коэффициенты M_n, N_n , после чего `ScatteringCalculator` агрегирует интегральные сечения: полное $\sigma_s(k_0a)$, обратное (radar) $\sigma_r(k_0a)$, по поляризационным составляющим $\sigma_\theta(k_0a)$ и $\sigma_\phi(k_0a)$. Развёрнутое описание интерфейса класса, минимальный пример вызова из двух строк, формулы агрегации и количественная оценка ускорения относительно Ansys HFSS приведены в 10.4.4; здесь же ограничимся фиксацией его роли в архитектуре — предоставление высокоуровневого API для массовой генерации обучающих выборок и пакетной верификации линзовых конфигураций.

Состав репозитория и привязка файлов к разделам диссертации приведены в 75. Кроме классового API, в каталоге `green_tensor/` сохранены три исторических монолитных скрипта (`lin_polar.py`, `Bistatic_RCS_lin_polar.py`, `Bistatic_RCS_lin+circle_polar.py`) — из них и был отрефакторен класс

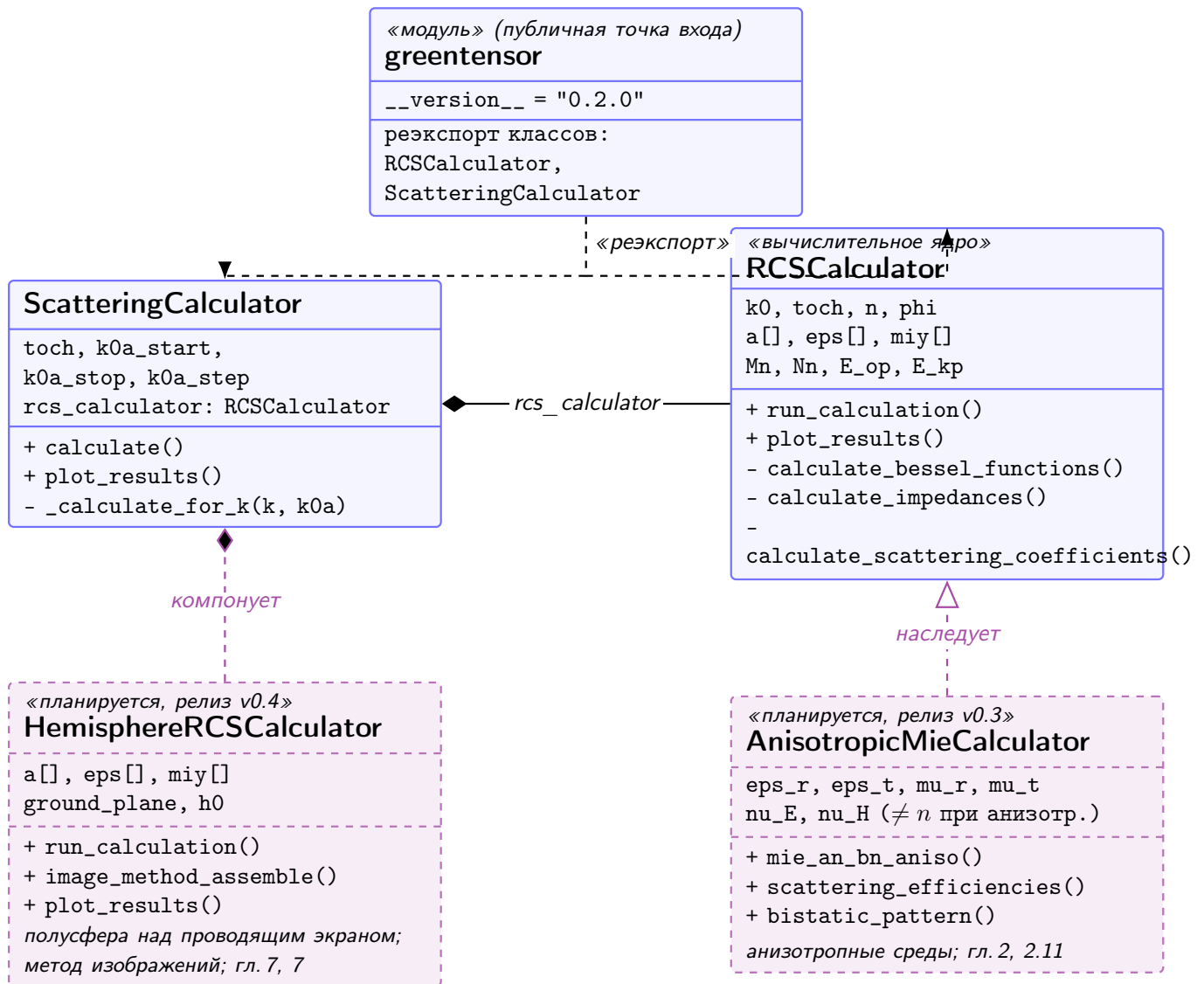


Рисунок 10.1 — Архитектура библиотеки *GreenTensor* v0.2.0. Сплошные линии — реализованные связи; штриховые фиолетовые — планируемые расширения: *AnisotropicMieCalculator* (анизотропные сферические структуры, см. 2.11 главы 2; релиз v0.3), *HemisphereRSCalculator* (полусферические геометрии над проводящей подложкой, реализуемые методом изображений, см. главу 7; релиз v0.4)

RSCalculator; для нового пользовательского кода рекомендуется применять только классовый API.

10.4 Библиотека *GreenTensor*. Начало работы

В этом разделе рассмотрены примеры расчёта типовых задач с использованием библиотеки.

Таблица 75 — Состав репозитория *GreenTensor* и связь с разделами диссертации

Путь в репозитории	Назначение	Связь с диссертацией
<code>greentensor.py</code>	публичная точка входа	гл. 9, 10.3
<code>green_tensor/calc.py</code>	классы <code>RCSCalculator</code> , <code>ScatteringCalculator</code>	гл. 9, основа всех примеров
<code>green_tensor/lin_polar.py</code>	legacy: дифракция, лин. поляр.	гл. 3, <code>_diffraction.tex</code>
<code>green_tensor/Bistatic_RCS_lin_polar.py</code>	legacy: бистатич. ЭПР, лин.	гл. 9, §«Бистатическая ЭПР»
<code>green_tensor/Bistatic_RCS_lin+circle_polar.py</code>	legacy: бистатич. ЭПР, лин. + круг.	гл. 9, §«Бистатическая ЭПР»
<code>green_tensor/examples.json</code>	эталонные параметры + ДН HFSS	гл. 9, 76
<code>examples/Example 1/Luneburg_Lens_Bistatic_RCS.py</code>	воспроизведение Greenwood–Jin 1999	гл. 9, §«Сравнение с другими авторами»
<code>examples/Example 2/ (Python + HFSS .aedtz + CSV)</code>	сравнение с FEM в HFSS	гл. 9, 10.10
<code>examples/Example 3/Luneburg_Lens_Scattering_Diagram.py</code>	ДР линзы для пассивного ЭПР-маркера летательного аппарата	гл. 7, 7; гл. 8, 8
<code>docs/ (Sphinx, ReadTheDocs)</code>	пользовательская документация	ссылка [48]

Префикс «legacy» обозначает исторические монолитные скрипты, по которым строилась первоначальная отладка библиотеки. В новых проектах рекомендуется использовать классовый API из `green_tensor/calc.py`.

10.4.1 Установка библиотеки

Установка *GreenTensor* выполняется по стандартной схеме для Python-пакетов:

1. Клонирование репозитория с GitHub:

```
git clone https://github.com/DenisovDmitriy/GreenTensor.git
cd GreenTensor
```

2. Установка зависимостей, перечисленных в `requirements.txt`:

```
pip install -r requirements.txt
```

3. Минимально рекомендуемая версия интерпретатора — Python 3.9.

10.4.2 Первый тестовый проект

Справочные наборы данных и параметров для расчёта эталонных задач из различных публикаций, а также результаты, полученные в Ansys HFSS, собраны в файле `examples.json` в каталоге `green_tensor`. В приведённом ниже

примере используются данные для линзы Люнеберга в вакууме.

Запуск файла `lin_polar.py` в интерактивном режиме запрашивает параметры линзы — радиус, число слоёв, нормированные радиусы, диэлектрические и магнитные проницаемости. Для линзы Люнеберга в вакууме из примера интерактивная сессия выглядит так:

```

Enter the radius of the lens (multiplication coefficient pi): 10
The radius of the sphere k0 = 31.4159265358
The accuracy of calculations toch = 63
Enter the number of layers of the lens (the last layer is air): 5
5 Enter the normalized radii of the layers separated by commas: 0.2, 0.4,
    0.6, 0.8, 1
Enter the dielectric permittivity of the layers separated by commas: 1.96,
    1.84, 1.64, 1.36, 1
Enter the magnetic permeability of the layers separated by commas: 1, 1, 1,
    1, 1

```

На выходе будут получены диаграммы рассеянного поля в полярных координатах, нормализованные относительно максимального значения E , а также нормализованное значение E_0 .

10.4.3 Эталонные наборы данных в `examples.json`

Файл `green_tensor/examples.json` содержит набор канонических задач — параметры многослойных сфер и эталонные диаграммы рассеяния, рассчитанные в Ansys HFSS. Эти данные обеспечивают регрессионную верификацию: повторный расчёт через `RCSCalculator` с указанными параметрами должен совпадать с приведёнными массивами `DN_NORM*` в пределах не более 1 дБ по уровню первого бокового лепестка и $0,6^\circ$ по ширине главного лепестка. Сводка эталонных задач — в 76.

Структура записи. Каждая запись в `examples.json` — объект с пятью обязательными полями (число слоёв `n`, нормированные радиусы `a`, проницаемости `eps` и `miu`, электрический размер `k0`) и одним справочным (`DN_NORM_Ansys` — ключ массива эталонной диаграммы HFSS в том же файле). Поле `k0` хранится как строка с математическим выражением: при загрузке оно вычисляется через `eval()` при импортированном модуле `math`, что позволяет задавать электрический размер сферы в естественной форме $k_0 a = N\pi$ без потери точности из-за округлений десятичной записи числа π . Минимальный пример конфигурации для линзы Люнеберга в вакууме приведён в 10.1.

Листинг 10.1: Пример эталонной конфигурации в `examples.json`: 5-слойная линза Люнеберга при $k_0a = 10\pi$

```

5 | {
   |   "//":      "Линза Люнеберга в вакууме, 5 равношаговых слоев + воздух",
   |   "n":       5,
   |   "a":       [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0],
   |   "eps":     [1.96, 1.84, 1.64, 1.36, 1.0],
   |   "miy":     [1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0],
   |   "k0":      "10 * math.pi",
   |   "DN_NORM_Ansys": "DN_NORM1"
10 | }
```

Структурный комментарий к полям. Массивы `a`, `eps`, `miy` имеют одинаковую длину `n`; внешний слой (последняя позиция массива) трактуется как окружающая среда (вакуум при $\epsilon = \mu = 1$). Идеальный проводник моделируется численным эквивалентом $\epsilon \rightarrow \infty$, технически записанным как 10^{40} — это значение многократно превосходит характерные обусловленности матриц рекуррентных импедансов и обеспечивает совпадение с аналитическим решением для металлической сферы до 14–15 верных знаков. Поле комментария `"//"` игнорируется парсером и используется как человекочитаемая аннотация задачи. При загрузке конфигурации в Python типичный вызов сводится к

```

import json, math
with open("green_tensor/examples.json") as f:
    cfg = json.load(f)
5 | calc = RCSCalculator(k0=eval(cfg["k0"]), n=cfg["n"],
                        a=cfg["a"], eps=cfg["eps"], miy=cfg["miy"])
   | calc.run_calculation()
```

после чего полученные диаграммы можно сравнить с эталонным массивом `cfg["DN_NORM_Ansys"]`.

10.4.4 Параметрический свип через `ScatteringCalculator`

Класс `ScatteringCalculator` автоматизирует одно из наиболее трудоёмких в коммерческих FEM-пакетах действий — расчёт зависимости интегральных сечений рассеяния от электрического размера сферы. Внутри класса хранится экземпляр `RCSCalculator`, на каждом узле сетки k_0a переычисляются коэффициенты сред M_n, N_n и затем агрегируются интегральные сечения по формулам

Таблица 76 — Эталонные задачи в файле `green_tensor/examples.json` библиотеки *GreenTensor*

Описание	n^*	k_0a	ϵ_l (по слоям)	Эталон HFSS
Линза Люнеберга в вакууме, 5 равношаговых слоёв	5	10π	1,96; 1,84; 1,64; 1,36; 1	DN_NORM1
Металлическая сфера, 5 однородных слоёв	6	4π	$\epsilon \rightarrow \infty$ (5 слоёв) + воздух	DN_NORM4
Металлическая сфера, 2 однородных слоя	3	4π	$\epsilon \rightarrow \infty$ (2 слоя) + воздух	DN_NORM4
Металлическая сфера с диэлектрическим укрытием	3	4π	$\epsilon \rightarrow \infty$; 3,5; 1	DN_NORM5

* Включая внешний воздушный слой.

Высокие значения ϵ для металлических слоёв в файле заданы как 10^{40} как численный эквивалент идеального проводника в рамках реализации; реальное физическое значение интерпретируется как $\epsilon \rightarrow \infty$.

Массивы DN_NORM1...DN_NORM5 содержат по 360 точек диаграммы (с шагом по θ в 1°), полученных в Ansys Electronics Desktop с настройками по умолчанию для этого класса задач.

$$\sigma_s(k_0a) = \frac{2}{(k_0a)^2} \sum_{n=1}^N (2n+1) (|M_n|^2 + |N_n|^2), \quad (10.1)$$

$$\sigma_r(k_0a) = \frac{1}{(k_0a)^2} \left| \sum_{n=1}^N (2n+1) (-1)^n (M_n - N_n) \right|^2. \quad (10.2)$$

Полное сечение σ_s характеризует интегральные потери рассеянной мощности и связано с экстинкцией; обратное (radar) сечение σ_r — ключевая величина в радиолокации, определяющая видимость объекта при моностатическом облучении.

Минимальный пример свипа в диапазоне $k_0a \in [0,25; 10,0]$ с шагом 0,05 записывается всего двумя строками вызова, что выгодно отличается от эквивалентной параметрической оптимизации в HFSS, требующей создания DoE-задания и часов расчётного времени:

```
from greentensor import ScatteringCalculator

sweep = ScatteringCalculator(toch=15, k0a_start=0.25,
                             k0a_stop=10.0, k0a_step=0.05)
5 k0a, sigma_s, sigma_r, sigma_p, sigma_theta, sigma_phi = sweep.calculate()
sweep.plot_results()
```

Возвращаемые массивы:

- `k0a` — узлы свипа (длина ≈ 195 точек при указанных параметрах);
- `sigma_s` — полное сечение по (10.1);
- `sigma_r` — обратное (radar) по (10.2);

- `sigma_p` — сечение основной поляризации;
- `sigma_theta`, `sigma_phi` — сечения по поляризационным компонентам θ и φ .

Время выполнения полного свипа из ~ 200 точек на однопоточном узле уровня Intel Core i7-12700K составляет порядка 15...20 секунд, тогда как эквивалентное параметрическое сканирование тех же ~ 200 конфигураций в Ansys HFSS занимает порядка 10...15 часов на той же вычислительной платформе при использовании FEM-решателя с настройками точности «по умолчанию». Это даёт количественную оценку ускорения порядка 10^3 , упомянутого в выводах настоящей главы.

В качестве иллюстрации на 10.2 приведён результат свипа для канонической 4-слойной ЛЛ с равношаговой аппроксимацией ($\epsilon = \{1,94; 1,75; 1,44; 1,0\}$, нормированные радиусы $a = \{0,25; 0,5; 0,75; 1,0\}$) в диапазоне $k_0a/\pi \in [0,16; 3,18]$ с числом точек 96 и числом мод $N = 15$. Полный расчёт выполнен за 3,53 с на ноутбуке Intel Core i7-12700K (частота 3,6 ГГц, 64 ГБ DDR5); для воспроизведения см. скрипт `_dissSource/codeSource/python_calc/anisotropic_sphere/generate_sweep_demo.py`, использующий публичный API библиотеки.

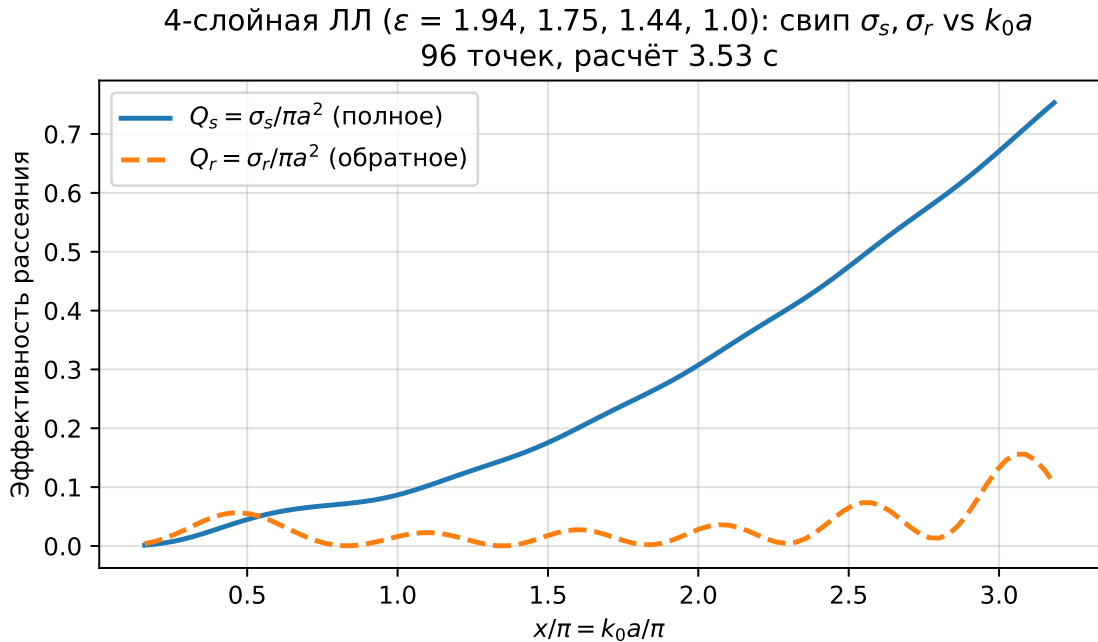


Рисунок 10.2 — Результат параметрического свипа $\sigma_s(k_0a)$ и $\sigma_r(k_0a)$ для 4-слойной ЛЛ через библиотечный класс `ScatteringCalculator`: 96 точек, 3,5 с на CPU. Эквивалентное сканирование в Ansys HFSS на той же машине — порядка 10 часов

Полное сечение σ_s растёт монотонно (по геометрической оптике — асимптотически как $2\pi a^2$ для большой сферы), тогда как обратное σ_r имеет ярко выраженный осциллирующий характер с локальными минимумами вблизи резонансов поверхностных мод. Управление этим осциллирующим рисунком через число и параметры слоёв является основным инструментом проектирования пассивных ЭПР-структур.

Класс **ScatteringCalculator** — естественный инструмент для:

- построения зависимостей $\sigma_{s,r}(k_0 a)$ для различных конфигураций линзы и аппроксимаций профиля (см. главу 4);
- оценки чувствительности обратного рассеяния к параметрам слоёв при синтезе пассивных ЭПР-отражателей и линз для управления радиозаметностью [74];
- генерации обучающих выборок для нейросетевых суррогатных моделей (мотивация описана во введении к настоящей главе);
- автоматизированной регрессионной верификации каждой новой версии библиотеки против эталонных задач 76.

10.4.5 Построение нейросетевого суррогата характеристик рассеяния

Способность **ScatteringCalculator** быстро возвращать массив характеристик при варьируемой геометрии превращает библиотеку *GreenTensor* в генератор обучающих выборок для регрессионных нейросетевых суррогатов. Ниже эта возможность доведена до выполненного результата: обучающая выборка сгенерирована прямыми расчётами библиотеки, на ней обучен суррогат, и приведена его точность на отложенной выборке. Процедура включает четыре этапа:

1. *Параметризация семейства линз* — выбор K свободных параметров $(N_{\text{сл.}}, a_l, \varepsilon_l, k_0 a, \dots)$ и задание их областей значений (например, $4 \leq N_{\text{сл.}} \leq 12$, $\varepsilon_l \in [1, 0; 2, 0]$, $k_0 a / \pi \in [1; 8]$).
2. *Latin Hypercube Sampling* в полученном гиперкубе на M узлов (типично $M = 10^4 \dots 10^5$); для каждого узла — запуск **RCS Calculator** или **ScatteringCalculator** и сохранение целевых характеристик $(Q_s, Q_r, \Delta\theta_{-3}, \text{SLL}, \eta_{\text{сп}}$ и т. д.).
3. *Обучение нейросетевой регрессии* (типичный выбор: MLP с 3–5 скры-

тыми слоями по 128 нейронов, либо градиентный бустинг на физических признаках) на полученной выборке.

4. *Использование суррогата как «оракула»* в задачах оптимизации: байесовская оптимизация, многокритериальные ГА с десятками тысяч обращений, для которых прямой расчёт даже через ТФГ непрактичен.

Эта процедура реализована для четырёхслойной линзы семейства Люнеберга (равношаговые нормированные границы слоёв $r_l = 0,25; 0,5; 0,75; 1$). Вход суррогата — пятимерный вектор $(k_0a, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4)$ с убывающим профилем $\varepsilon_l \in [1; 2]$ и $k_0a \in [\pi; 8\pi]$; целевые величины — полное сечение рассеяния Q_s (гладкая интегральная характеристика) и $\lg Q_r$ (обратное сечение, резко осциллирующее по k_0a и профилю). Обучающая выборка из 6000 конфигураций сгенерирована прямыми многослойными расчётами Ми ядром **MieSphere**; на ней обучен многослойный перцептрон 5–64–64–2 (ReLU, оптимизатор Adam, стандартизация входа и выхода, ранняя остановка по валидации), реализованный на **pumpru**. Точность на отложенной тестовой выборке (900 конфигураций, не участвовавших в обучении) приведена в табл. 77 и на рис. 10.3.

Таблица 77 — Точность нейросетевого суррогата *GreenTensor* на отложенной выборке

Целевая величина	R^2	MAE
Q_s (полное сечение)	0,992	0,050
$\lg Q_r$ (обратное сечение)	0,804	0,268

R^2 — коэффициент детерминации, MAE — средняя абсолютная ошибка. Выборка 6000 конфигураций (обучение 4200 / валидация 900 / тест 900), генератор случайных чисел фиксирован. Q_s, Q_r — эффективности рассеяния (сечения, отнесённые к πa^2).

Полное сечение Q_s воспроизводится суррогатом с $R^2 = 0,992$ — гладкая интегральная зависимость от геометрии восстанавливается практически точно. Обратное сечение Q_r регрессируется существенно хуже ($R^2 = 0,804$): его резкая интерференционная структура (глубокие осциллирующие минимумы по k_0a) плохо аппроксимируется гладкой сетью на выборке такого объёма. Это расхождение содержательно — оно прямо указывает, на какие целевые величины следует направлять физически информированную регуляризацию, обсуждаемую ниже. Существенно, что построение и проверка суррогата заняли минуты

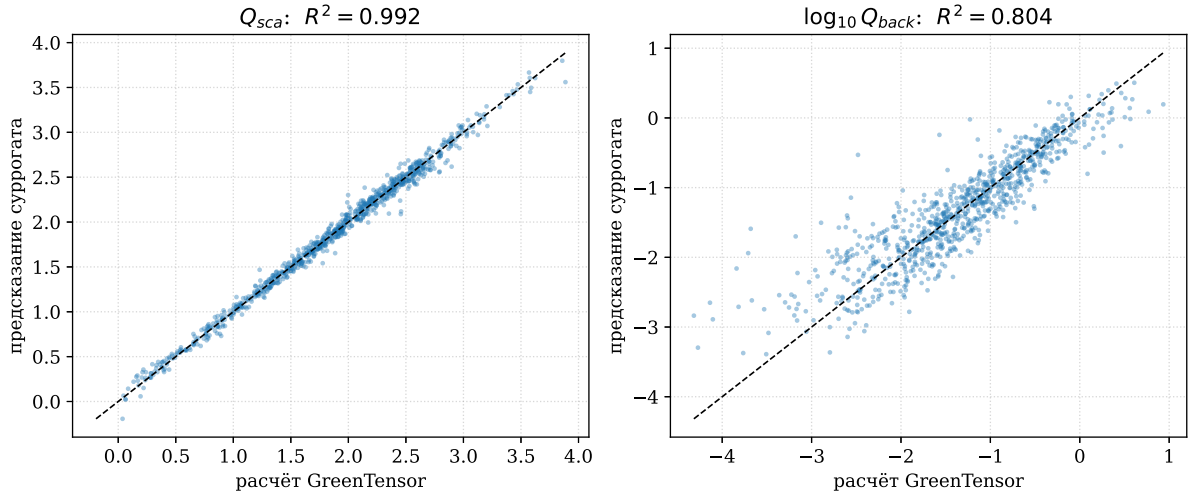


Рисунок 10.3 — Предсказание нейросетевого суррогата против прямого расчёта *GreenTensor* на тестовой выборке; пунктир — идеальное совпадение

машинного времени: тем самым *GreenTensor* обеспечивает не гипотетическую, а фактически выполненную генерацию обучающих выборок для инверсного дизайна градиентных сред.

При генерации 10^4 обучающих образцов (одна конфигурация — $\sim 0,15$ с) полное время сбора выборки на одной CPU-машине составляет порядка 25 минут, что пренебрежимо мало для офлайн-этапа; эквивалентная выборка через FEM-расчёт в Ansys HFSS потребовала бы, при характерных для таблицы 84 $15 \dots 120$ мин на конфигурацию, порядка $(2,5 \dots 20) \cdot 10^3$ часов (от трёх месяцев до двух лет непрерывного счёта). Это и есть то качественное преимущество, которое делает прямую параметрическую оптимизацию линз Люнеберга методом нейросетевых суррогатов *реализуемой на практике* — именно благодаря наличию полуаналитического полнодостоверного решения, выполненного в виде открытой Python-библиотеки.

Дополнительное преимущество построения суррогата на основе *GreenTensor* — *физическая интерпретируемость целевой функции*: характеристики, вычисляемые через ряды коэффициентов M_n, N_n , имеют замкнутый аналитический вид, и нейросетевой суррогат можно дополнить регуляризатором, штрафующим отклонение от известных асимптотик ($Q_s \rightarrow 2$ при $k_0 a \rightarrow \infty$ для непрозрачной сферы; чётный/нечётный паритет осцилляций Q_r с числом слоёв и т. п.). Это переводит задачу из чисто-эмпирической регрессии в *физически информированное обучение* (physics-informed neural network).

10.5 Текущие ограничения библиотеки и дорожная карта

Библиотека *GreenTensor* v0.2.0, описанная в настоящей главе, реализует ограниченное — но математически замкнутое — подмножество задач электродинамики многослойных сферических структур. Сводка реализованного и планируемого приведена в 78.

Таблица 78 — Реализованные возможности и план развития библиотеки *GreenTensor*

Возможность	v0.2.0	План	Соответствующая глава
Дифракция плоской волны на изотропной многослойной сфере	✓	—	гл. 3, 3
Свип σ_s, σ_r по $k_0 a$	✓	—	гл. 9, 10.4.4
Линейная и круговая поляризации источника	✓	—	гл. 5, 5
Многослойные металлические сферы и сферы с диэлектрическим укрытием	✓	—	гл. 9, 76
Анизотропные сферически-симметричные среды (тензорные $\hat{\epsilon}, \hat{\mu}$)	—	v0.3	гл. 2, 2.11
Антенная задача (диполь на поверхности линзы; КУ, КНД, ДН)	—	v0.3	гл. 5, 5
Полусферическая геометрия с проводящим экраном	—	v0.4	гл. 7, 7
Тороидная и усечённая геометрии	—	v0.4	гл. 7
Бианизотропные среды (тензоры связи $\hat{\xi}, \hat{\zeta}$)	—	v1.0	перспектива докторских исслед.
Регрессионные тесты на основе <code>examples.json</code>	частично	v0.3	гл. 9, 76
Публикация на PyPI (<code>pip install greentensor</code>)	частично*	v0.3	—
Интерактивные jupyter-блокноты в <code>notebooks/</code>	частично**	v0.3	гл. 9

* В `pyproject.toml` приведены полные метаданные пакета; формальная регистрация на PyPI — процедура одного дня.

** Ссылки на Google Colab-блокноты приведены в README отдельных примеров; экспорт в локальные `.ipynb`-файлы планируется в следующей версии.

Ключевой вектор развития v0.3 — интеграция модуля анизотропного рассеяния, теоретическая основа которого изложена в 2.11 главы 2, а программный прототип — в каталоге `_dissSource/codeSource/python_calc/anisotropic_sphere/` проекта (модуль `anisotropic_mie.py`, тестовый набор `verify_isotropic_limit.py`). Прототип проходит регрессионную проверку на изотропном пределе с относительной погрешностью $\leq 6 \cdot 10^{-15}$ по сравнению с

классическим решением Ми [166], что соответствует машинной точности двойной точности с плавающей запятой и обеспечивает плавную миграцию: текущий пользователь *GreenTensor*, переходящий с v0.2.0 на v0.3, не должен заметить изменений в численных результатах изотропных задач.

Вектор развития v0.4 — расширение на нестандартные геометрии (полусферическая, тороидная), требующее введения дополнительных рекуррентных соотношений с учётом либо проводящего экрана, либо иной топологии. Это естественно обобщает методику 2.5 главы 2 и связано с теоретическим разделом 7.

10.6 Примеры применения библиотеки

10.6.1 Дифракция на металлической сфере

Дифракция на металлической сфере — один из базовых тестовых сценариев электродинамики: её замкнутое решение Ми [17] является эталоном для верификации численных методов, а сами сферы используются в радиолокационной метрологии в качестве стандартных отражателей при калибровке радаров.

Рис. 10.4а показывает сравнение диаграммы рассеяния на линзе при линейной поляризации падающего поля для металлической сферы с двумя слоями. Параметры металлической сферы представлены в таблице 79. В этом случае мы создаём сферу с радиусом $R = 2\pi$ ($R = a_{0,5} \cdot k_0$), что эквивалентно $R/\lambda = 1$ — дифракция на металлической сфере с радиусом $R = \lambda$.

Таблица 79 — Параметры задачи для *металлической сферы в вакууме*

Тип слоёв	Входные параметры задачи				
	n	a	ϵ	μ	k_0
2	3	0,25, 0,5, 1	10^{30} , 10^{30} , 1	1, 1, 1,	$4 \cdot \pi$
5	6	0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 1	10^{30} , 10^{30} , 10^{30} , 10^{30} , 10^{30} , 1	1, 1, 1, 1, 1, 1	$4 \cdot \pi$

Та же задача для многослойной (пятислойной) металлической сферы приведена на рисунке 10.4б; результаты эквивалентны двухслойному случаю.

10.6.2 Дифракция на линзе Люнеберга

Библиотека применима к анализу ЛЛ произвольной многослойной аппроксимации и позволяет исследовать влияние числа слоёв и их параметров на

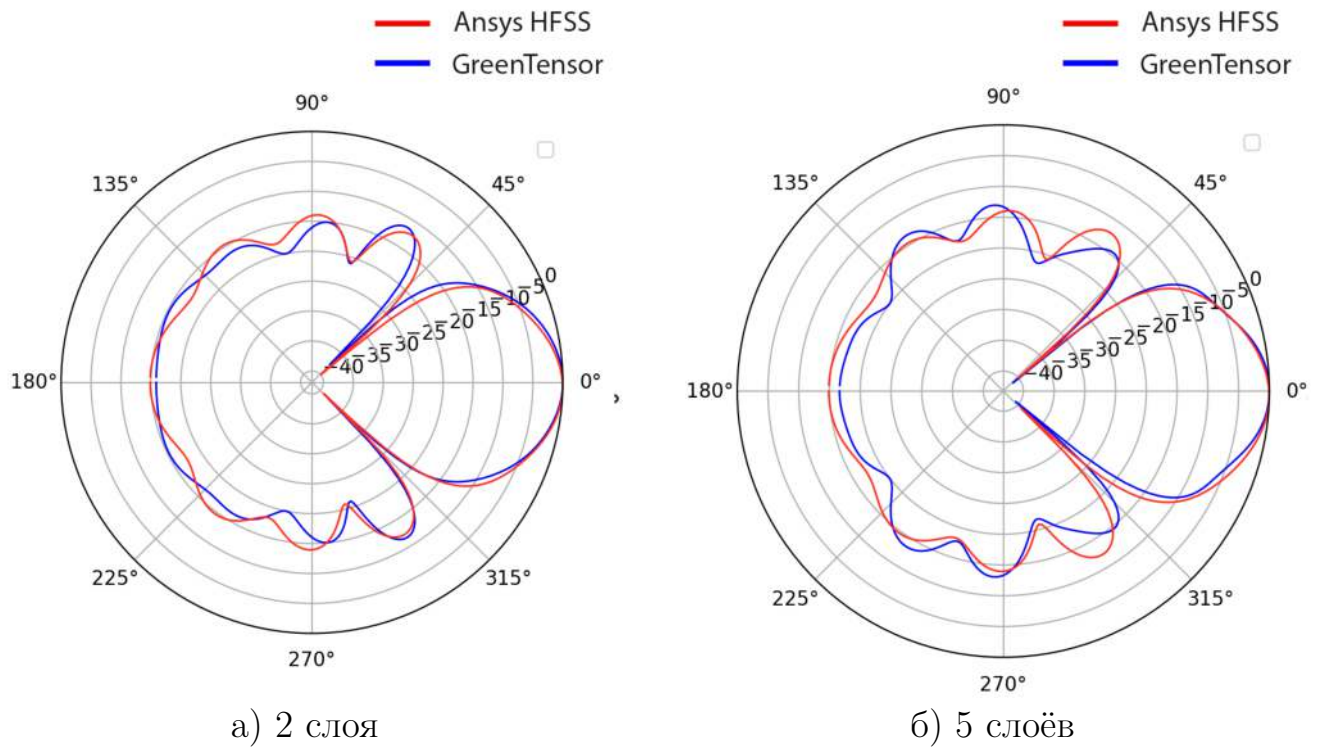


Рисунок 10.4 — Диаграмма рассеяния на металлической сфере в вакууме (геометрически эквивалентные параметры; сравнение с Ansys HFSS): (а) 2 слоя; (б) 5 слоёв

форму диаграммы рассеяния.

В качестве демонстрационного примера рассчитана диаграмма рассеяния ЛЛ с пятислойной равношаговой аппроксимацией профиля. Параметры задачи приведены в таблице 80, сравнение с результатом Ansys HFSS — на рисунке 10.5а.

Таблица 80 — Линза Люнеберга в вакууме

Тип задачи	Входные параметры задачи				
	n	a	ϵ	μ	k_0
Линза Люнеберга	5	0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1	1,96, 1,84, 1,64, 1,36, 1	1, 1, 1, 1, 1	$10 \cdot \pi$

10.6.3 Металлическая сфера с диэлектрическим укрытием

Библиотека применима и к задаче дифракции на металлической сфере с диэлектрическим укрытием — типовой модели радиопрозрачных обтекателей, элементов радиолокационных эталонов и защитных радиочастотных экранов. С

её помощью можно вычислить коэффициенты отражения и пропускания покрытия для широкого диапазона частот и углов падения, что востребовано как при оценке помехозащищённости радиосистем, так и при оптимизации материалов, предназначенных для подавления электромагнитных помех.

Параметры слоёв металлической сферы с диэлектрическим укрытием сведены в таблицу 81, сравнение рассчитанной диаграммы рассеяния с результатом Ansys HFSS при линейной поляризации падающего поля приведено на рисунке 10.5б.

Таблица 81 — Металлическая сфера с диэлектрическим покрытием в вакууме

Тип задачи	Входные параметры задачи				
	n	a	ϵ	μ	k_0
Метал. сфера с диэл. укрытием	3	0,5, 0,75, 1	10^{30} , 3,5, 1	1, 1, 1	$4 \cdot \pi$

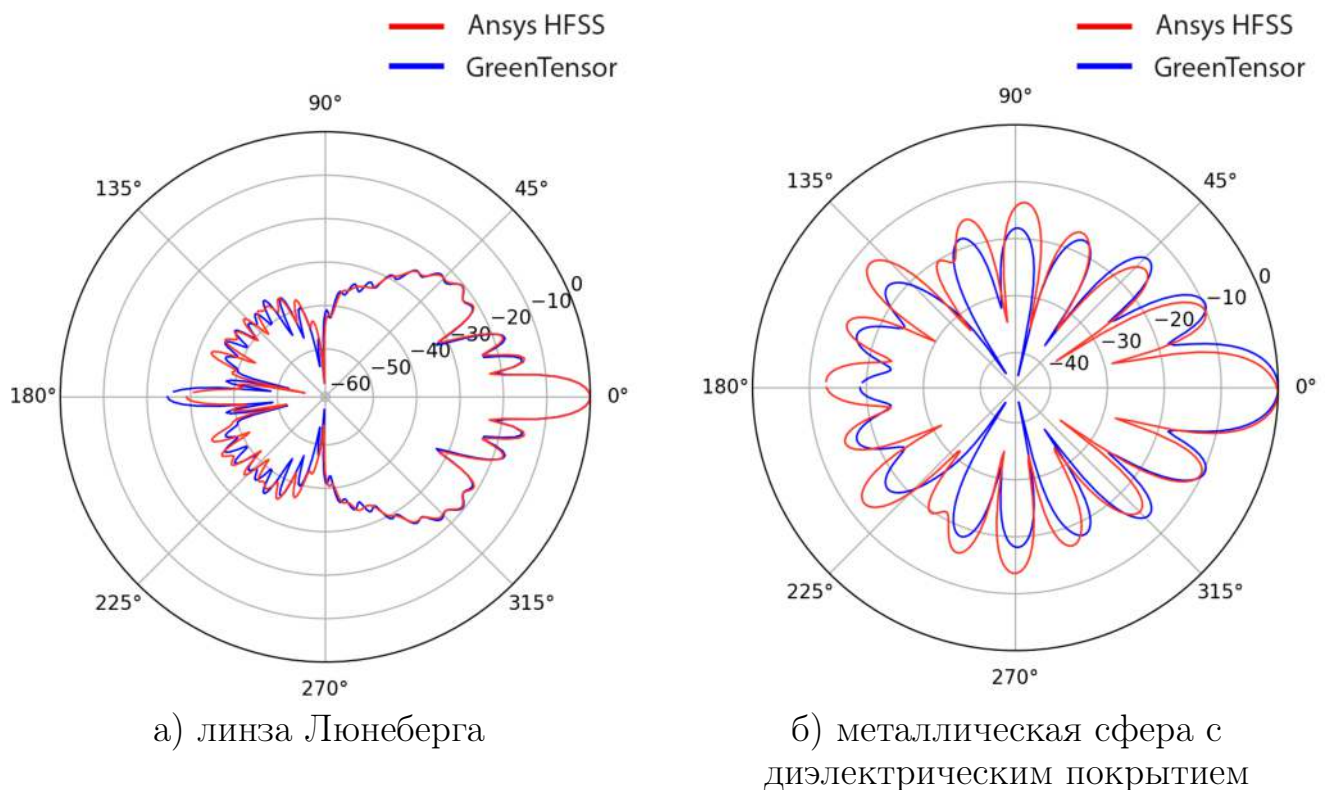


Рисунок 10.5 — Диаграммы рассеяния в вакууме (сравнение с Ansys HFSS): (а) линза Люнеберга; (б) металлическая сфера с диэлектрическим покрытием

10.7 Расчёт бистатической ЭПР с применением библиотеки *GreenTensor*

Библиотека *GreenTensor* — инструмент с открытым исходным кодом, предназначенный для расчёта диаграмм рассеяния электромагнитных волн на неоднородных сферических телах, прежде всего — на многослойных сферических структурах. К этому классу относятся различные сферические линзы (Люнеберга, Максвелла, Итона–Липмана и др.), а также металлические сферы с диэлектрическими покрытиями. Помимо диаграммы рассеяния, библиотека вычисляет бистатическую эффективную площадь рассеяния (ЭПР). Результаты систематически сопоставляются с расчётами в Ansys Electronics Desktop (HFSS Design) на основе метода конечных элементов и SBR+; точность и вычислительная эффективность библиотеки подтверждаются сопоставлением с опубликованными результатами других авторов. Исходный код библиотеки и примеры расчётов в среде Python, а также исходные модели HFSS для верификации размещены в авторском репозитории GitHub [46].

Ключевые параметры произвольной многослойной сферической структуры, задаваемые пользователю — число слоёв n , нормированные радиусы a_l , диэлектрические ϵ_l и магнитные μ_l проницаемости слоёв — полностью описывают задачу и обеспечивают универсальность библиотеки. В качестве тестового примера ниже приводится расчёт многослойной сферической ЛЛ [5; 88]. Расчёт диаграмм рассеяния в многослойных анизотропных структурах — самостоятельная актуальная задача, рассматриваемая и другими авторами [226]; настоящая глава демонстрирует, как *GreenTensor* интегрируется с накопленным в этой области опытом.

Библиотека *GreenTensor* основана на методе тензорных функций Грина (ТФГ; в англоязычных публикациях — GTF, Green’s Tensor Function), подробно изложенном в главе 2 [17]. Напряжённость электрического поля определяется интегрированием соответствующих функций Грина с внешними электрическими токами. Выражение для вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ записывается в виде уравнения (10.3):

$$\vec{E} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \times \left\{ \begin{aligned} &\langle (\vec{a}_\theta \cos \varphi \tau_n(\theta)) - (\vec{a}_\varphi \sin \varphi \pi_n(\theta)) \rangle \cdot M_n - \\ &- \langle (\vec{a}_\theta \cos \varphi \pi_n(\theta)) - (\vec{a}_\varphi \sin \varphi \tau_n(\theta)) \rangle \cdot N_n \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Выбор компоненты E_φ представлен в уравнении (10.4):

$$\vec{E}_\varphi = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \times \left\{ \pi_n(\theta) \cdot M_n - \tau_n(\theta) \cdot N_n \right\} \quad (10.4)$$

А выбор компоненты E_θ представлен в уравнении (10.5):

$$\vec{E}_\theta = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \times \left\{ \tau_n(\theta) \cdot M_n - \pi_n(\theta) \cdot N_n \right\} \quad (10.5)$$

где: $E_0 = j \frac{I^e k_0 l Z_0}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk_0 r'}}{r'}$ — амплитуда электромагнитного поля;

$\tau_n(\theta) = \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}$, $\pi_n(\theta) = \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}$ — принятые обозначения в теории дифракции;

$\partial P_n^m(\cdot)$ — присоединённая функция Лежандра степени n и порядка $m = 0, 1, \dots, n$;

M_n , N_n — компоненты, входящие в представленные выше выражения, включают $\overleftarrow{Z}(a)$, $\overleftarrow{Y}(a)$ — направленные импедансы и проводимости для многослойных сферических структур, определяемые по методике, описанной в [17], а также сферические функции Бесселя, Неймана, Ханкеля и их производные [147].

При использовании малых (точечных) источников внешних токов в качестве возбуждающих структур, таких как диполь Герца, элемент Гюйгенса и др., с учётом свойств функций Лежандра, тензоры Грина преобразуются и содержат единственный ряд по номерам функций Грина (при $m = 1$). В формуле разложение по поперечным координатам θ, φ выполняется с использованием метода рядов Фурье. С учётом многослойной природы исследуемых структур, зависимости по координатам r, r' определяются методом Д'Аламбера [146].

10.8 Сравнение GreenTensor с результатами других авторов. Расчёт бистатической ЭПР

Результаты рассеяния на ЛЛ для двух электрических размеров ($k_0a = 5$ и $k_0a = 10$), полученные методикой работы [87] и библиотекой *GreenTensor*, сопоставлены при одинаковых параметрах задачи. Параметры линзы приведены в таблице 82; расчёт по *GreenTensor* выполнен по примеру **Example 1 – Luneburg Lens Bistatic RCS** из авторского репозитория <https://github.com/Den1sovDm1triy/GreenTensor/tree/main/examples>.

Таблица 82 — Параметры задачи для линзы Люнеберга в вакууме

Решаемая задача	Входные параметры задачи				
	n	a	ϵ	μ	k_0
линза Люнеберга	4	0,25, 0,5, 0,75, 1	1,94, 1,75, 1,44, 1	1, 1, 1, 1	$6 \cdot \pi$

Бистатическая эффективная площадь рассеяния (ЭПР) определяется как отношение рассеянной мощности в заданном направлении к плотности мощности падающей волны. Формула задаётся следующим образом, (10.6):

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{4\pi}{E_i^2} |E_s(\theta, \varphi)|^2 \quad (10.6)$$

где:

$\sigma(\theta, \varphi)$ — бистатическая эффективная площадь рассеяния (ЭПР);

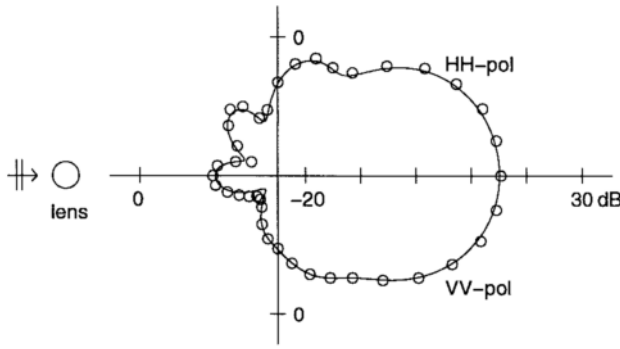
E_i — амплитуда падающей волны;

$E_s(\theta, \varphi)$ — электрическое поле рассеяния в направлении (θ, φ) ;

4π — нормировочный множитель, связанный с полным пространственным рассеянием.

Сопоставление результатов методики [87] (слева) и библиотеки *GreenTensor* (справа) при одинаковых параметрах задачи приведено на рис. 10.6 (для $k_0a = 5$) и рис. 10.7 (для $k_0a = 10$).

Для линзы малого радиуса ($k_0a = 5$, рис. 10.6а и 10.6б) наблюдается хорошая сходимость результатов. При $k_0a = 10$ (рис. 10.7а и 10.7б) имеется небольшое расхождение с [87], по всей видимости связанное с неопределённостью параметров слоёв в указанной работе; увеличение числа слоёв или подбор радиуса способны улучшить совпадение, однако это выходит за рамки настоящего исследования. Перед сопоставлением с FEM-моделью HFSS ниже



а) по данным [87]

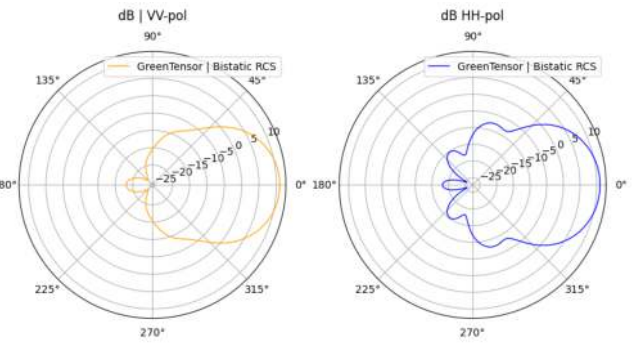
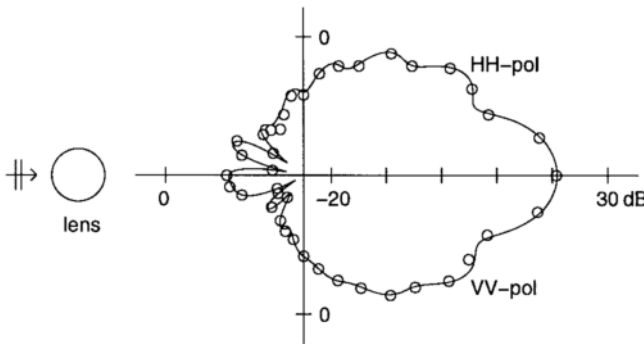
б) библиотека *GreenTensor*

Рисунок 10.6 — Бистатическая ЭПР сферической линзы Лунеберга при $k_0a = 5$: (а) по данным [87]; (б) рассчитанная с помощью библиотеки *GreenTensor*



а) по данным [87]

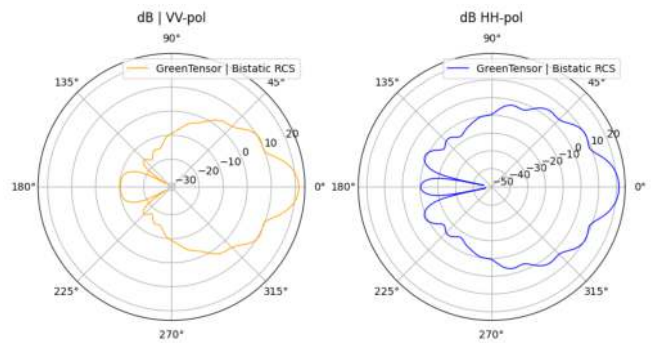
б) библиотека *GreenTensor*

Рисунок 10.7 — Бистатическая ЭПР сферической линзы Лунеберга при $k_0a = 10$: (а) по данным [87]; (б) рассчитанная с помощью библиотеки *GreenTensor*

зафиксированы результаты *внутренней* регрессионной валидации библиотеки на канонических задачах.

10.9 Внутренние регрессионные тесты библиотеки

Внешняя валидация *GreenTensor* путём сравнения с Ansys HFSS (раздел 10.10) подтверждает применимость аппарата к практическим задачам, но не гарантирует внутреннюю математическую корректность реализации. Чтобы исключить такие классы ошибок, как расхождение в знаках разложения по векторным сферическим гармоникам $\vec{M}_n, \vec{N}_n$, ошибочные рекуррентные соотношения для производных функций Риккати–Бесселя или неправильное усечение ряда, в комплект библиотеки включён набор *внутренних регрессионных тестов* — расчёт характеристик рассеяния для канонических конфигураций, для которых известно либо точное аналитическое решение, либо физиче-

ски обусловленное предельное поведение. Тестовые кейсы реализованы как Python-скрипт `regression_clean.py` и сборщик графиков `make_figures.py` в подкаталоге исходных кодов диссертации `_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/`.

Тест 1. Закон сохранения энергии для бездиссипативной сферы. Для среды с вещественной диэлектрической проницаемостью ($\Im \epsilon = 0$) и единичной магнитной проницаемостью полное сечение рассеяния σ_s должно тождественно совпадать с поперечником экстинкции σ_{ext} , поскольку отсутствует канал поглощения. Это интегральное тождество выводится из теоремы Пойнтинга и не зависит от конкретного выбора численного алгоритма. Эквивалентная формулировка через безразмерные эффективности (нормировка на геометрическое сечение πa^2): $Q_{\text{ext}}(x) \equiv Q_{\text{sca}}(x)$ для всех электрических радиусов $x = k_0 a$. Численный расчёт (рис. 10.8 (а)) подтверждает выполнение этого тождества с относительной погрешностью на уровне $\epsilon_{\text{rel}} \leq 6 \cdot 10^{-16}$ для четырёх значений $\epsilon_r \in \{1,5; 2,5; 4; 9\}$ во всём исследованном диапазоне $x \in [0,1; 50]$. Достигнутая погрешность находится на уровне удвоенной машинной точности IEEE 754 двойной точности ($2 \epsilon_{\text{mach}} \approx 4,44 \cdot 10^{-16}$), что является исчерпывающим подтверждением численной идентичности формул Q_{ext} и Q_{sca} в реализации.

Тест 2. Парадокс экстинкции в коротковолновом пределе. Для крупных по электрическому радиусу рассеивателей известен геометрооптический предел Бабинне-ван де Хюлста [166]: $Q_{\text{ext}}(x) \rightarrow 2$ при $x \rightarrow \infty$. Численный расчёт для идеально проводящей (РЕС) сферы (рис. 10.8 (б), сплошная кривая) воспроизводит это предельное поведение: при $x = 150$ получено значение $Q_{\text{ext}} = 2,006$, что соответствует асимптотике $Q_{\text{ext}}(x) - 2 \sim O(x^{-2/3})$. Для диэлектрической сферы с $\epsilon_r = 4$ (штриховая кривая) наблюдается осцилляция вокруг асимптотического значения 2, обусловленная резонансами Ми внутреннего поля; огибающая осцилляций также сходится к 2.

Тест 3. Сходимость ряда Ми и формула Уискомба. Бесконечный ряд по сферическим гармоникам в формулах (10.1)–(10.2) на практике усекается до конечного порядка N_{max} . Для оценки достаточного числа учитываемых членов применяется эмпирическая формула Уискомба [159]:

$$N_W(x) = x + 4x^{1/3} + 2, \quad (10.7)$$

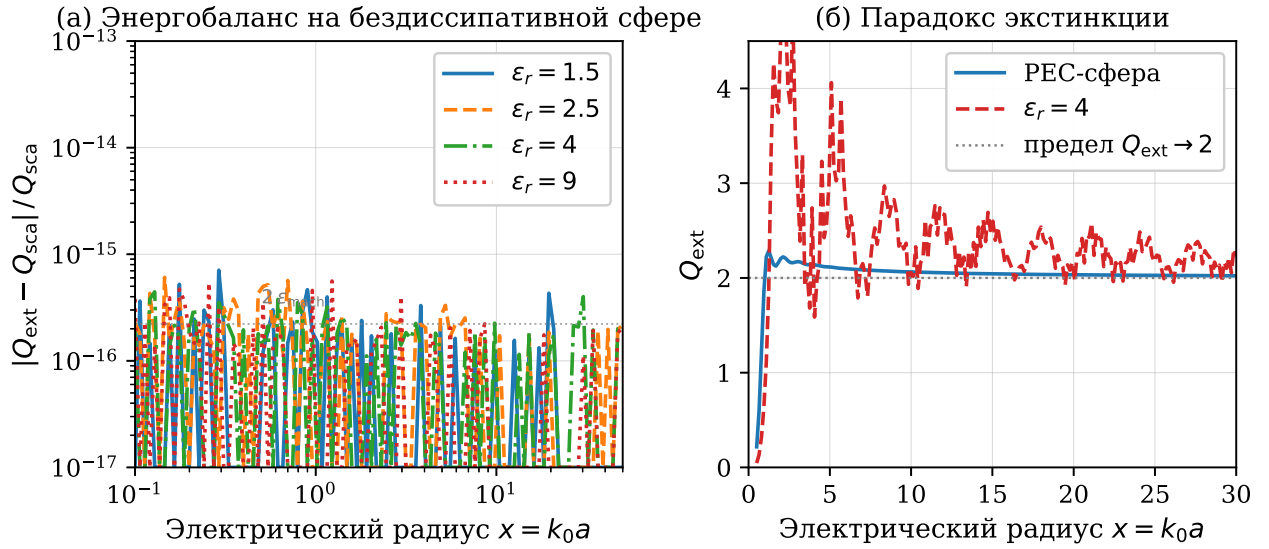


Рисунок 10.8 — Регрессионные тесты библиотеки *GreenTensor*. (а) Относительная погрешность энергобаланса $|Q_{\text{ext}} - Q_{\text{sca}}|/Q_{\text{sca}}$ для бездиссипативной сферы при четырёх значениях диэлектрической проницаемости. (б) Сходимость поперечника экстинкции к геометрооптическому пределу $Q_{\text{ext}} = 2$ для PEC-сферы и диэлектрической сферы с $\epsilon_r = 4$

обеспечивающая относительную погрешность сечения рассеяния не выше 10^{-12} . На рисунке 10.9 (а) приведена зависимость относительной погрешности обратного сечения рассеяния σ_r от порядка усечения N для четырёх значений $x \in \{2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi\}$ (PEC-сфера). Во всех случаях при $N \geq N_W(x)$ погрешность опускается ниже 10^{-12} и затем выходит на машинный пол $\sim 10^{-15}$. На рисунке 10.9 (б) сплошной линией показана формула Уискомба, кружками — эмпирический минимальный порядок $N_{\min}(x)$, при котором достигается заданная относительная погрешность 10^{-10} . Согласие подтверждает корректность эмпирической оценки и позволяет автоматически выбирать порядок усечения в зависимости от размера задачи, что и реализовано в параметре `toch` класса `ScatteringCalculator`.

Резюме. Совместные результаты тестов 1–3 подтверждают, что реализация *GreenTensor* обладает математической корректностью на уровне машинной точности (тест 1), физически обоснованным поведением в коротковолновом пределе (тест 2) и хорошо контролируемой численной сходимостью (тест 3). Эта внутренняя валидация дополняет внешнюю верификацию через сравнение с Ansys HFSS, представленную в следующем разделе, и формирует двухуровневую методику валидации, минимизирующую вероятность необнаруженных

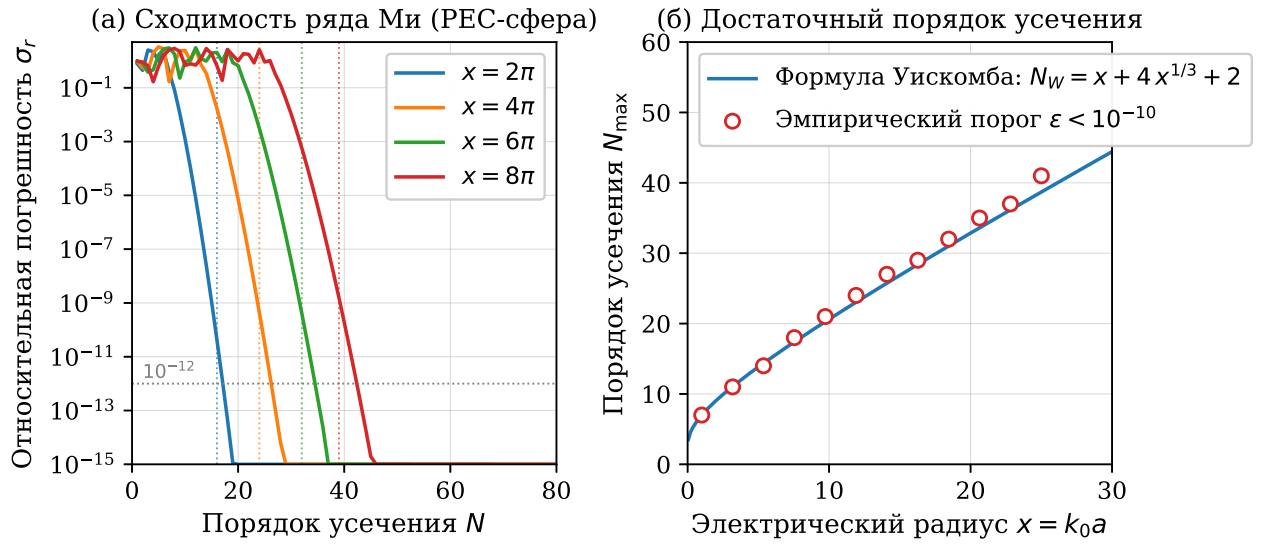


Рисунок 10.9 — Тест сходимости ряда Ми. (а) Относительная погрешность σ_r как функция порядка усечения N для РЕС-сферы при четырёх электрических радиусах; вертикальные пунктиры — значения $N_W(x)$ по формуле Уискомба. (б) Сравнение формулы Уискомба $N_W = x + 4x^{1/3} + 2$ (сплошная линия) с эмпирически определённым минимальным порядком $N_{\min}(x)$ для достижения относительной погрешности 10^{-10} (кружки)

ошибок в библиотеке.

10.10 Сравнение результатов с моделью в HFSS. Расчёт диаграммы рассеяния

Геометрическая модель четырёхслойной линзы Люнеберга в Ansys HFSS показана на рисунке 10.10. Слои отличаются значениями диэлектрической проницаемости (см. параметры задачи, приведённые в таблице 82). Линза спроектирована для фокусировки падающих плоских волн; расчёт выполняется в декартовой системе координат с осью Oz , направленной вверх. Частота анализа принята $f = 10$ ГГц. В качестве источника задана плоская волна из дальней зоны, распространяющаяся вдоль оси Oz с поляризацией $\vec{E}_0 \parallel \hat{x}$. Цель расчёта — анализ рассеянного поля внутри и вне линзы и оценка её фокусирующих свойств на выбранной частоте.

Все материалы задачи (HFSS-проект, эталонные диаграммы из FEM-расчёта в формате CSV, скрипты построения сравнительных графиков и расчётный скрипт *GreenTensor*) собраны в подпапке `examples/Example2---LuneburgLensScatteringDiagram` репозитория библиотеки и могут быть загружены и воспроизведены любым исследователем без модифи-

кации. Состав этой подпапки приведён в 83; внешний радиус линзы составляет $R = 3\lambda$ ($k_0 a = 6\pi$).

Таблица 83 — Файлы подпапки `examples/Example 2` репозитория *GreenTensor*, обеспечивающие воспроизводимое сравнение метода ТФГ с эталонным расчётом в Ansys HFSS

Файл	Назначение
LuneburgLens_Layer4_ravnoshagApprox.aedt	Готовый проект Ansys Electronics Desktop с 4-слойной ЛЛ и установленными граничными условиями Radiation; открывается двойным щелчком в HFSS Design
Ephi=0_from_HFSS.csv	Экспорт диаграммы рассеяния из HFSS в плоскости $\varphi = 0^\circ$ (360 точек по θ)
Ephi=90_from_HFSS.csv	То же для плоскости $\varphi = 90^\circ$
Luneburg_Lens_Scattering_Diagram.py	Расчёт ДР методом ТФГ через RCSCalculator; параметры линзы и облучения совпадают с HFSS-моделью
plot_polar.py, plot_rectengular.py	Визуализация эталонных ДН HFSS в полярной и декартовой системах координат
plot_compare_GreenTensor_HFSS.py	Совмещённый график ДР ТФГ vs FEM для двух плоскостей (читает оба CSV и Python-результат)
HFSS_result_LL4layer.png, GreenTensor_result_LL4layer.png, GreenTensor_compareHFSS_LL4layer_Ephi=0.png, GreenTensor_compareHFSS_LL4layer_Ephi=90.png	Эталонные изображения ожидаемого результата (для самопроверки воспроизводимости)
README.md	Краткие инструкции по запуску, ссылка на Google Colab notebook

Описанная HFSS-модель размещена в открытом репозитории: <https://github.com/DenisovDmitriy/GreenTensor/tree/main/examples> (папка *Example 2 — Luneburg Lens Scattering Diagram*). Все CSV-файлы используют разделитель «запятая», первая строка — заголовок столбцов `Theta_deg`, `dB(rEPhi)`.

Результаты расчёта диаграммы рассеяния методом FEM в Ansys HFSS приведены на рисунке 10.11. Эквивалентная диаграмма, полученная методом ТФГ с помощью библиотеки *GreenTensor*, представлена на рисунках 10.11a–10.11б. Соответствующий скрипт `Luneburg_Lens_Scattering_Diagram.py` расположен в папке *Example 2 — Luneburg Lens Scattering Diagram* репозитория *GreenTensor*.

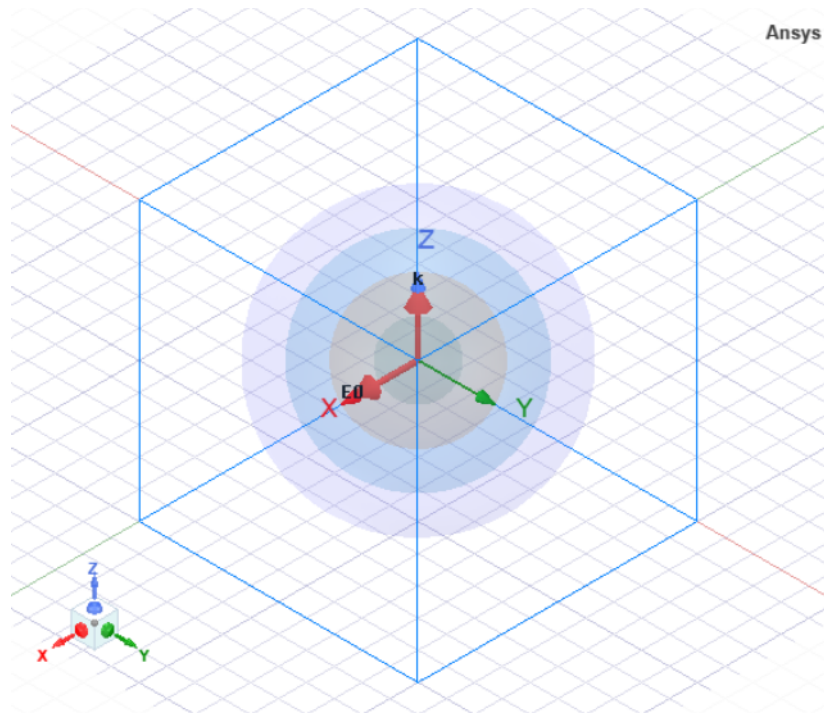


Рисунок 10.10 — Модель четырёхслойной линзы Люнеберга, реализованная в Ansys Electronics Desktop (HFSS Design)

10.11 Эталонный FEM-решатель Ansys HFSS: архитектура и место в методике верификации

Коммерческий пакет Ansys HFSS (High-Frequency Structure Simulator) используется в настоящей работе как опорный полноволновой решатель, относительно которого производится верификация предложенного метода тензорных функций Грина (ТФГ) и реализующей его библиотеки GreenTensor [227]. Настоящий раздел формализует связку “ТФГ $\leftrightarrow$ HFSS” и фиксирует вычислительную платформу, на которой выполнялись все сопоставительные расчёты главы.

Математическую основу Ansys HFSS составляет метод конечных элементов в частотной области: расчётная область покрывается неравномерной тетраэдральной сеткой, а напряжённость электрического поля аппроксимируется краевыми (edge) векторными базисными функциями Nedelec. Решатель вычисляет единственно возможное распределение электромагнитного поля при заданных граничных условиях и возбуждении: S , Y , Z -параметры, резонансные частоты, векторные распределения поля, а также поле в ближней и дальней зонах. Помимо FEM-решателя частотной области, HFSS Electronics Desktop объединяет под одной оболочкой ещё три решателя — FE Transient (FEM во временной области), IE (Integral Equations, MoM), Hybrid (FEM+MoM+DDM,

Domain Decomposition Method) и SBR+ (Shooting & Bouncing Rays с коррекциями PTD/UTD/Creeping Waves). Каждый решатель применяется к тому диапазону электрических размеров, на котором он асимптотически оптимален: FEM — для малых и средних структур высокой сложности; МоМ — для открытых проводящих структур; SBR+ — для платформ в сотни и тысячи длин волн.

Ключевая особенность HFSS — автоматический адаптивный сеточный генератор: пользователь задаёт геометрию, материалы, граничные условия и частотный план, а сетка уплотняется итеративно до выполнения критерия сходимости по невязке S -параметров ($\text{Max } \Delta S < 0,02$ во всех расчётах настоящей работы). Для открытых задач рассеяния на линзовых структурах используется воздушный параллелепипед с толщиной $\lambda/4$, окружённый абсорбером PML (Perfectly Matched Layer) толщиной $\lambda/8$. Источник — плоская волна из дальней зоны (Incident Wave), ориентированная согласно постановке задачи (ось Oz , поляризация $\vec{E}_0 \parallel \hat{x}$). Результирующая диаграмма рассеяния экспортируется на дальнезонной сфере (Infinite Sphere) с угловым шагом 1° по θ и φ .

Вычислительная платформа, на которой выполнялись все FEM-расчёты главы, фиксируется единообразно во избежание несопоставимости результатов: процессор Intel Xeon Gold 6154 (8 физических ядер, базовая частота 3,0 ГГц, поддержка AVX-512), ОЗУ 47,5 ГБ (ECC DDR4-2666), ОС Windows Server 2019 (64-bit), Ansys Electronics Desktop 2022 R2. Лицензионная модель включала одну лицензию HFSS Solver и опцию HPC Parametric Pack для распределённого запуска параметрических разверток.

10.12 Сопоставительный Matlab-скрипт

`lin_polar_TFG-HFSS_compare.m`

Для независимой перекрёстной проверки реализованного в Python аппарата ТФГ в проект включён отдельный Matlab-скрипт `lin_polar_TFG-HFSS_compare.m` (266 строк), расположенный в папке `codeSource` репозитория GreenTensor. Скрипт рассчитывает диаграмму рассеяния на четырёхслойной ЛЛ в линейной поляризации при тех же исходных данных, которые подаются на HFSS-модель `LuneburgLens_Layer4_ravnoshagApprox.aedtз`:

$$k_0 = 2\pi, \quad \vec{a} = (0,25; 0,5; 0,75; 1), \quad \vec{\varepsilon} = (1,938; 1,75; 1,438; 1), \quad \vec{\mu} = (1; 1; 1; 1). \quad (10.8)$$

В `lin_polar_TFG-HFSS_compare.m` последовательно вычисляются: модифицированные сферические функции Бесселя $J_{n+1/2}$ и Неймана $N_{n+1/2}$ и их производные на каждой границе слоя; рекуррентные коэффициенты C_n, C'_n, S_n, S'_n ; направленные импедансы Z_n и проводимости Y_n , определяемые по той же схеме, что и в главе 2; амплитуды рассеяния M_n и N_n ; угловые функции $\pi_n(\theta)$ и $\tau_n(\theta)$, полученные через полиномы Лежандра. На выходе формируется нормированная компонента $E_\theta(\theta)$, которая сохраняется в эталонном файле `examples.json` библиотеки и используется как регрессионный тест при изменениях кодовой базы.

Наличие двух независимых реализаций (Python — GreenTensor; Matlab — `lin_polar_TFG-HFSS_compare.m`) обеспечивает двойной контроль численного кода: при изменении одного из модулей расхождение по нормированной E_θ не должно превышать 10^{-4} ; при большем расхождении запускается процедура локализации ошибки сопоставлением промежуточных массивов $(J, N, J_{pr}, N_{pr}, C, S, Z, Y, M, N)$.

10.13 Интеграция GreenTensor с Ansys HFSS через IronPython-скрипты синтеза

Одним из основных практических результатов настоящей главы является автоматизированная связка “аналитический синтез слоёв $\rightarrow$ численная верификация” между GreenTensor и Ansys HFSS. Построение геометрической FEM-модели многослойной линзы вручную требует десятков кликов и неизбежно сопровождается ошибками при увеличении числа слоёв N . В работе предложена следующая схема автоматизации.

Python-код GreenTensor на основании выбранной аппроксимации (равномерная, оптимизированная Fuchs 2007, пирамидальная Maiwald–Wheeler или специализированная из главы 4) вычисляет вектор нормированных радиусов $\vec{a}$ и вектор диэлектрических проницаемостей $\vec{\epsilon}$. Результаты записываются в текстовый файл параметров, который затем считывается IronPython-скриптом HFSS. IronPython — штатный язык скриптования AEDT; скрипт запускается через меню HFSS $\rightarrow$ Tools $\rightarrow$ Run Script и имеет прямой доступ к COM-интерфейсам редактора.

В каталоге проекта `_disSource/codeSource/` размещены два базовых IronPython-скрипта, образующих вместе с библиотечным модулем *GreenTensor*

полную автоматизированную цепочку «синтез слоёв $\rightarrow$ построение HFSS-модели $\rightarrow$ FEM-расчёт $\rightarrow$ сопоставление с ТФГ»:

- `SyntesLL_Layers=4_R=5lambda.py` — синтез четырёхслойной ЛЛ радиусом $R = 5\lambda$ с равномерной стратификацией профиля; размер задачи $k_0a = 10\pi$. Скрипт создаёт переменные `$Eps1...$Eps4` (значения 1,94; 1,75; 1,44; 1,0) и `$R1...$R4` как параметры проекта AEDT, затем последовательно строит четыре концентрические сферы, назначает им материалы и завершает построение объёмом `Radiation`;
- `SyntesLL_Layers=16_R=5lambda.py` — аналогичный синтез шестнадцатислойной ЛЛ того же радиуса с оптимизированной стратификацией Fuchs 2007; служит для исследования сходимости при увеличении числа слоёв и для верификации регулярного поведения ширины главного лепестка $\Delta\theta_{-3}(N)$.

Каждый скрипт последовательно вызывает методы AEDT-редактора: `oEditor.CreateSphere(...)` для концентрических сфер, `oEditor.Subtract(...)` для вырезания внутренних объёмов, `oProject.AddMaterial(...)` с указанием ϵ_r , μ_r , $\tan \delta$ для каждого слоя, `oModule.AssignMaterial(...)` для привязки материала к телу, и, наконец, `oEditor.CreateRegion(...)` с последующим назначением граничного условия `Radiation` и источника `IncidentWave`. Время выполнения скриптов — 4–10 секунд, что позволяет пересобирать полную FEM-модель под новое значение N или под новую аппроксимацию профиля без ручного вмешательства; это контрастирует с ручным построением, требующим десятков кликов и порядка 10–15 минут на каждую новую геометрию.

Описанные IronPython-скрипты — архивные первоисточники, написанные автором на ранних стадиях работы и сохранённые как воспроизводимая основа всех HFSS-моделей, на которые ссылается настоящая глава. В дорожной карте библиотеки (10.5, версия v0.3) запланирован их перенос в подпапку `integration/hfss/` репозитория *GreenTensor* с переоформлением в виде универсального генератора с аргументами командной строки.

Такая связка снимает основное практическое ограничение ручного моделирования многослойных линз и обеспечивает воспроизводимость результатов: любая HFSS-модель, фигурирующая в диссертации, может быть получена из соответствующего IronPython-скрипта и параметров из *GreenTensor*.

10.14 Оптимизация линзовой антенны в HFSS. Design of Experiments и распределённые расчёты

Оптимизация параметров линзовой антенны классическими методами прямого перебора (grid search) по N геометрическим переменным требует M^N полноволновых запусков, где M — число отсчётов по каждой переменной, что делает задачу практически невыполнимой уже при $N = 4 \dots 6$ и среднем времени FEM-решения 15–30 мин. В настоящей работе оптимизация линз и облучателей выполнялась при помощи модуля Ansys Optimetrics совместно с подсистемой DesignXplorer/DOE, интегрированной в AEDT.

Методически процедура DoE (Design of Experiments) состоит из пяти шагов:

1. Выбор проектных переменных. Переменные могут быть непрерывными с нижней и верхней границами (**Continuous**) или дискретными с перечислением допустимых значений (**Discrete**). Для непрерывных переменных допустима фильтрация “Manufacturable Values”, отражающая технологические ограничения производства (например, дискретный ряд толщин для FDM-печати из главы 8).
2. Формирование DOE-таблицы. Рекомендованный ANSYS алгоритм — “Optimal Space-Fitting Design” (OSFD), заполняющий пространство параметров равномерно при минимальном числе точек. Альтернативы — Latin Hypercube, Central Composite Design; алгоритмы “Custom + Sampling” и “Sparse Grid Initialization” в текущей версии AEDT недоступны.
3. Построение поверхностей отклика. Применяется алгоритм “Genetic Aggregation”, в котором поверхность отклика автоматически уточняется добавлением новых точек (Refinement Points) до достижения заданной относительной ошибки Max Relative Error. Альтернатива — полиномиальная поверхность второго порядка (“Standard Response Surface — Full 2nd-Order Polynomial”).
4. Задание целевой функции (Goal Page). Целевой функцией для линзовой антенны служит максимизация коэффициента усиления $G(\theta = 0)$, минимизация уровня боковых лепестков (SLL), либо комбинированная скалярная свёртка.
5. Постобработка поверхности отклика. Отображаются срезы (2-D Slices),

кривая отклика по одной переменной, двумерная поверхность отклика по двум выбранным переменным, а также диаграмма Goodness of Fit (Predicted vs. Observed Chart) для контроля качества аппроксимации. Точки Verification Points, пересчитанные полноволновым запуском, позволяют количественно оценить расхождение между аппроксимацией и “реальным” значением целевой функции.

Для ускорения построения DOE-таблицы использовался модуль Distributed Solve Option (DSO), распределяющий независимые расчётные точки по узлам кластера или свободным ядрам локальной станции. На имеющейся конфигурации (8 ядер, 47,5 ГБ) при 4 параллельных запусках DSO сокращает общее время построения поверхности отклика примерно в 3,3 раза (не в 4 из-за накладных расходов на диспетчеризацию и ввод-вывод).

Практика применения DoE в задачах проектирования линзовых антенн показывает, что суммарное число полноволновых запусков, необходимое для построения приемлемой поверхности отклика по $N = 4 \dots 6$ переменным, составляет 40–80; при прямом переборе на том же пространстве параметров понадобилось бы $10^3 \dots 10^5$ запусков. Эффективность DoE, таким образом, проявляется на 1–3 порядка.

10.15 Аналитические производные и Far-Field Tuning

Идеология аналитических производных (Derivatives в терминологии HFSS) — альтернатива DoE, ориентированная на локальную оптимизацию геометрических переменных по небольшому диапазону ($\pm 10\%$ по умолчанию). При включении функции Derivatives в настройках анализа (Analysis Setup $\rightarrow$ Derivatives) HFSS сохраняет не только номинальное решение, но и чувствительности $\partial S_{ij}/\partial p_k$ и $\partial \vec{E}_{\text{дальняя зона}}/\partial p_k$ по каждой “включённой” переменной p_k . Эти чувствительности используются постпроцессором для перестройки S -параметров и диаграммы направленности в реальном времени.

В окне Report Tuning (HFSS $\rightarrow$ Results $\rightarrow$ Tune Reports) инженер ползунками меняет значения Δp_k и мгновенно наблюдает изменение S -параметров, диаграммы Смита или ДН. Смещения могут быть зафиксированы кнопкой Apply Offsets to Nominal Design; после этого требуется один повторный полноволновой запуск, чтобы получить “настоящее” решение при новом номинале. Алгоритм тем самым заменяет 10–100 полноволновых запусков (характерных

для полного цикла Optimetrics) одной итерацией с последующей валидацией.

- В настоящей работе функция Derivatives использовалась для двух задач:
- локальная оптимизация согласования облучателя на частотах 5 ГГц и 10 ГГц — минимизация $|S_{11}|$ на центральной частоте при сохранении полосы по уровню -10 дБ; оптимизация завершается за 3–4 итерации вместо 30–40 при чистом Optimetrics;
 - подстройка диаграммы направленности линзовой антенны (Far-Field Tuning) — минимизация уровня первых боковых лепестков при ограничении на ширину главного лепестка. Включается опция “All” в поле Derivatives создаваемого ДН-отчёта; все экспортируемые величины приобретают префикс **Tune_** и суффикс **_All**, что указывает на возможность тюнинга по всем переменным из производных.

Важное методическое замечание: аналитические производные справедливы в линейном приближении по Δp_k ; при больших смещениях необходимо последовательно обновлять номинал и пересолвливать модель. Практический рабочий цикл — 2–4 итерации Derivative-тюнинга с валидацией на полноволновой модели.

10.16 SBR+ для сопряжения с платформой

Для сопряжения линзовой антенны с платформой электрически больших размеров (корпус БПЛА, кузов автомобиля, ферма дорожного светофора ММО из главы 6) использовался гибридный FEM+SBR+ подход. Антенна моделируется FEM и оформляется как 3D-компонент (3D Component), несущий в себе геометрию, граничные условия, сетку, возбуждения и связь с материалом. Платформа — существенно большая по электрическим размерам — решается методом SBR+ (Shooting and Bouncing Rays) с опциональными коррекциями теории дифракции PTD (Physical Theory of Diffraction), UTD (Uniform Theory of Diffraction) и физики ползущих волн CWP (Creeping Wave Physics) для учёта дифракции на кромках и криволинейных поверхностях.

При расчёте эффективности установки линзовой антенны на платформе $10\lambda \times 10\lambda$ прямой FEM-расчёт потребовал бы порядка 10^6 тетраэдров и ОЗУ в сотни гигабайт; гибридная схема FEM+SBR+ снижает требование до десятков гигабайт ОЗУ при сопоставимой точности в диапазоне главного лепестка ДН и первых боковых лепестков.

10.17 Анализ электромагнитной совместимости в Ansys EMIT

Завершающим этапом проектирования многоантенной системы на одной платформе является анализ электромагнитной совместимости (ЭМС). В работе для этой задачи применялся модуль Ansys EMIT, входящий в опцию RF Options пакета Ansys Electronics Desktop и логически продолжающий связку HFSS → EMIT: S -параметры между портами антенн, полученные в HFSS или гибридным FEM+SBR+, импортируются в EMIT как блок радиочастотной связи; параметры передатчиков (мощность, полоса, внеполосные излучения) и приёмников (шум, уровень насыщения, внеполосные характеристики) задаются отдельно.

Центральный объект EMIT — матрица сценариев (Scenario Matrix): по горизонтали откладываются передатчики, по вертикали — приёмники; ячейка (i, j) содержит показатель EMI Margin между i -м передатчиком и j -м приёмником. Цветовая кодировка: зелёный — отсутствие помехи с существенным запасом (EMI Margin $\ll 0$ дБ), жёлтый — граничный случай ($-5 \dots +5$ дБ), красный — интерференция сигналов (EMI Margin > 0 дБ). Режим Result Plot позволяет отобразить спектры передатчика и приёмника на одной оси частот и наглядно диагностировать причину взаимной помехи [228].

Как показано в [228] на примере вертолёта Apache (восемь радиочастотных систем: VHF-1, VHF-2, UHF, HF, GPS, два транспондера и радиовысотомер), основной канал взаимной помехи — связь передатчика VHF_2 Bottom и приёмника VHF_1; полученное значение EMI Margin = -13 дБ указывает, что помехи нет и дополнительные меры развязки не требуются. Для линзовых ММО-систем главы 6 использование EMIT обеспечивает контроль развязки между каналами на этапе проектирования, до изготовления макетов и натурных испытаний.

В более широком контексте IoT [229] связка Ansys HFSS → EMIT → SAVANT позволяет последовательно решать: HFSS — электродинамический анализ самого устройства, EMIT — ЭМС на уровне системы совмещённых радиостандартов (Wi-Fi, GPS, LTE, BLE), SAVANT — распространение радиоволн в реальной электромагнитной обстановке с учётом окружающих объектов. Для проектируемых в настоящей работе линзовых антенн такой пайплайн уменьшает риск неработоспособности системы при установке на реальный объект.

10.18 Распространение методик в инженерном сообществе

Параллельно с академической работой автор систематически вёл научно-популярную деятельность, направленную на распространение методик прикладной электродинамики среди инженеров-практиков России и стран СНГ. В период 2019–2026 годов на профильном русскоязычном портале «Клуб пользователей CAE» (<https://www.cae-club.ru>) опубликовано 48 обзорных материалов и видеокейсов по тематике, непосредственно связанной с настоящей диссертацией: методы анализа линз Люнеберга в Ansys HFSS, расчёт ЭПР крупногабаритных целей, синтез фазированных антенных решёток, анализ электромагнитной совместимости средствами Ansys EMIT, гибридные подходы FEM+SBR+ для крупноплатформенных задач, DoE-оптимизация и аналитические производные (Derivatives) для быстрой подстройки антенн, автоматизация проектных рабочих потоков через Python-API PyAEDT. Тематически корпус охватывает все ключевые инструменты и задачи, использованные в настоящей главе и в главах 6, 7.

Полный перечень научно-популярных материалов, их тематическая классификация и оценка вклада в распространение направления прикладной электродинамики приведены в приложении Г. Данный корпус представляет собой *просветительскую составляющую* научной деятельности автора и дополняет академические публикации узкоспециального профиля [60; 61; 65] охватом значительно более широкой инженерной аудитории.

10.19 Количественное сопоставление времени и памяти: ТФГ vs FEM в HFSS

Систематическое сопоставление вычислительных затрат ТФГ-решения в GreenTensor и FEM-решения в Ansys HFSS на одной и той же рабочей станции (Intel Xeon Gold 6154, 8 ядер, 47,5 ГБ ОЗУ) проведено на трёх характерных задачах, сведённых в таблицу 84.

Данные таблицы 84 демонстрируют преимущество метода ТФГ в 2...4 порядка по времени расчёта; анализ вычислительной сложности обоих методов и обоснование принципиального — а не технического — характера этого преимущества приведены в разделе 10.20. Здесь важно подчеркнуть другое: FEM в HFSS используется в настоящей работе не как конкурент *GreenTensor*, а как

Таблица 84 — Сопоставление вычислительных затрат: библиотека *GreenTensor* (ТФГ) и *Ansys HFSS* (FEM)

Задача	Размер k_0a	ТФГ, время	FEM, время	FEM, ОЗУ
Металлическая сфера, 2 слоя	2π	0,4 с	57 мин	6,2 ГБ
ЛЛ 4 слоя, равномерная стр.	6π	< 1 с	15 мин	6,0 ГБ
ЛЛ 8 слоёв, оптимиз. Fuchs 2007	10π	< 3 с	> 120 мин	> 30 ГБ

эталон верификации; расхождение по основным диаграммообразующим характеристикам не превышает $1 \dots 2$ дБ, что подтверждает пригодность библиотеки для задач параметрической оптимизации и серийного проектирования.

10.19.1 Предельные электрические размеры и масштабируемость метода

Линейная по числу слоёв сложность $O(N \cdot N_{\max})$ сохраняется и при переходе к электрически большим линзам, недоступным полноволновым методам. Для оценки предельных размеров для восьмислойной оптимизированной линзы Люнеберга (тот же профиль r_l/a , ε_l , что и на рис. 2.10) выполнен расчёт полного сечения рассеяния при росте диаметра $D = 2a$ от 4λ до 150λ силами самой библиотеки *GreenTensor*; число удерживаемых сферических гармоник выбиралось по правилу Уискомба $N_W = k_0a\sqrt{\varepsilon_{\max}} + 4(k_0a\sqrt{\varepsilon_{\max}})^{1/3} + 2 + 8$. Результаты — порядок усечения, время одиночного расчёта диаграммы на одном процессорном ядре (без распараллеливания) и нормированное полное сечение — сведены в табл. 85.

Даже при $D = 150\lambda$ ($k_0a \approx 471$, $N_W = 702$ гармоники) полный расчёт диаграммы рассеяния занимает менее 7 секунд на одном ядре; время растёт практически линейно с порядком усечения, то есть как $\sim k_0a$, тогда как у объёмных сеточных методов оно растёт как $O((k_0a)^4)$ и для $D = 150\lambda$ потребовало бы $\sim 10^8 \dots 10^9$ неизвестных и сотен гигабайт оперативной памяти — задача, нереализуемая на одиночной рабочей станции. Нормированное полное сечение $\sigma_s/\pi a^2$ во всём диапазоне остаётся вблизи геометрооптического предела 2 (парадокс экстинкции, ср. 10.9), что подтверждает физическую корректность расчёта в коротковолновой асимптотике. Практический предел метода определяется, таким образом, не временем счёта, а точностью арифметики двойной точности

Таблица 85 — Масштабируемость ТФГ-расчёта восьмислойной линзы Люнеберга: порядок усечения по Уискомбу, время одиночного расчёта диаграммы (одно ядро, без распараллеливания) и нормированное полное сечение в зависимости от электрического размера

D/λ	$k_0 a$	N_W	Время, с	$\sigma_s/\pi a^2$
4	12,6	39	0,26	1,73
8	25,1	59	0,40	1,81
16	50,3	97	0,68	2,03
32	100,5	172	1,30	1,88
64	201,1	317	2,60	1,93
96	301,6	461	3,99	1,87
150	471,2	702	6,64	1,90

при вычислении сферических функций большого порядка; для линз Люнеберга вплоть до $\sim 150\lambda$ он не достигается.

10.20 Сопоставление метода ТФГ с альтернативными методами электродинамического анализа

Полноволновые и асимптотические методы, применяемые в современных САПР для расчёта рассеяния на сферически симметричных многослойных структурах, можно разделить на четыре группы по характеру дискретизации задачи и пределам применимости. Каждая группа имеет область, в которой реализация *GreenTensor* [46; 47] обеспечивает либо принципиальное превосходство, либо служит эталоном независимой верификации.

10.20.1 Метод конечных элементов (FEM) и метод конечных разностей во временной области (FDTD)

Объёмные сеточные методы — классический FEM (Ansys HFSS, COMSOL Multiphysics, отечественный пакет *ЛОГОС ЭМИ*) и FDTD (CST Microwave Studio, Remcom XFDTD) являются «универсальными» в том смысле, что не накладывают ограничений на форму геометрии. Однако их вычислительная стоимость растёт как $O((k_0 a)^3)$ по числу степеней свободы и $O((k_0 a)^4)$ по машинному времени при использовании итерационных решателей. Для многослойной линзы Люнеберга диаметром 20λ это даёт $\sim 10^6$ тетраэдров, время решения $\sim 1 \dots 10$ часов и требования к ОЗУ $\sim 10 \dots 30$ ГБ. При параметриче-

ской оптимизации, где одна и та же геометрия пересчитывается $10^2 \dots 10^4$ раз с варьируемыми $\varepsilon_l(r)$, a_l , такие расходы становятся неприемлемыми. Метод тензорных функций Грина в реализации *GreenTensor*, напротив, имеет сложность $O(N \cdot N_{\max})$, где N — число слоёв, $N_{\max} = \lceil k_0 a \rceil \cdot 2$ — порядок усечения ряда сферических гармоник; полный расчёт диаграммы рассеяния занимает ~ 1 с (см. таблицу 84). Различие в $2 \dots 4$ порядка по времени и в 10^2 раз по ОЗУ имеет принципиальный, а не технический характер: оно вытекает из аналитического разложения поля по собственным модам сферически симметричного оператора, в котором отсутствует объёмная сетка.

10.20.2 Метод моментов (МоМ) и метод поверхностных интегральных уравнений

МоМ (FEKO Suite, Altair WinFEKO; в отечественной разработке — Антенн.RFLab) сводит трёхмерную задачу к поверхностным интегральным уравнениям и пригоден для металлических объектов сложной формы. Для слоистых диэлектрических сфер, однако, на каждом межслойном разделе поверхностные неизвестные приходится дублировать: для N -слойной линзы получается $2N$ независимых интегральных уравнений, и матрица системы становится плотной с $O((k_0 a)^4)$ элементов. По этой причине МоМ не используется в задачах оптимизации линз Люнеберга и применяется только для сравнения отдельных контрольных точек. *GreenTensor* в этом классе задач даёт замкнутое аналитическое решение через рекуррентный пересчёт направленных импедансов $Z_n^{\leftarrow(l)}$ слой за слоем (см. главу 2, формула (2.26)), без построения и обращения матриц.

10.20.3 Метод стреляющих и отражённых лучей (SBR+) и физическая оптика (ПО)

SBR+ и его расширения с учётом теории дифракции PTD (Physical Theory of Diffraction), UTD (Uniform Theory of Diffraction) и физики ползущих волн CWP (Creeping Wave Physics) реализованы в Ansys HFSS SBR+, FEKO Ray Launching, отечественном ЛОГОС ЭМИ. Они применимы при $k_0 a \gtrsim 10$ и используются преимущественно для оценки ЭПР целей с электрически большими размерами (БПЛА, корпуса автомобилей и кораблей, фермы дорож-

ных светофоров ММО, см. главу 6). Для линз Люнеберга, имеющих умеренные электрические размеры $k_0a = 5 \dots 30$ и существенно неоднородный профиль $\varepsilon(r)$, лучевые приближения дают погрешность $5 \dots 10$ дБ в области главного лепестка и фундаментально не воспроизводят интерференционные минимумы в боковых лепестках (см. раздел 10.16). *GreenTensor* в той же области точен с погрешностью $1 \dots 2$ дБ относительно полноволнового FEM-эталоны и пригоден как для синтеза самой линзы, так и для генерации точного «полоинного» 3D-компонента, который затем встраивается в гибридную FEM+SBR+ схему расчёта системы «антенна на платформе».

10.20.4 Аналитические решения для канонических геометрий

Для отдельных классов сферически симметричных структур (однородный шар Ми, двухслойная диэлектрическая сфера, идеальная линза Люнеберга по закону $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ в континуальном пределе) известны аналитические решения — ряды Ми и их обобщения [87; 166]. Они служат эталоном верификации, но имеют узкую область применения: при произвольной кусочно-постоянной аппроксимации $\varepsilon(r)$ ряд Ми обобщается до рекуррентного пересчёта импедансов, что и составляет ядро метода ТФГ. *GreenTensor*, таким образом, является непрерывным расширением аналитических решений Ми на произвольные многослойные структуры с сохранением аналитической точности.

10.20.5 Сводное сопоставление методов

В таблице 86 систематизированы характеристики перечисленных методов применительно к классу задач «рассеяние плоской ЭМ-волны на многослойной сферической структуре с произвольным профилем $\varepsilon(r)$, $\mu(r)$ при $k_0a \in [1; 30]$ ».

Из таблицы видно, что библиотека *GreenTensor* занимает уникальную нишу: она сохраняет аналитическую точность рядов Ми (эталон верификации) и одновременно обобщает их на произвольное число слоёв с произвольными ε_l , μ_l , оставаясь при этом на $2 \dots 4$ порядка быстрее объёмных сеточных методов. Это делает её безальтернативным инструментом в задачах параметрической оптимизации линз Люнеберга, генерации обучающих выборок для нейросетевых суррогатных моделей (см. раздел 10.4.5) и оперативной верификации полноволновых решений на этапе проектирования.

Таблица 86 — Сопоставление методов электродинамического анализа для многослойных сферических структур

Метод	Сложность	Время для $k_0a = 5\pi$	Точность по гл. лепестку	Область применимости
ТФГ (GreenTensor)	$O(N \cdot N_{\max})$	< 1 с	эталонная	любая многослойная сфера
FEM (HFSS, ЛОГОС ЭМИ)	$O((k_0a)^3)$	15 ... 60 мин	0,3 ... 0,8 дБ	произвольная геометрия
FDTD (CST, XFDTD)	$O((k_0a)^4)$	30 ... 120 мин	0,5 ... 1,0 дБ	широкополосные задачи
МоМ (FEKO)	$O((k_0a)^4)$	20 ... 80 мин	0,5 ... 1,0 дБ	металлические объекты
SBR+ / PO+PTD	$O(k_0a)$	~ 1 мин	5 ... 10 дБ	$k_0a \gtrsim 10$, гладкие тела
Ряды Ми (одно-, двух-слойн.)	$O(N_{\max})$	доли с	эталонная	однородный шар, частный случай

10.21 GreenTensor как библиотека-плагин для отечественных и зарубежных САПР

Архитектура *GreenTensor* [46; 47] с компактным публичным API из двух классов (*RCSCalculator*, *ScatteringCalculator*, см. раздел 10.3) и зависимостью только от стандартного стека Python (NumPy, SciPy, Matplotlib) делает её естественным кандидатом на роль «плагиновой» подсистемы внутри существующих САЕ-решений.

10.21.1 Интеграция с отечественными САЕ: пакет ЛОГОС ЭМИ

Отечественный пакет *ЛОГОС ЭМИ* (РФЯЦ-ВНИИЭФ) предоставляет полноволновой решатель FEM с распределёнными вычислениями и поддержкой кластерных архитектур, ориентированный на задачи импортозамещения в радиотехнической промышленности. Связка *ЛОГОС ЭМИ* $\rightarrow$ *GreenTensor* реализуется через стандартный путь сопряжения: *GreenTensor* играет роль «быстрого аналитического препроцессора» — по заданным целевым характеристикам (диаметр, рабочая частота, число слоёв, желаемое усиление) рассчитывается профиль $\varepsilon_l(r)$ кусочно-постоянной аппроксимации линзы Люнеберга по методике главы 4; полученные параметры экспортируются в формате

JSON и подгружаются скриптом-парсером в проект ЛОГОС в виде набора объёмных диэлектрических слоёв. После этого ЛОГОС ЭМИ выполняет верификационный полноволновой расчёт с учётом эффектов, не описываемых сферически симметричной моделью (наличие облучателя, металлических элементов крепления, монтажной платформы), а *GreenTensor* используется для оперативной проверки сходимости решения по числу слоёв и для регенерации модели при изменении частоты или диаметра.

10.21.2 Интеграция с зарубежными CAE: Ansys, Altair, Dassault Systèmes

Сопряжение *GreenTensor* с пакетом Ansys Electronics Desktop реализовано непосредственно (см. раздел 10.13) через IronPython-скрипты синтеза `SyntesLL_Layers=4_R=5lambda.py` и `SyntesLL_Layers=16_R=5lambda.py`, формирующие 3D-модель линзы автоматически по параметрам, рассчитанным библиотекой. Аналогичный путь интеграции применим к Altair FEKO (через POSTFEKO API на Lua или Python) и Dassault Systèmes CST Microwave Studio (через VBA-макросы или Python 3 wrapper). В каждом из этих случаев *GreenTensor* выступает не как самостоятельное решение, а как «плагин», обеспечивающий преобразование «целевые характеристики $\rightarrow$ многослойная геометрия с заданным $\epsilon_l(r)$ », после чего основной численный решатель целевого пакета выполняет верификацию и доводку.

10.21.3 Интеграция с фреймворками машинного обучения и системами автоматизации

Для задач, описанных в разделе 10.4.5 (нейросетевые суррогатные модели, физически информированные нейронные сети), *GreenTensor* интегрируется напрямую с PyTorch и TensorFlow — через единый Python-интерфейс. Класс `ScatteringCalculator` оборачивается в `torch.nn.Module` и используется для онлайн-генерации обучающих пар $(\{\epsilon_l, a_l\}, \sigma(\theta, \varphi))$ во время обучения сети; такое замкнутое решение существенно расширяет применимость метода за пределы традиционных САПР-оболочек.

Открытый исходный код [46], документация на платформе *Read the Docs* [48] и сайт *greentensor.ru* [47] с публичными примерами расчётов обеспечивают вос-

производительность результатов и низкий порог входа для инженеров.

10.21.4 Веб-сервис *greentensor.ru*: интерактивный расчётный движок

В отличие от типичных академических лендингов, посвящённых открытой научной библиотеке и ограниченными описанием, документацией и ссылкой на репозиторий, на сайте проекта *greentensor.ru* [47] развёрнут полнофункциональный *интерактивный расчётный движок*, выполняющий вычисления непосредственно в браузере пользователя без установки Python-окружения и без серверной обработки приватных данных. Движок реализован в виде встроеного на одностраничный сайт калькулятора: пользователь задаёт параметры многослойной сферической линзы (число слоёв, радиус, профиль $\varepsilon_l(r)$, рабочую частоту, тип облучателя), нажимает кнопку расчёта и получает диаграмму рассеяния, диаграмму направленности, интегральные сечения $\sigma_s, \sigma_r, \sigma_f, \sigma_a, \sigma_p$ и направленность вперёд D_f за единицы секунд. Расчётное ядро — ровно та же библиотека *GreenTensor*, что описана в разделах 10.3–10.4, скомпилированная в WebAssembly при помощи Pyodide и подгружаемая в браузер пользователя одним обращением.

Помимо расчёта одиночной сферической линзы, интерактивный движок (*GreenTensor Studio*, доступен по адресу greentensor.ru/studio.html) содержит набор *эталонных задач* — преднастроенных шаблонов, среди которых формирование косекансной ($\text{cosec}^2(\theta)$) диаграммы направленности. Выбрав в списке шаблон «Полусфера: косеканс-квадратная (cosec^2) ДН» и антенный режим («полусфера на РЕС-экране» либо сфера с группой облучателей на направляющей дуге), пользователь задаёт наклон облучателя θ' или амплитудно-фазовое распределение группы и получает трёхмерную косекансную ДН непосредственно в браузере (рисунок 10.12). Тем самым оба технических решения формирования косекансной ДН, предложенные в разделе 7.3 (полусферическая ЛЛ на проводящем экране и сферическая ЛЛ с переключаемой системой облучателей), доступны для независимой интерактивной проверки любым пользователем без установки ПО.

Такая архитектура (offline-first, без необходимости развёртывания сервера) даёт три новых эксплуатационных свойства, недоступных при работе с библиотекой «из коробки»: (а) нулевой порог входа — инженер, не работающий

с Python, может оценить характеристики линзы Люнеберга для своей задачи прямо в браузере, без установки окружения и компиляции зависимостей; (б) воспроизводимость — любой результат, представленный в диссертации (например, сечения рассеяния восьмислойной оптимизированной линзы из положения 5 на защиту), может быть мгновенно перепроверен независимым пользователем по той же кодовой базе, без сборки и без серверной инфраструктуры с её закрытым исходным кодом; (в) приватность данных — параметры линзы и результаты расчётов остаются на стороне пользователя и не передаются на серверы автора, что важно для применения в инженерных задачах с ограничениями по защите коммерческой и государственной тайны. Подробное описание интерфейса, входных параметров, выходных данных и типовых сценариев работы с интерактивным расчётным движком приведено в приложении Д.

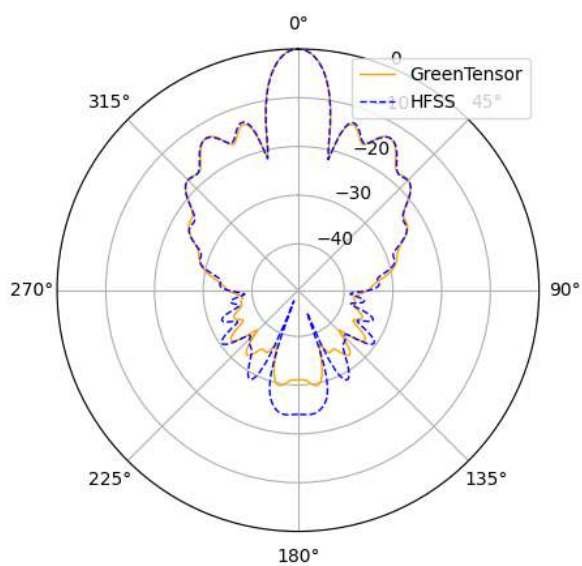
Таким образом, *GreenTensor* проектировалась не как замкнутое автономное приложение, а как переиспользуемая аналитическая библиотека, совместимая с экосистемами существующих отечественных и зарубежных САПР, фреймворков машинного обучения и научных Python-стеков; этот аспект существенно расширяет область её практического применения и устраняет барьер интеграции, типичный для академического узкоспециализированного программного обеспечения.

10.22 Выводы по главе

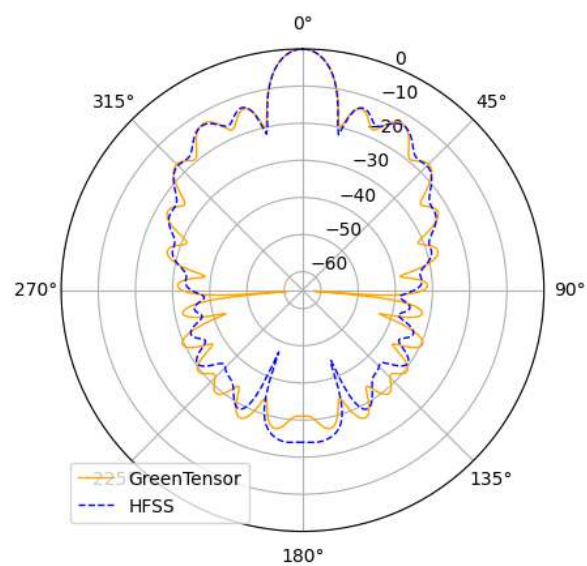
В настоящей главе математический аппарат тензорных функций Грина, разработанный в главах 2–8, доведён до уровня законченного программно-аппаратного комплекса. Разработана и верифицирована библиотека *GreenTensor* с API-классами *RCSCalculator* и *ScatteringCalculator*; проведена систематическая верификация на задачах рассеяния и дифракции с сопоставлением с FEM Ansys HFSS и SBR+; физически объяснены остаточные расхождения в области обратного излучения; выполнена интеграция с Ansys Electronics Desktop через IronPython-скрипты; сформированы инфраструктура воспроизводимой верификации и суррогатные возможности для нейросетевого инверсного дизайна. Полученные инструменты замыкают методологическую цепочку диссертации — от исходной постановки задачи (глава 1) через аналитический аппарат (глава 2), задачи дифракции и антенного синтеза (главы 3–7) и практическую реализацию 3D-печатью (глава 8) — к законченному комплексу, пригодному для промыш-

ленного использования.

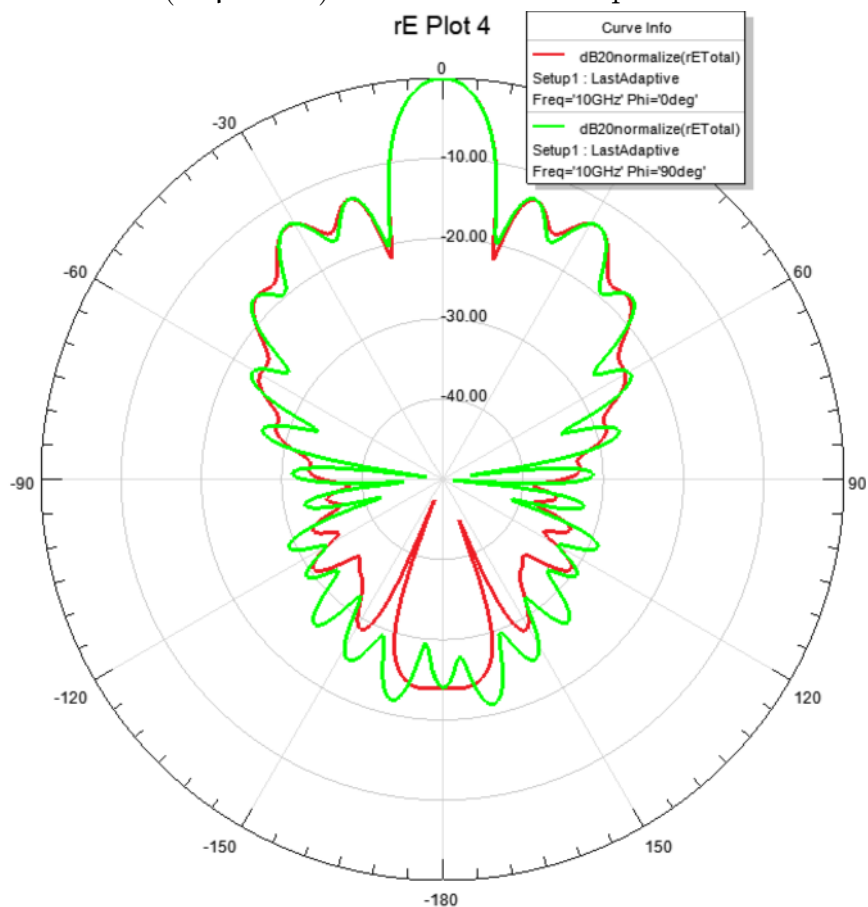
Ключевой вывод главы. Открытая Python-библиотека *GreenTensor* с классовым API *RCSCalculator* (одночастотный анализ диаграммы рассеяния и ЭПР) и *ScatteringCalculator* (параметрический свип $\sigma(k_0 a)$), верифицированная на серии канонических задач сопоставлением с Ansys HFSS ($\Delta\theta_{-3} \leq 0,6^\circ$, $\Delta\text{УБЛ} \leq 1$ дБ) при ускорении расчёта в $10^2 \dots 10^4$ раз, реализует полный программно-аппаратный комплекс для синтеза, анализа и оптимизации многослойных сферических линзовых структур, пригодный как самостоятельный исследовательский инструмент и как генератор обучающих выборок для нейросетевых суррогатных моделей в инверсном дизайне — содержание **второго положения**, выносимого на защиту.



а) Диаграмма рассеяния на четырёхслойной ЛЛ ($E\varphi = 0^\circ$)

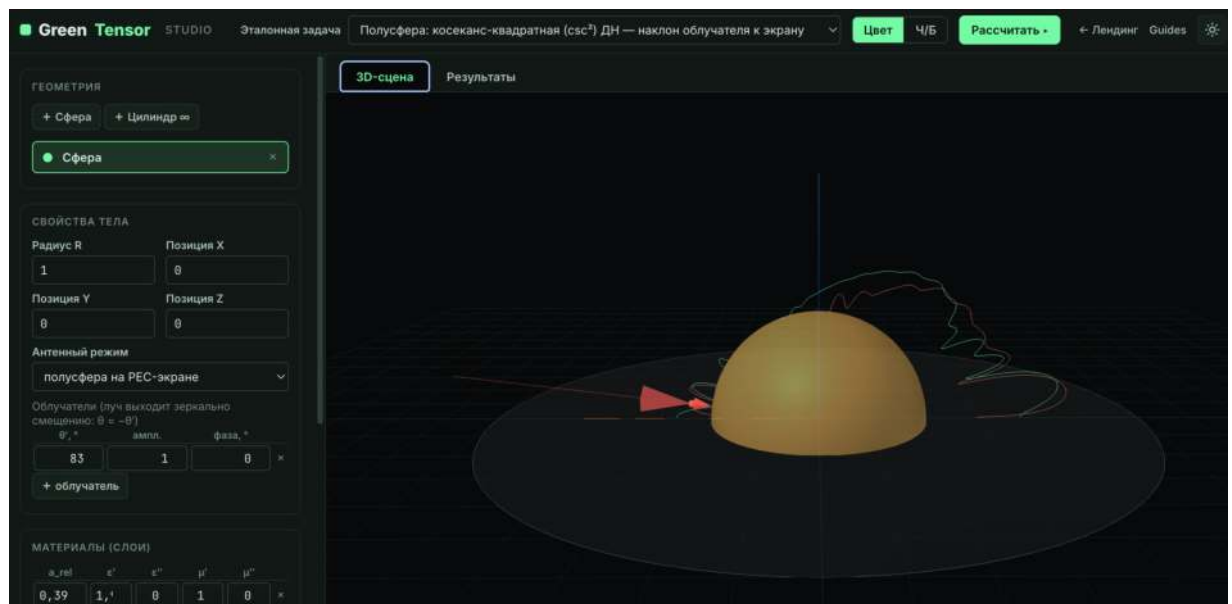


б) Диаграмма рассеяния на четырёхслойной ЛЛ ($E\varphi = 90^\circ$)

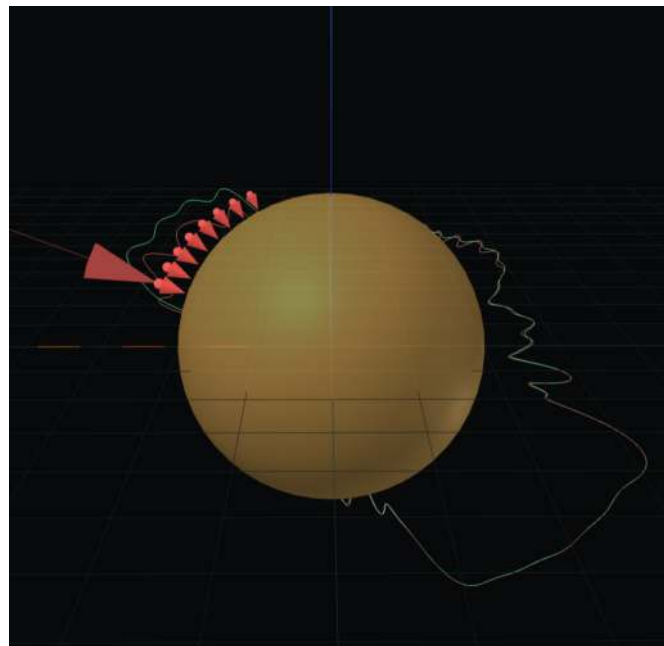


в) Рассеяние на ЛЛ, результаты, полученные методом FEM в Ansys HFSS

Рисунок 10.11 — Диаграммы рассеяния на четырёхслойной ЛЛ, сравнение методов FEM и ТФГ



а) Эталонная задача «полусфера на PEC-экране»: выбор шаблона, антенного режима и параметров облучателя ($\theta' = 83^\circ$)



б) Сфера с группой облучателей на направляющей дуге и синтезированная трёхмерная косекансная ДН

Рисунок 10.12 — Формирование косекансной $\text{cosec}^2(\theta)$ диаграммы направленности в интерактивном веб-движке *GreenTensor Studio* (greentensor.ru/studio.html): (а) эталонная задача «полусфера на PEC-экране» — интерфейс с выбором шаблона, антенного режима и параметров облучателя; (б) сфера с группой облучателей на дуге и рассчитанная трёхмерная косекансная ДН

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

В диссертации выполнено систематическое исследование принципов анализа и синтеза неоднородных сферических линз Люнеберга — классических устройств для управления фронтом электромагнитной волны, обеспечивающих фокусировку и пространственное перераспределение излучения за счёт градиента диэлектрической проницаемости. Работа охватывает полную цепочку от теоретического аппарата тензорных функций Грина до программной реализации, практического изготовления многослойных линз методом 3D-печати и их применения в антенных системах миллиметрового и сантиметрового диапазонов.

В теоретической части рассмотрены различные профили проницаемости — классический закон Люнеберга, его дискретные приближения (равношаговая и оптимизированная стратификация), а также обобщения, учитывающие ограниченный диапазон реализуемых значений ϵ . Для задач дифракции и антенного синтеза на единой методической основе — аппарате ТФГ для многослойной сферы — получены замкнутые выражения для полей в ближней и дальней зонах, диаграмм рассеяния и направленности, эффективной площади рассеяния, коэффициентов поляризационных потерь и развязки между каналами.

Разработаны алгоритмы оптимизации параметров слоистой аппроксимации при ограниченном числе слоёв, обеспечивающие максимальное приближение характеристик дискретной линзы к идеальному непрерывно-градиентному профилю. Установлены технические ограничения, налагаемые на периоды решёток первичных облучателей при работе в моноимпульсном и многолучевом режимах. Для полусферической линзы на проводящем экране, тороидной линзы и линзы с металлическим ядром получены расчётные характеристики, подтверждающие возможность формирования диаграмм направленности специального вида (косекансные $\cos^2(\theta)$, панорамные 360°) и их применимость в радиолокации, сетях 5G/6G и системах дистанционного зондирования.

Практическая реализация линз Люнеберга разработана на базе технологии FDM-печати полимерами HIPS, PLA, PETG и пенопласта с управляемой пористостью, а также методом кубической перфорации сплошного диэлектрика. Для синтеза дискретного профиля применены логарифмическая модель

смесей (формула Лихтенекера) и верификация методом NRW. Достигнутые отклонения расчётного и реализованного профилей $\varepsilon(r)$ не превышают 2–3% в диапазоне $1 \leq \varepsilon \leq 2$, что подтверждено серией макетов диаметром 50, 73 и 130 мм.

Полученные результаты пригодны для проектирования широкополосных многолучевых антенн, радиолокационных станций кругового и сканирующего обзора, пассивных отражателей радиозаметности, а также компонентов беспроводной связи миллиметрового диапазона; предложенные методы и модели представляют также интерес для развития метаматериальных и фотонных структур управляемого градиента показателя преломления.

Разработана и введена в практику открытая программная библиотека **GreenTensor** [46], реализующая метод тензорных функций Грина для расчёта волновых процессов в сферически-симметричных неоднородных средах. Библиотека обеспечивает эффективное вычисление компонент поля в многослойных сферических и полусферических структурах с произвольным профилем $\varepsilon(r)$, поддерживает пакетную обработку частотных диапазонов, параметрическую оптимизацию слоёв и визуализацию пространственного распределения поля; её модульная архитектура позволяет интегрировать библиотеку в более крупные расчётные комплексы, включая фреймворки машинного обучения.

Библиотека прошла систематическую верификацию на канонических тестовых задачах (металлические сферы, многослойные ЛЛ, сферы с диэлектрическим укрытием) с сопоставлением результатов с аналитическими эталонами и полноволновыми расчётами в Ansys HFSS. Расхождение по ширине главного лепестка диаграммы не превышает $0,6^\circ$, по уровню первого бокового лепестка — 1 дБ, при сокращении машинного времени в $10^2 \dots 10^4$ раз. Тем самым **GreenTensor** представляет собой одновременно учебный и исследовательский инструмент, пригодный в том числе для построения суррогатных нейросетевых моделей при инверсном дизайне линзовых и антенных систем.

Наиболее существенные научные и практические результаты диссертации сводятся к следующему.

1. На единой методической основе — аппарате тензорных функций Грина для многослойной сферы — разработан подход к оптимизированной дискретизации профиля диэлектрической проницаемости линзы Люнеберга, учитывающий как физические ограничения реализуемых материалов, так и требования вычислительной устойчивости.

- Получены количественные критерии выбора числа слоёв и схемы стратификации, при которых характеристики дискретной линзы приближаются к идеальному непрерывному профилю без значительного усложнения конструкции.
2. Проведено систематическое численное исследование поля в многослойных сферических и полусферических структурах с использованием разработанной библиотеки **GreenTensor**, результаты верифицированы сопоставлением с аналитическими решениями и с расчётами в Ansys HFSS. Установлено, что погрешность расчёта основных характеристик антенной системы не превышает $0,6^\circ$ по ширине главного лепестка и 1 дБ по уровню первого бокового лепестка.
 3. Показано, что корректный выбор схемы дискретизации проницаемости позволяет существенно снизить уровень боковых лепестков и обеспечить требуемую фокусировку волн, а также сохранить устойчивость характеристик линзы к допустимым технологическим отклонениям параметров материала. Предложенная методика применена к сферическим, полусферическим и тороидным конфигурациям линзы, что расширяет её применимость на задачи с панорамным обзором без механического сканирования.
 4. Разработана, верифицирована и интегрирована с программной средой Ansys Electronics Desktop открытая библиотека **GreenTensor**, реализующая метод тензорных функций Грина в сферических координатах. Модульная архитектура библиотеки обеспечивает расширяемость и включение в более крупные расчётные комплексы, а связка «аналитический синтез $\rightarrow$ численная верификация» с HFSS через IronPython-скрипты сокращает цикл проектирования линзовой антенны с недель до единичных часов. Библиотека пригодна как для численного анализа, так и в качестве основы для автоматизированного синтеза радиочастотных и оптических устройств на базе линз Люнеберга и их модификаций.
 5. Разработан метод декомпозиции произвольной электродинамической структуры на канонические подобласти трёх типов (плоско-, цилиндрические и сферо-слоистые) с замкнутым аппаратом сшивания тангенциальных компонент электромагнитного поля на интерфейсах разной координатной симметрии. Получены ядра преобразования модальных базисов в трёх типах сшивания (плоскость $\leftrightarrow$ сфера, сфера $\leftrightarrow$ цилиндр,

- цилиндр $\leftrightarrow$ плоскость) на основе теорем сложения Релея–Гордона, Генбауэра–Графа и Якоби–Ангера–Графа соответственно; все три типа свивания приведены к единой алгебраической форме блочной системы линейных уравнений, что обеспечивает универсальность программной архитектуры. Метод реализован автором в виде самостоятельного Python-модуля **decomposition** (приложение А.2); корректность реализации диагональных блоков подтверждена тремя верификационными тестами: воспроизведением формул Френеля одиночной границы с точностью $3,9 \cdot 10^{-16}$ (машинная), классического ряда Ми однородной диэлектрической сферы с экспоненциальным затуханием хвоста до $\sim 10^{-18}$, многослойной аппроксимации линзы Люнеберга со сходимостью ряда до $\sim 10^{-22}$. Метод замыкает методологическую программу школы Б. А. Панченко в едином декомпозиционном инструменте, применимом в качестве алгоритмической базы для последующего расширения библиотеки *GreenTensor* на произвольные комбинированные геометрии.
6. Расширен класс модифицированных сферических линз новыми импедансно-согласованными конфигурациями: магнетодиэлектрической линзой Люнеберга с равенством профилей $\epsilon(r) = \mu(r)$, обеспечивающей тождественное обнуление обратного сечения рассеяния $\sigma_r \leq 10^{-25} \pi a^2$; сферическими рассеивателями с радиопоглощающими покрытиями ZIK 51-2190 и ZIK 51-2191, рассчитанными по экспериментальным $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$ на четырёх рабочих частотах; сферическими метаматериальными структурами с отрицательным коэффициентом преломления $\epsilon = \mu < 0$, для которых численно установлен сферический аналог эффекта Пендри — локализация плотности ближнего поля внутри ЛН-сферы с $|E|_{\max}^2 \approx 473$. Полученные конфигурации образуют единую методическую базу управления радиозаметностью объектов в радио- и СВЧ-диапазонах. Шестикоэффициентный аппарат школы Б. А. Панченко $(\sigma_s, \sigma_r, \sigma_p, \sigma_f, \sigma_a, D_f)$, ранее систематически применявшийся к цилиндрическим и плоским структурам, замкнут на сферическом случае: получены систематизации интегральных характеристик восьми-слойной оптимизированной линзы в широком диапазоне $k_0 a \in [0; 25]$.
 7. Синтезирован класс градиентных линз-дефлекторов: получено замкнутое аналитическое решение $n^{1+\nu} + n^{1-\nu} = 2a/r$ ($\nu = \pi/\alpha$) для профиля, отклоняющего параллельный пучок на произвольный наперёд за-

данный угол $\alpha \in (0; \pi)$ независимо от прицельного параметра; классическая линза Итона входит в класс как предельный случай $\alpha \rightarrow \pi$.

Итоги выполненного исследования. Полученные в работе результаты объединяются в замкнутую методологическую цепочку «теория — аппроксимация — конструкция — программный комплекс — антенные и радиолокационные приложения», ранее в литературе по линзовым антеннам не воспроизводившаяся в едином аппарате. Развитый на основе тензорных функций Грина расчётный метод и его декомпозиционное обобщение на произвольные кусочно-координатные геометрии, замыкающее методологическую программу школы Б. А. Панченко по триаде «плоскость — цилиндр — сфера» (положение 1), переведены в форму открытого Python-инструмента (положение 2), систематически верифицированного по трём независимым направлениям и обеспечивающего сокращение машинного времени на 2–4 порядка относительно конечно-элементного решения при сопоставимой точности; на этой расчётной базе получен замкнутый аналитический синтез линз-дефлекторов (положение 3), исследованы и количественно охарактеризованы новые классы модифицированных сферических конфигураций (положение 4) и предложена методика выбора оптимального многослойного профиля под ограничения FDM-3D-печати с учётом поляризационных потерь (положение 5). Тем самым в диссертации **решена крупная научная проблема** развития теории и техники антенн в части электродинамики и проектирования сферических градиентных линзовых структур; совокупность пяти положений составляет связный научный результат, существенно развивающий прикладную электродинамику сферически-стратифицированных сред и теорию линзовых антенн.

Рекомендации по практическому использованию. Полученные методы и программные средства непосредственно применимы при проектировании ряда классов современной радиоаппаратуры: (а) многолучевых линзовых антенн миллиметрового диапазона для базовых станций сетей 5G/6G и спутниковой связи, где количественная оценка ускорения параметрической оптимизации в $10^2 \dots 10^4$ раз переводит задачу синтеза многослойной линзы из категории трудоёмкой в инженерно-практическую; (б) пассивных формирователей диаграмм специального вида ($\operatorname{cosec}^2(\theta)$, многолучевых, 360° -панорамных) для радиолокационных систем кругового обзора без механического сканирования; (в) пассивных ЭПР-маркеров и линз-дефлекторов для управления

радиолокационной заметностью объектов; (г) импедансно-согласованных рассеивателей и метаматериальных структур для подавления обратного рассеяния в задачах ЭМС и средств защиты радиолокационных целей. Методика стратификации с явным учётом ограничений FDM-3D-печати обеспечивает воспроизводимое изготовление линз стандартными слайсерами без аппаратных модификаций, что критично для серийного производства. Разработанная библиотека **GreenTensor** рекомендуется к использованию как самостоятельный исследовательский и учебный инструмент, как «плагиновая» аналитическая подсистема внутри существующих экосистем электродинамического моделирования (Ansys Electronics Desktop, отечественный пакет *ЛОГОС ЭМИ* РФЯЦ-ВНИИЭФ, Altair FEKO, CST Microwave Studio), а также как генератор обучающих выборок для построения нейросетевых суррогатных моделей в задачах инверсного дизайна радиочастотных и оптических устройств.

Перспективы дальнейшей разработки темы. Развитие методологического и программного аппарата работы видится в шести направлениях. Во-первых, расширение декомпозиционного инструмента (положение 1) за пределы трёх диагональных блоков — на полностью комбинированные сферо-цилиндрические и сферо-плоские геометрии (например, сфера на проводящем экране с цилиндрическим облучателем-волноводом, тороидная линза с плоским металлическим основанием), что переводит метод в класс универсальных решателей для антенно-фидерных трактов с произвольной канонической топологией. Во-вторых, интеграция аналитического ядра **GreenTensor** с алгоритмами машинного обучения — использование библиотеки в качестве быстрого «оракула» при обучении графовых и трансформерных нейросетей, способных к инверсному синтезу градиентных сред под наперёд заданные характеристики. В-третьих, перенос метода ТФГ из радиочастотной области в оптический и инфракрасный диапазоны для проектирования градиентных микро- и нанооптических элементов (метаповерхности, фотонные линзы, оптические ОАМ-формирователи) с учётом дисперсионных свойств реальных материалов. В-четвёртых, экспериментальная валидация магнетодиэлектрических и метаматериальных конфигураций (положение 4) на физических макетах — подтверждение предсказанных эффектов локализации поля в ЛН-средах и обнуления обратного рассеяния в импедансно-согласованных конфигурациях; разработка композитов с одновременным управлением $\epsilon(r)$ и $\mu(r)$ методами FDM-печати с вкраплением магнитных порошков. В-пятых, обобщение методики оптимиза-

ции (положение 5) на многокритериальные задачи с одновременным учётом массогабаритных ограничений, тепловой стойкости и стоимости материалов, что необходимо для перехода от лабораторного макета к серийному изданию. В-шестых, переход от пассивного управления полем к активному (реконфигурируемому) — дополнение градиентных структур перестраиваемыми и управляемыми средами (жидкокристаллические включения, варакторные и PIN-диодные коммутаторы, сегнетоэлектрические и фазопеременные материалы) для электронного управления лучом и динамической перестройки профиля показателя преломления без механического перемещения облучателя.

Главный итог диссертации. Класс сферически-симметричных градиентных линзовых антенн — начиная с классической линзы Люнеберга и заканчивая её модифицированными по форме, по граничным условиям и по материалу конфигурациями (полусфера на проводящем экране, тороид, линза с центральным металлическим ядром, магнетодиэлектрик, сферические метаматериалы и поглощающие покрытия) — получает в настоящей работе единое, замкнутое и проверяемое описание: единое — через сквозной аппарат тензорных функций Грина и его декомпозиционное обобщение на произвольные кусочно-координатные структуры; замкнутое — через цепочку «теория → аппроксимация → конструкция → программный инструмент → лабораторный макет», ни одно звено которой не выходит за пределы диссертации; проверяемое — через систематическую трёхступенчатую верификацию (математическая строгость + сопоставление с FEM в Ansys HFSS + независимая программная и экспериментальная апробация). Этот результат переводит сферические градиентные линзы из категории «нишевый класс антенн с неудобным расчётом» в категорию инженерно-проектируемых компонентов современных радиосистем; разработанная программная библиотека **GreenTensor** обеспечивает доступность этого инструмента широкому сообществу исследователей и инженеров, а методика стратификации под FDM-3D-печать — его прямую технологическую реализуемость без аппаратных модификаций печатного оборудования.

В заключение автор выражает благодарность и признательность научному консультанту, доктору технических наук, доценту В.Я. Носкову за поддержку на завершающем этапе работы, обсуждение результатов и научное руководство, а также памяти доктора технических наук, профессора, заслуженного деятеля науки Российской Федерации Б.А. Панченко, под руководством которого было выполнено большинство представленных в диссертации ис-

следований. Особую благодарность автор выражает представителям научной школы теории и техники антенн Уральского радиофака — доктору технических наук С. Н. Шабунину, кандидату технических наук, доценту Ю. Е. Мительману и доктору технических наук С. Т. Князеву — за вклад в развитие этой школы, многолетние наработки которой послужили основой настоящего исследования, ставшего их естественным продолжением и ответвлением. Автор благодарит коллег по научной школе прикладной электродинамики М. Г. Гизатуллина и Е. В. Комарову за совместные исследования и преемственность в работе. Отдельная благодарность выражается коллективу аспирантов и магистрантов УрФУ, принимавшим участие в апробации библиотеки *GreenTensor* и экспериментальных макетов линз Люнеберга, а также авторам шаблона Russian-Phd-Latex-Dissertation-Template за многолетнюю поддержку оформительской части русскоязычных диссертаций.



Д. В. Денисов

Список сокращений и условных обозначений

λ	длина волны, см. (2.24)
$k_0 = 2\pi/\lambda$	волновое число, см. (2.24), стр. 105
$\left. \begin{matrix} M_n \\ N_n \end{matrix} \right\}$	коэффициенты сред, определяющие тип источника, стр. 105
E_0	амплитуда падающего поля
j	тип функции Бесселя
L	общее число слоёв
l	номер слоя внутри стратифицированной сферы
μ	магнитная проницаемость в вакууме
$\theta_{\text{БЛ}}$	угловое положение бокового лепестка диаграммы направленности, град.
ε	диэлектрическая проницаемость в вакууме
$\vec{a}$	единичный вектор
f	частота электромагнитного излучения
r', θ', φ'	полярные координаты точки источника (штрихованные)
r, θ, φ	полярные координаты точки наблюдения
ADAS	advanced driver assistance systems, системы помощи водителю
BEM	boundary element method, метод граничных элементов
CST	CST Microwave Studio, программный пакет электродинамического моделирования
FDM	fused deposition modeling, моделирование методом наплавления
FDTD	finite difference time domain, метод конечных разностей во временной области
FEM	finite element method, метод конечных элементов
FIT	finite integration technique, метод конечных интегралов
FMM	fast multipole method, быстрый метод многополюсника
HFSS	high frequency structure simulation, высокочастотный структурный симулятор
HIPS	high impact polystyrene, ударопрочный полистирол
LE, LM	longitudinal electric / longitudinal magnetic, продольно-электрические и продольно-магнитные волны
LH	left-handed medium, левосторонняя (метаматериальная) среда, $\varepsilon < 0$, $\mu < 0$

LL, ЛЛ	Luneburg Lens, линза Люнеберга
MIMO	Multiple Input Multiple Output, многоканальная система с несколькими входами и выходами
MOGA	Multiple-Objective Genetic Algorithm, многокритериальный генетический алгоритм
NRW	Nicolson–Ross–Weir, метод определения проницаемости по коэффициентам отражения и прохождения
PEC	perfect electric conductor, идеально проводящая поверхность
PETG	polyethylene terephthalate glycol-modified, гликольмодифицированный полиэтилентерефталат
PLA	polylactic acid, полилактид (термопластик для 3D-печати)
RCS, ЭПР	radar cross section, эффективная площадь рассеяния
RH	right-handed medium, правосторонняя среда, $\epsilon > 0$, $\mu > 0$
RMSE	root mean square error, среднеквадратичное отклонение
SBR	Shooting and Bouncing Rays, метод вычислительной электродинамики, основанный на трассировке лучей
TE, TM	transverse electric / transverse magnetic, поперечно-электрические и поперечно-магнитные волны
TGF, ТФГ	Tensor Green Function, метод тензорных функций Грина
ZIK	марка радиопоглощающего материала (ZIK 51-2190, ZIK 51-2191)
БПЛА	беспилотный летательный аппарат
ДН	диаграмма направленности
КНД	коэффициент направленного действия
КУ	коэффициент усиления
МКЭ	метод конечных элементов
ОКР	опытно-конструкторская работа
ПБЛ	первый боковой лепесток диаграммы направленности
ПВО	противовоздушная оборона
РЛС	радиолокационная станция
РПМ	радиопоглощающий материал
СВЧ	сверхвысокие частоты
СЛАУ	система линейных алгебраических уравнений
УБЛ, ЛБЛ	уровень бокового лепестка диаграммы направленности
ФАР	фазированная антенная решётка
ЭВМ	электронная вычислительная машина
ЭМС	электромагнитная совместимость

Единицы измерения и словарь терминов

Основные и наиболее распространённые единицы измерения для описания физических величин, используются для решения задач в классической электродинамике, включая анализ электромагнитных полей, расчёт емкостей, индуктивностей, характеристик рассеяния и направленности антенн (табл. 87).

Таблица 87 — Единицы измерения в электродинамике

Название, обозначение	Система СИ
Электрическое поле, E	Вольт на метр, (В/м)
Магнитное поле, H	Ампер на метр, (А/м)
Магнитная индукция, B	Тесла, (Т)
Диэлектрическая проницаемость, ϵ	Фарада на метр, (Ф/м)
Магнитная проницаемость, μ	Генри на метр, (Гн/м)
Сила тока, I	Ампер, (А)
Электрический заряд, Q	Кулон, (Кл)
Электрический потенциал, V	Вольт, (В)
Мощность, P	Ватт, (Вт)
Энергия, W	Джоуль, (Дж)
Импеданс среды, Z	Ом, (Ω)
Индуктивность, L	Генри, (Гн)
Емкость, C	Фарад, (Ф)
Скорость света, c	Метр в секунду, $\approx 3 \cdot 10^8$ (м/с)
Плотность заряда, ρ	Кулон на кубический метр, (Кл/м ³)
Плотность потока энергии (Вектор Умова-Пойнтинга), S	Ватт на квадратный метр, (Вт/м ²)
Электрическая индукция, D	Кулон на квадратный метр, (Кл/м ²)
Плотность электрического тока, j	Ампер на квадратный метр, (А/м ²)
Адмитанс (полная проводимость), Y	Сименс, (См)
Частота, f	Герц, (Гц)
Круговая частота, ω	РадIAN в секунду, (рад/с)
Длина волны, λ	Метр, (м)
Волновое число, k	РадIAN на метр, (рад/м)
Показатель преломления, n	Безразмерная величина
Эффективная площадь рассеяния (ЭПР), σ	Квадратный метр, (м ²)
Коэффициент усиления, G (КНД)	Децибел, (дБ); безразмерная
Плоский угол, θ , φ	Градус, (°); радиан, (рад)

Линза Люнеберга (ЛЛ) — это тип сферической диэлектрической

линзы, которая обладает уникальными электромагнитными свойствами с возможностями фокусировать электромагнитные волны на противоположной стороне линзы независимо от угла падения волны. Это свойство достигается за счёт плавного изменения показателя преломления внутри линзы, который уменьшается от центра к поверхности. ЛЛ широко используются в антенных системах, радарах и беспроводных устройствах связи.

Закон Люнеберга : выражение, описывающее фокусирующие свойства ЛЛ (1.1).

GreenTensor : библиотека с открытым исходным кодом на базе тензорных функций Грина, разработанная автором диссертационной работы.

Модифицированная ЛЛ : линза Люнеберга с измененной геометрией (полусфера или четверть сферы), имеющая измененные показатели преломления с отклонениями от классического закона Люнеберга (1.1).

Линза Максвелла — это тип градиентной линзы, в которой показатель преломления плавно изменяется в зависимости от расстояния до центра, что обеспечивает фокусировку электромагнитных волн по особым траекториям. Конструкция этой линзы основывается на решениях уравнений Максвелла и является примером устройства с градиентной оптикой, где показатель преломления $n(r)$ меняется в зависимости от радиуса r .

Тензорные функции Грина (ТФГ) в электродинамике — это комплекс математических инструментов, которые используются для решения задач, связанных с распространением электромагнитных волн в сложных средах. Набор инструментов представляет собой решения *уравнений Максвелла* для электромагнитных полей в виде тензорных выражений. Эти функции описывают реакцию системы на точечный источник, учитывая как скалярные, так и векторные компоненты полей.

Точечный источник электромагнитного поля — это идеализированная модель источника, который излучает электромагнитные волны из одной точки в пространстве. Его размеры настолько малы, что их можно считать пренебрежимо малым по сравнению с длиной волны излучаемого поля. В задачах электродинамики такие источники используются для упрощения анализа сложных систем, так как позволяют рассматривать излучение и распространение волн в различных средах, основываясь на решениях уравнений Максвелла для бесконечно малых объёмов пространства.

Граничное условие (ГУ) : в HFSS (High Frequency Structure Simulator)

граничные условия используются для определения поведения электромагнитных полей на границах различных материалов или структур. Граничные условия задают поведения полей на границе раздела различных материалов или областей. 1.4

HFSS (High Frequency Structure Simulator) – Программа для моделирования электромагнитных структур на высоких частотах.

Finite Element Method (FEM) : численный метод, используемый для анализа электромагнитных полей и связанных с ними структур на высоких частотах. В рамках метода FEM структура разбивается на множество маленьких конечных элементов, в пределах которых электромагнитные поля аппроксимируются с помощью базисных функций. Затем решение уравнений Максвелла находится путём численного интегрирования по всей структуре на основе свойств этих конечных элементов.

Shooting and Bouncing Rays (SBR) : метод вычислительной электромагнетики, основанный на трассировке лучей. В HFSS реализован метод SBR+, «плюс» в названии которого говорит о включении дополнительной физики в этот метод:

- физическая теория дифракции (PTD, Physical Theory of Diffraction) с коррекцией краевых токов;
- единая теория дифракции (UTD, Uniform Theory of Diffraction) учёт эффектов дифракции на краях геометрии;
- физика ползучих волн (CWP, Creeping Wave Physics).

IE (Integral Equation) – Интегральное уравнение. Это метод, использующий интегральные представления электромагнитных полей для анализа, особенно эффективен для задач с открытыми границами.

MoM (Method of Moments) – Метод моментов. Это численный метод для решения интегральных уравнений в электродинамике, применяемый, например, для анализа рассеяния.

BOR (Body of Revolution) метод в электродинамике — это численный метод расчёта электромагнитных полей для объектов, обладающих осевой симметрией, при котором задача трёхмерного моделирования сводится к двумерной за счёт вращения геометрии и полей вокруг оси симметрии [87].

DRA (Dielectric Resonator Antenna) – Диэлектрическая резонаторная антенна. Это тип антенны, использующей диэлектрический резонатор для создания электромагнитных колебаний.

PML (Perfectly Matched Layer) – Идеально согласованный слой. Это искусственная поглощающая граница, которая минимизирует отражения при моделировании открытых границ.

PEC (Perfect Electric Conductor) – Идеальный проводник. Это граница или материал, который рассматривается как абсолютно проводящий.

PMC (Perfect Magnetic Conductor) – Идеальный магнитный проводник. Аналог PEC, но для магнитного поля. Используется как условие симметрии в электромагнитных симуляциях.

Radiation Boundary – Граничные условия излучения. Используются для моделирования бесконечных пространств, где электромагнитные волны могут распространяться в направлении наружу без отражений обратно.

MIMO (Multiple Input Multiple Output) – технология беспроводной связи, использующая несколько передающих и принимающих антенн для повышения пропускной способности канала и устойчивости сигнала без увеличения ширины полосы частот. *MIMO* обеспечивает пространственное мультиплексирование, благодаря которому возможно одновременное передача и прием нескольких потоков данных через один и тот же радиоканал.

SNR (Signal-to-Noise Ratio) — отношение мощности сигнала к мощности шума в канале связи. Этот параметр характеризует качество принимаемого сигнала и выражается либо в виде безразмерного отношения, либо в децибелах (дБ). Чем выше значение SNR, тем лучше различим сигнал на фоне шума, и тем выше потенциальная достоверность передачи информации.

Eigenmode – Собственная мода. Это решение задачи о собственных значениях, которая определяет собственные частоты и моды колебаний структуры.

RCS (Radar Cross Section) – Эффективная площадь рассеяния. Мера того, насколько объект отражает радиоволны, что важно в анализе радиолокационных систем.

Оптимизированная аппроксимация профиля линзы Люнеберга — это способ замены идеального непрерывного распределения диэлектрической проницаемости в линзе Люнеберга на приближённое, дискретное или реализуемое на практике, с минимальными потерями в её функциональности (например, фокусировке волн или формировании направленного излучения).

Равношаговая аппроксимация профиля линзы Люнеберга — это способ приближения её непрерывного радиального профиля диэлектрической проницаемости путём разбиения линзы на концентрические слои одинаковой

толщины (то есть с равным «шагом» по радиусу), и присвоения каждому слою среднего или характерного значения диэлектрической проницаемости в соответствии с законом (1.1).

Список литературы

1. Analysis of modern methods and means of technical implementation of Luneberg lens [Текст] / Y. U. G. Pasternak [et al.] // Antennas. — 2022. — URL: <http://radiotec.ru/en/journal/antennas/number/2022-2/article/21239>.
2. Денисов, Д. В. Способы реализации и применение современных линзовых антенных систем [Текст] / Д. В. Денисов, А. А. Тангамян // Современные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций : материалы XVI международной научно-технической конференции. — Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2020. — С. 85—86. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44620055>.
3. Хансен, Р. С. Сканирующие антенные системы СВЧ [Текст]. Т. 1 / Р. С. Хансен. — М. : Советское радио, 1966. — пер. с англ., ред. Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин.
4. Жук, М. С. Проектирование линзовых, сканирующих, широкодиапазонных антенн и фидерных устройств [Текст] / М. С. Жук, Ю. Б. Молочков. — М. : Энергия, 1973. — С. 493.
5. Luneburg, R. K. The Mathematical Theory of Optics [Текст] / R. K. Luneburg. — Providence : RI: Brown Univ. Press., 1944.
6. Stettler, R. Über die optische Abbildung von Flächen und Räumen [Текст] / R. Stettler // Optik. — 1955. — Vol. 12. — P. 529—543.
7. Марков, Г. Антенны [Текст] / Г. Марков. — М. : Госэнергоиздат, 1960. — 535 с.
8. Morgan, S. P. General solution of the Luneberg lens problem [Текст] / S. P. Morgan // Journal of applied physics. — 1958. — Vol. 29, no. 9. — P. 1358—1368.
9. Morgan, S. Generalizations of spherically symmetric lenses [Текст] / S. Morgan // IRE Transactions on Antennas and Propagation. — 1959. — Vol. 7, no. 4. — P. 342—345.
10. Fletcher, A. Solutions of two optical problems [Текст] / A. Fletcher, T. Murphy, A. Young // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1954. — Vol. 223, no. 1153. — P. 216—225.
11. Калошин, В. А. Обобщение задачи Люнеберга для анизотропной среды [Текст] / В. А. Калошин, В. Я. Щербенков // Радиотехника и электроника. — 1973. — Т. 18, № 1. — С. 26—31.
12. Калошин, В. А. Синтез и анализ трехфокальных градиентных диэлектрических линз [Текст] / В. А. Калошин, Нгием Х. Д. // Журнал радиоэлектроники. — 2018. — № 9. — URL: <http://jre.cplire.ru/jre/sep18/13/text.pdf>.

13. *Венецкий, А. С.* Общее решение задачи синтеза градиентной линзы с центральной симметрией [Текст] / А. С. Венецкий, В. А. Калошин, Чан Т. Т. // Радиотехника и электроника. — 2022. — Т. 67, № 8. — С. 754—760.
14. *Калошин, В. А.* О синтезе анизотропных линз Люнебурга [Текст] / В. А. Калошин, Буй Ван Чунг // Радиотехника и электроника. — 2024. — Т. 69, № 12. — С. 1162—1169. — EDN: HNDHKP.
15. *Kaloshin, V.* Layered gradient cylindrical lens with axial symmetry [Текст] / V. Kaloshin, T. T. Tien, A. Venetskiy // 2022 IEEE 8th All-Russian Microwave Conference (RMC). — IEEE, 2022. — P. 195—198.
16. *Венецкий, А. С.* Многолучевая антенна с полным азимутальным углом обзора на основе многослойной геодезической линзы с осевой симметрией [Текст] / А. С. Венецкий, В. А. Калошин, Чан Тиен Тханг // Журнал радиоэлектроники. — 2023. — № 7.
17. *Панченко, Б. А.* Рассеяние и поглощение электромагнитных волн неоднородными сферическими телами [Текст] / Б. А. Панченко. — М. : Радиотехника, 2013. — 264 с. — Монография не имеет DOI; для верификации ISBN обратиться к каталогам РГБ / РИНЦ / УрФУ. Цитируется 59 раз в диссертации.
18. *Панченко, Б.* Тензорные функции Грина уравнений Максвелла для областей, частично заполненных диэлектриком. Часть 1 [Текст] / Б. Панченко. — Свердловск : Изд-во УПИ, 1979.
19. *Панченко, Б.* Тензорные функции Грина уравнений Максвелла для областей, частично заполненных диэлектриком. Часть 2 [Текст] / Б. Панченко. — Свердловск : Изд-во УПИ, 1980.
20. *Панченко, Б.* Тензорные функции Грина уравнений Максвелла для областей, частично заполненных диэлектриком. Часть 3 [Текст] / Б. Панченко. — Свердловск : Изд-во УПИ, 1981.
21. *Панченко, Б.* Электродинамический расчёт характеристик излучения полосковых антенн [Текст] / Б. Панченко, С. Шабунин. — М. : Радио и связь, 2002. — С. 256.
22. *Шабунин, С.* Дифракция электромагнитных волн на слоистых цилиндрических структурах [Текст] / С. Шабунин, Н. Синявский // Вестник УГТУ-УПИ. Информационные системы и технологии в радиотехнике, связи, автоматике и управлении. Серия радиотехническая. — 2005. — Т. 69, № 17. — С. 130—136.
23. *Шабунин, С.* Анализ цилиндрических диэлектрических структур методом эквивалентных линий [Текст] / С. Шабунин // Вестник ГОУ ВПО УГТУ-УПИ. Проектирование и анализ радиотехнических и информационных систем. Серия радиотехническая. — 2004. — Т. 48, № 18. — С. 127—136. — Журнал “Вестник УГТУ-УПИ” не имеет DOI; для верификации обратиться к УрФУ ELAR (elar.urfu.ru) и РИНЦ.

24. *Шабунин, С. Н.* Электродинамика плоских и цилиндрических магнито-диэлектрических слоистых структур [Текст] : Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук / Шабунин Сергей Николаевич. — Екатеринбург : Уральский государственный технический университет — УПИ, 2006. — 300 с. — URL: <https://elar.urfu.ru/handle/10995/26187> ; Специальность 05.12.07 — Антенны, СВЧ-устройства и их технологии. Научный консультант: д.т.н., проф. Б.А. Панченко. ru.ru/about/personal-pages/personal/person/s.n.shabunin/) + ELAR repository.
25. Scattering of spherically and hemispherically stratified lenses fed by any real source [Текст] / B. Fuchs [et al.] // IEEE transactions on antennas and propagation. — 2008. — Vol. 56, no. 2. — P. 450—460.
26. Design Optimization of Multishell Luneburg Lenses [Текст] / B. Fuchs [et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2007. — Vol. 55, no. 2. — P. 283—289.
27. *Thornton, J.* Wide-scanning multi-layer hemisphere lens antenna for Ka band [Текст] / J. Thornton // IEE proceedings-microwaves, antennas and propagation. — 2006. — Vol. 153, no. 6. — P. 573—578.
28. *Thornton, J.* Modern Lens Antennas for Communications Engineering [Текст] / J. Thornton, K.-C. Huang. — Hoboken, NJ : Wiley-IEEE Press, 2013.
29. Обзор конструкций антенн на основе линзы Люнеберга, изготавливаемых методами аддитивного производства [Текст] / Д. В. Кусайкин [и др.] // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. — 2024. — Т. 27, № 2. — С. 6—36. — URL: <https://re.eltech.ru/jour/article/view/861/756>.
30. 2-D wide-scanning flat Luneburg lens antenna for 5G communication [Текст] / K. Liu [et al.] // 2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). — IEEE. 2020. — P. 1—2.
31. Multibeam 3-D-printed Luneburg lens fed by magnetoelectric dipole antennas for millimeter-wave MIMO applications [Текст] / Y. Li [et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2019. — Vol. 67, no. 5. — P. 2923—2933.
32. *Ratajczak, P.* Design of a 3D Printed Luneburg Lens Antenna for Multiple Beams Applications at mm-wave Frequencies [Текст] / P. Ratajczak // 2019 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). — 2019. — P. 1—4.
33. *Chen, Z. N.* Microwave metasurface-based lens antennas for 5G and beyond [Текст] / Z. N. Chen, T. Li, W. E. Liu // 2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). — IEEE. 2020. — P. 1—4.
34. Base Station Multibeam Antenna for 5G Network Based on the Lunenburg Lens Structure [Текст] / D. V. Denisov [et al.] // 2021 XV International

- Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE). — Новосибирск : IEEE, 2021. — P. 260—263. — URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9647657>.
35. *Кусайкин, Д. В.* Анализ архитектур многолучевых сферических линзовых антенн систем ММО для сетей 5G [Текст] / Д. В. Кусайкин, А. Е. Каменсков, Д. В. Денисов // Труды конференции ИЖГТУ им. М. Т. Калашникова. — Ижевск, 2022. — С. 752—756.
 36. *Кусайкин, Д. В.* Анализ системы MU-MIMO сети 5G с многолучевой линзовой антенной [Текст] / Д. В. Кусайкин, Д. В. Денисов // Динамика систем, механизмов и машин : материалы XIV Международной IEEE научно-технической конференции. — МИРЭА — Российский технологический университет, 2022. — С. 412—416. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50149430>.
 37. *Denisov, D.* Influence of the Dielectric Layer on the Antenna Characteristics of the Luneburg Lens [Текст] / D. Denisov, S. Shabunin, A. Tangamyan // 2020 28th Telecommunications Forum (TELFOR). — 2020. — P. 1—4.
 38. Electromagnetic dyadic Green's function in spherically multilayered media [Текст] / L. W. Li [et al.] // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. — 1994. — Vol. 42, no. 12. — P. 2302—2310.
 39. *Fallahi, A.* On the computation of electromagnetic dyadic Green's function in spherically multilayered media [Текст] / A. Fallahi, B. Oswald // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. — 2011. — Vol. 59, no. 6. — P. 1433—1440.
 40. *Wu, Z. S.* Electromagnetic scattering for multilayered sphere: recursive algorithms [Текст] / Z. S. Wu, Y. P. Wang // Radio Science. — 1991. — Vol. 26, no. 6. — P. 1393—1401.
 41. *Yang, W.* Improved recursive algorithm for light scattering by a multilayered sphere [Текст] / W. Yang // Applied Optics. — 2003. — Vol. 42, no. 9. — P. 1710—1720.
 42. *Peña, O.* Scattering of electromagnetic radiation by a multilayered sphere [Текст] / O. Peña, U. Pal // Computer Physics Communications. — 2009. — Vol. 180, no. 11. — P. 2348—2354.
 43. *Tai, C.-T.* Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory [Текст] / C.-T. Tai. — 2nd ed. — Piscataway, NJ : IEEE Press, 1994.
 44. *Chew, W. C.* Waves and Fields in Inhomogeneous Media [Текст] / W. C. Chew. — New York : IEEE Press, 1995.
 45. An algorithm for calculating Green's functions of planar, circular cylindrical and spherical multilayer substrates [Текст] / Z. Šipuš [et al.] // Applied Computational Electromagnetics Society Journal. — 1998. — Vol. 13, no. 3. — P. 243—254.
 46. GreenTensor [Текст] / D. V. Denisov [et al.] ; [Source Code] <https://github.com/DenisovDmitriy/GreenTensor>. — 2024. — URL: <https://github.com/>

- [Den1sovDm1triy/GreenTensor](#) (visited on 09/22/2024) ; Accessed: Sept. 22, 2024.
47. *Денисов, Д. В.* GreenTensor — open-source библиотека электродинамического анализа многослойных сферических структур [Текст] / Д. В. Денисов ; <https://greentensor.ru>. — 2025. — URL: <https://greentensor.ru> (дата обр. 28.04.2025) ; Официальный сайт проекта.
 48. GreenTensor Documentation [Текст] / D. V. Denisov [et al.] ; <https://greentensor.readthedocs.io/>. — 2024. — URL: <https://greentensor.readthedocs.io/> (visited on 02/13/2024) ; [Online]. Accessed: Feb. 13, 2024.
 49. *Князев, С. Т.* Применение аппарата функций Грина радиально слоистых структур к решению задач возбуждения, излучения и дифракции волн [Текст] / С. Т. Князев, Ю. Е. Мительман, С. Н. Шабунин // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2010. — Т. 13, № 4. — С. 31—37.
 50. *Yuan, H. Y.* Numerically stable calculations of the spherically layered media theory [Текст] / H. Y. Yuan, W. Zhu, B. O. Zhu // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2023.
 51. *Shore, R. A.* Scattering of an electromagnetic linearly polarized plane wave by a multilayered sphere [Текст] / R. A. Shore // IEEE Antennas and Propagation Magazine. — 2015. — Vol. 57, no. 6. — P. 69—116.
 52. *Komljenovic, T.* Analysis of spherical lens antennas — comparison of three analysis methods [Текст] / T. Komljenovic, N. Burum, Z. Šipuš // Proceedings of the 14th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference (MELECON 2008). — Ajaccio, France : IEEE, 2008. — URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/4569890>.
 53. A quantitative study of Luneberg-lens reflectors [Текст] / C. S. Liang [et al.] // IEEE Antennas and Propagation Magazine. — 2005. — Vol. 47, no. 2. — P. 30—42.
 54. *Raad, S. H.* Dyadic Green's Function for Multilayered Planar, Cylindrical, and Spherical Structures with Impedance Boundary Condition [Текст] / S. H. Raad, Z. Atlasbaf //. — IntechOpen, 2021.
 55. *Denisov, D.* Lens Antenna Array Excited by the Primary-Feed System [Текст] / D. Denisov, B. Panchenko // 2019 Ural Symposium on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (USBREIT). — IEEE. 2019. — P. 321—324.
 56. *Панченко, Б. А.* Рассеяние электромагнитных волн на неоднородных сферических телах [Текст] / Б. А. Панченко, О. П. Пономарев, Д. В. Денисов // Антенны. — 2017. — № 4. — С. 3—6.
 57. *Панченко, Б. А.* Быстрый расчет характеристик рассеяния линзы Люнеберга [Текст] / Б. А. Панченко, О. П. Пономарев, Д. В. Денисов // Вестник Концерна ВКО Алмаз-Антей. — 2017. — 2(21). — С. 21—25.

58. Тензорные функции Грина для расчёта электромагнитных полей от слоистых сферических структур [Текст] / Б. А. Панченко [и др.] // Вестник СибГУТИ. — 2016. — № 2. — С. 18–24. — URL: <https://vestnik.sibsutis.ru/jour/article/view/176>.
59. *Панченко, Б. А.* Дифракционные характеристики линзы Люнеберга для поля круговой поляризации [Текст] / Б. А. Панченко, Д. В. Денисов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2013. — Т. 16, № 4. — С. 33–37.
60. *Panchenko, B.* Fast analysis of Luneburg lens radiation by Green's function method [Текст] / B. Panchenko, S. Shabunin, D. Denisov // 2015 European Radar Conference (EuRAD). — 2015. — P. 568–571.
61. *Денисов, Д. В.* Характеристики линзы Люнеберга для полей круговой поляризации [Текст] / Д. В. Денисов, Б. А. Панченко. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2017. — 200 с. — URL: <https://books.google.com/books?id=jtvSzQEACAAJ>.
62. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2017616708.* Расчет диаграмм рассеяния на неоднородных сферических телах [Текст] / Д. В. Денисов, Б. А. Панченко, О. П. Пономарев ; А. < производственное предприятие «Вектор»» (АО УПП «Вектор»). — № 2017614007 ; заявл. 27.04.2017 ; опубл. 16.06.2017, 2017616708 (Рос. Федерация).
63. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016616168.* Расчет антенных и дифракционных характеристик линзы Люнеберга в режиме круговой поляризации [Текст] / Д. В. Денисов [и др.] ; А. < конструкторское бюро «Пеленг»» (АО «ОКБ «Пеленг»»). — № 2016611044 ; заявл. 11.02.2016 ; опубл. 07.06.2016, 2016616168 (Рос. Федерация).
64. *Денисов, Д. В.* Библиотека с открытым исходным кодом для решения задач рассеяния на многослойных сферических телах [Текст] / Д. В. Денисов, В. Я. Носков, И. О. Скуматенко // 7-я Всероссийская научно-техническая конференция «Системы связи и радионавигации» (25–27 окт. 2023). — Красноярск, 2023. — С. 200–203.
65. GreenTensor Electromagnetic Library for Calculate Scattering on Multilayer Spherical Structures [Текст] / D. V. Denisov [et al.] // 2024 IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM). — 2024. — P. 530–533.
66. *Denisov, D. V.* GreenTensor Electromagnetic Library for Calculating Scattering Patterns on a Human Head Model [Текст] / D. V. Denisov, I. O. Skumatenko, M. A. Shesternov // 2024 IEEE Ural-Siberian Conference on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (US-BEREIT). — 2024. — P. 338–340.
67. *Денисов, Д. В.* Формирование диаграммы направленности специального типа с помощью полусферической линзы Люнеберга [Текст] / Д. В. Де-

- нисов, А. А. Тангамян // Вестник Концерна ВКО «Алмаз–Антей». — 2021. — № 2. — С. 28–34.
68. *Panchenko, B.* Antenna properties of the modified Luneburg lens with backward radiation [Текст] / B. Panchenko, D. Denisov, S. Shabunin // 12th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2018). — 2018. — P. 1–3.
 69. *Денисов, Д. В.* Антенные характеристики полусферической линзы Люнебурга при сканировании [Текст] / Д. В. Денисов, Б. А. Панченко, С. Н. Шабунин // Радиотехника и электроника. — 2019. — 64(3). — С. 246–251. — *Denisov, D. V.* Antenna characteristics of a hemispherical Luneburg lens in the scan mode [Текст] / D. V. Denisov, B. A. Panchenko, S. N. Shabunin // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2019. — 64(4). — P. 357–362.
 70. *Денисов, Д. В.* Влияние металлического стержня внутри сферической линзы Люнеберга на ее характеристики [Текст] / Д. В. Денисов, В. Я. Носков // Ural Radio Engineering Journal. — 2022. — 6 (2). — С. 160–185.
 71. *Панченко, Б. А.* Антенная решетка линз, возбуждаемая системой первичных облучателей [Текст] / Б. А. Панченко, Д. В. Денисов // Антенны. — 2018. — 2(246). — С. 21–25.
 72. *Панченко, Б. А.* Выбор параметров первичного облучателя линзы Люнеберга для суммарно-разностного режима работы [Текст] / Б. А. Панченко, Д. В. Денисов, О. П. Пономарев // Радиотехника и электроника. — 2018. — 63(2). — С. 139–143.
 73. *Денисов, Д. В.* Оценка канала в системах 5G MIMO-OFDM с многолучевыми линзовыми антеннами [Текст] / Д. В. Денисов, Д. В. Кусайкин // Вестник СибГУТИ. — 2021. — 2(56). — С. 56–68.
 74. Методика изготовления линзы Люнеберга для увеличения эффективной площади рассеяния малых беспилотных летательных аппаратов [Текст] / Д. В. Денисов [и др.] // Ural Radio Engineering Journal. — 2025. — Т. 9, № 2. — С. 194–215. — URL: <https://elar.urfu.ru/handle/10995/145286>.
 75. Влияние уровня стратификации линзы Люнеберга на ее антенные характеристики [Текст] / Б. А. Панченко [и др.] // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. — 2014. — № 1. — С. 3–6.
 76. *Денисов, Д. В.* Расчет линзы Люнебурга в ANSYS HFSS для подготовки к изготовлению с помощью 3D-печати [Текст] / Д. В. Денисов, А. А. Тангамян // Вестник СибГУТИ. — 2020. — 3 (51). — С. 54–63.
 77. Выбор параметров многослойной сферической линзы Люнеберга при ее реализации посредством аддитивных технологий [Текст] / Д. В. Денисов [и др.] // Ural Radio Engineering Journal. — 2023. — Т. 7, № 4. — С. 343–374. — URL: <https://journals.urfu.ru/index.php/urj/article/view/7675> ; urfu.ru (DOI) + ELAR УрФУ (elar.urfu.ru/handle/10995/129367).

78. *Denisov, D.* Creating a Luneburg Lens with a Variable Pitch 3D Printer [Текст] / D. Denisov, A. Tangamyan // 2022 Ural-Siberian Conference on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (US-BEREIT). — 2022. — P. 090—093.
79. *Панченко, Б. А.* Поляризационная эффективность излучения крестообразных вибраторов [Текст] / Б. А. Панченко, Д. В. Денисов // Вестник СибГУТИ. — 2013. — № 1. — С. 68—74.
80. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2023688035.* Расчёт параметров линзы Люнеберга в среде Ansys HFSS [Текст] / Д. В. Денисов, Д. В. Кусайкин ; Ф. В. «государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ). — № 2023681224 ; заявл. 12.10.2023 ; опубл. 20.12.2023, 2023688035 (Рос. Федерация).
81. *Патент на изобретение № 2792315.* Способ радиолокационного контроля состояния стрелочного перевода сортировочной горки и датчик его реализующий [Текст] / В. Я. Носков [и др.] (Российская Федерация) ; заявитель АО «Научно-производственное предприятие «Радиосвязь»». — № 2022126622 ; заявл. 12.10.2022 ; опубл. 21.03.2023, Бюл. № 9 ; приоритет 12.10.2022, 2022126622 (Рос. Федерация). — 10 с. : ил. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50432528>.
82. *Патент на изобретение № 2815559.* Способ фиксации момента отделения отцепы от состава и радиолокационный датчик его реализующий (варианты) [Текст] / В. Я. Носков [и др.] (Российская Федерация) ; заявитель АО «Научно-производственное предприятие «Радиосвязь»» ; патент. поверенный Зубов Ю. С. — № 2023124930 ; заявл. 28.09.2023 ; опубл. 18.03.2024, Бюл. № 7 (I ч.) ; приоритет 01.01.2020, 09/289, 037 (Рос. Федерация). — 5 с. : ил.
83. *Марков, Г.* Математические методы прикладной электродинамики [Текст] / Г. Марков, Е. Васильев. — М. : Советское радио, 1970. — С. 120. — (Библиотека радиоинженера ; 3).
84. *Ильинский, А.* Математические модели электродинамики: учеб. пособие для вузов [Текст] / А. Ильинский, В. Кравцов, А. Свешников. — М. : Высшая школа, 1991. — С. 224.
85. *Васильев, Е.* Возбуждение тел вращения [Текст] / Е. Васильев. — М. : Радио и связь, 1987. — С. 272.
86. *Марков, Г.* Возбуждение электромагнитных волн [Текст] / Г. Марков, А. Чаплин. — Москва; Ленинград : Энергия, 1967. — С. 376.
87. *Greenwood, A.* A novel efficient algorithm for scattering from a complex BOR using mixed finite elements and cylindrical PML [Текст] / A. Greenwood, J.-M. Jin // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1999. — Vol. 47, no. 4. — P. 620—629.
88. *B. Panchenko, E. G.* Scattering and absorption of electromagnetic waves in inhomogeneous bodies [Текст] / E. G. B. Panchenko, M. Gizatullin // 2006

- First European Conference on Antennas and Propagation, Nice, France. — 2006. — P. 1–5.
89. *Kusaykin, D. V.* Based Interpolation Channel Estimation for Millimeter-Wave MIMO OFDM Systems with Multibeam Luneburg Antenna [Текст] / D. V. Kusaykin, D. V. Denisov, M. A. Klevakin // 2021 XV International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE). — Новосибирск : IEEE, 2021. — P. 224–227.
 90. *Кусайкин, Д. В.* Моделирование электромагнитной обстановки вблизи многолучевой линзовой антенны миллиметрового диапазона в условиях сложной городской среды [Текст] / Д. В. Кусайкин, Д. В. Денисов, А. Е. Каменсков // Сборник трудов конференции. — 2022. — С. 114–119.
 91. *Денисов, Д. В.* Способы постановки задач в HFSS для анализа влияния электромагнитного излучения на человека [Текст] / Д. В. Денисов, В. Я. Носков, И. О. Скуматенко // 7-я Всероссийская научно-техническая конференция «Системы связи и радионавигации» (25–27 окт. 2023). — Красноярск, 2023. — С. 212–214.
 92. *Maxwell, J. C.* The Scientific Papers of James Clerk Maxwell... [Текст]. Vol. 2 / J. C. Maxwell. — University Press, 1890.
 93. *Gutman, A. S.* Modified luneberg lens [Текст] / A. S. Gutman // Journal of Applied Physics. — 1954. — Vol. 25, no. 7. — P. 855–859.
 94. *Ахияров, В. В.* Исследование широкополосных планарных линз Люнебурга [Текст] / В. В. Ахияров, В. А. Калошин, Е. А. Никитин // Журнал радиоэлектроники. — 2014. — № 1. — URL: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/18/text.pdf>.
 95. *Венецкий, А. С.* О распределении эйконала на поверхности градиентной осесимметричной линзы [Текст] / А. С. Венецкий // Радиотехника и электроника. — 2021. — Т. 66, № 11. — С. 1043–1052.
 96. *Rinehart, R. F.* A Solution of the Problem of Rapid Scanning for Radar Antennae [Текст] / R. F. Rinehart // Journal of Applied Physics. — 1948. — Vol. 19, no. 9. — P. 860–862. — Классическая работа о геодезической (радиальной) линзе.
 97. *Francia, G. T. di.* A family of perfect configuration lenses of revolution [Текст] / G. T. di Francia // Opt. Acta. — 1955. — Vol. 1, no. 4. — P. 157–163.
 98. *Марков, Г.* Антенны [Текст] / Г. Марков, Д. Сазонов. — М. : Энергия, 1975. — С. 528.
 99. *Rayleigh, L. X.* On the electromagnetic theory of light [Текст] / L. Rayleigh // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1881. — Vol. 12, no. 73. — P. 81–101.
 100. *Mie, G.* Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen [Текст] / G. Mie // Annalen der physik. — 1908. — Vol. 330, no. 3. — P. 377–445.

101. Хёнл, Х. Теория дифракции [Текст] / Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. — Пер. с нем. — М. : Мир, 1964. — 428 с.
102. Хюлст, Г. ван де. Рассеяние света малыми частицами [Текст] / Г. ван де Хюлст ; пер. П. с англ. под ред. В. В. Соболева. — М. : Издательство иностранной литературы, 1961. — 537 с.
103. Born, M. Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light [Текст] / M. Born, E. Wolf. — 7th ed. — Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
104. Strifors, H. Scattering of electromagnetic pulses by simple-shaped targets with radar cross section modified by a dielectric coating [Текст] / H. Strifors, G. Gaunaurd // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1998. — Vol. 46, no. 9. — P. 1252—1262.
105. Панченко, Б. А. Дифракция электромагнитной волны на полупроводящей сферической оболочке [Текст] / Б. А. Панченко // Радиотехника и электроника. — 2004. — Т. 49, № 11. — С. 1350—1353.
106. Марков, Г. Возбуждение электромагнитных волн [Текст] / Г. Марков, А. Чаплин. — М. : Радио и связь, 1983. — 296 с.
107. Zouganelis, G. Effective dielectric constant and design of sliced Luneberg lens [Текст] / G. Zouganelis, D. Budimir // Microwave and Optical Technology Letters. — 2007. — Vol. 49, no. 10. — P. 2332—2337.
108. Шанников, Д. В. Расчет характеристик линзы из кубиков методом эквивалентных токов [Текст] / Д. В. Шанников, В. В. Суриков, С. В. Кузьмин // Журнал технической физики. — 2005. — Т. 75, № 11. — С. 139—142.
109. Rondineau, S. A sliced spherical Luneburg lens [Текст] / S. Rondineau, M. Himdi, J. Sorieux // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. — 2003. — Vol. 2. — P. 163—166.
110. Kokkorakis, G. C. EM field induced in inhomogeneous dielectric spheres by external sources [Текст] / G. C. Kokkorakis, J. G. Fikioris // IEEE transactions on antennas and propagation. — 2007. — Vol. 55, no. 11. — P. 3178—3190.
111. Parfitt, A. J. The Luneburg lens as a radio telescope element [Текст] / A. J. Parfitt, J. S. Kot, G. L. James // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. Transmitting Waves of Progress to the Next Millennium. 2000 Digest. Held in conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting (C. Vol. 1. — IEEE. 2000. — P. 170—173.
112. Панченко, Б. А. Антенные характеристики линзы Люнеберга [Текст] / Б. А. Панченко, Е. В. Лебедева // Антенны. — 2010. — № 12. — С. 5—9.
113. Kubach, A. 3D printed Luneburg lens for flexible beam steering at millimeter wave frequencies [Текст] / A. Kubach, A. Shoykhetbrod, R. Herschel // 2017 47th European Microwave Conference (EuMC). — IEEE. 2017. — P. 787—790.
114. Исследование многолучевых линзовых антенн на основе параллельных печатных плат [Текст] / М. П. Беляев [и др.] // Вестник Воронежского

- государственного технического университета. — 2021. — Т. 17, № 3. — С. 66—72.
115. 3D Printed Antennas for 5G Communication: Current Progress and Future Challenges [Текст] / Y. Wang [et al.] // Chinese Journal of Mechanical Engineering: Additive Manufacturing Frontiers. — 2023. — P. 100065.
 116. Modeling and simulations of lüneburg lens antennas for communication purposes [Текст] / S. R. Baev [et al.] // 16th Telecommunications forum FOR, Serbia, Belgrad. — Citeseer. 2008. — P. 488—491.
 117. The simulation of the focus character of a Luneburg lens antenna [Текст] / J. Qiu [et al.] // 2006 1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics. — 2006. — 3 pp.—1431.
 118. *Inc., M. Matsing Lens Technology Enabled* [Электронный ресурс] / M. Inc. — 2024. — URL: <https://www.matsing.com> (дата обр. 20.05.2024).
 119. *Военно-промышленный курьер*. Форум «Армия-2019»: будущее антенн на базе линзы Лüneберга [Текст] / Военно-промышленный курьер. — 2019. — URL: <https://xn--b1aga5aadd.xn--p1ai/2019/forum-armiya-2019/> (дата обр. 29.03.2025).
 120. *АвиаПорт*. Лётные испытания и производство имени В. С. Гризодубовой [Электронный ресурс] / АвиаПорт. — 2026. — URL: <https://www.aviaport.ru/aviafirms/317/> (дата обр. 18.07.2026) ; Отраслевой каталог предприятий авиационной промышленности.
 121. Calibration of Radar RCS Measurement Errors by Observing the Luneburg Lens Onboard the LEO Satellite [Текст] / J. Yang [et al.] // Sensors. — 2022. — Vol. 22, no. 14. — P. 5421.
 122. *QinetiQ*. Passive Radar Enhancement [Электронный ресурс] / QinetiQ. — 2024. — URL: <https://www.qinetiq.com/en/what-we-do/services-and-products/passive-radar-enhancement> (visited on 05/21/2024).
 123. Eyes on the Sky: A Refracting Concentrator Approach to the SKA [Текст] : SKA Design Concept White Paper / R. Beresford [et al.] ; Australian SKA Consortium Committee. — 2002. — Submitted to the SKA Engineering and Management Team; 109 p.; ed. P. J. Hall.
 124. *Денисенко, В. В.* История Отечественной радиолокации [Текст] / В. В. Денисенко, В. А. Курикша. — М. : Издательский дом «Столичная энциклопедия», 2015. — 736 с. — (2).
 125. Разработка системы технического зрения для роботов на основе радиовидения с использованием фокусирующих линз Лüneберга [Текст] / А. В. Клоков [и др.] // Информатика и автоматизация. — 2016. — Т. 2, № 45. — С. 130—140.
 126. *Xin, H.* Automotive radar using 3D printed Luneburg lens [Текст] : pat. / H. Xin, M. Liang, S. Cao. — 05/24/2022. — URL: <https://patents.google.com/patent/US11340342B2/en> ; US Patent 11,340,342 B2 (подана

- 2017-08-15, приоритет 2016-08-15); правообладатель — Arizona Board of Regents on behalf of the University of Arizona.
127. *Eaton, J. E.* On spherically symmetric lenses [Текст] / J. E. Eaton // Transactions of the IRE Professional Group on Antennas and Propagation. — 1952. — Vol. PGAP—4. — P. 66—71.
 128. *Pendry, J. B.* Controlling electromagnetic fields [Текст] / J. B. Pendry, D. Schurig, D. R. Smith // Science. — 2006. — Vol. 312, no. 5781. — P. 1780—1782.
 129. *Leonhardt, U.* Optical conformal mapping [Текст] / U. Leonhardt // Science. — 2006. — Vol. 312, no. 5781. — P. 1777—1780.
 130. *Guo, Y.* Miniaturized Maxwell Fisheye Lens for Terahertz Multibeam Luneburg lens Antenna [Текст] / Y. Guo, Y. Li, J. Wang // 2022 5th International Conference on Electronics and Electrical Engineering Technology (EEET). — 2022. — P. 196—200.
 131. *Тихонов, А. Н.* Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — 2-Е, перераб. и доп. — М. : Наука, 1979. — С. 285. — Английское издание: Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y. Solutions of Ill-Posed Problems. Washington, D.C.: V. H. Winston & Sons, 1977.
 132. *Stratton, J. A.* Electromagnetic Theory [Текст] / J. A. Stratton. — New York : McGraw-Hill, 1941. — P. 615. — Reprinted by IEEE Press / Wiley, 2007. Русское издание: Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
 133. *Фелсен, Л.* Излучение и рассеяние волн : в 2 томах [Текст] / Л. Фелсен, Н. Маркувиц. — М. : Мир, 1978. — пер. с англ., ред. М.Л. Левин.
 134. Gradient index metamaterials [Текст] / D. R. Smith [et al.] // Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — 2005. — Vol. 71, no. 3. — P. 036609.
 135. *Сазонов, Д. М.* Антенны и устройства СВЧ [Текст] / Д. М. Сазонов. — М. : Высшая школа, 1988. — С. 432.
 136. *Harrington, R. F.* Effect of Antenna Size on Gain, Bandwidth, and Efficiency [Текст] / R. F. Harrington // Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section D: Radio Propagation. — 1960. — Vol. 64D, no. 1. — P. 1—12.
 137. *Balanis, C. A.* Antenna Theory: Analysis and Design [Текст] / C. A. Balanis. — 4th ed. — Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, 2016.
 138. *Chu, L. J.* Physical Limitations of Omni-Directional Antennas [Текст] / L. J. Chu // Journal of Applied Physics. — 1948. — Dec. — Vol. 19, no. 12. — P. 1163—1175.
 139. *Hannan, P. W.* The element-gain paradox for a phased-array antenna [Текст] / P. W. Hannan // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1964. — July. — Vol. 12, no. 4. — P. 423—433.

140. Nanophotonic Particle Simulation and Inverse Design Using Artificial Neural Networks [Текст] / J. Peurifoy [et al.] // Science Advances. — 2018. — June. — Vol. 4, no. 6. — eaar4206.
141. *Коротков, А. Н.* Проектирование цилиндрической линзы Люнеберга: магистерская диссертация [Текст] : дис. ... маг. / Коротков А. Н. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, 2018. — URL: <https://elar.urfu.ru/handle/10995/65263>.
142. *Sanford, J.* Scattering by spherically stratified microwave lens antennas [Текст] / J. Sanford // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1994. — Vol. 42, no. 5. — P. 690—698.
143. *Мительман, Ю. Е.* Электродинамика многослойных цилиндрических направляющих систем [Текст] / Ю. Е. Мительман, С. Н. Шабунин. — Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 168 с.
144. *Чебышёв, В.* Антенны и устройства СВЧ. Микрополосковые излучатели и решётки в слоистой среде [Текст] / В. Чебышёв. — М. : Радиотехника, 2003. — С. 102.
145. *Мительман, Ю. Е.* Электродинамический метод анализа многослойных цилиндрических структур [Текст] : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.12.07 / Мительман Ю. Е. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 2012. — 24 с. — Научный руководитель: д. т. н., доц. С. Н. Шабунин. Дата защиты: 18.05.2012, диссертационный совет Д 212.285.11.
146. *Морс, Ф.* Методы теоретической физики [Текст] / Ф. Морс, Г. Фешбах. — Рипол Классик, 2013. — 936 с.
147. *Абрамовиц, М.* Справочник по специальным функциям [Текст] / М. Абрамовиц, Н. Стиган. — М. : Изд-во Наука., 1979. — 832 с.
148. *Уэйт, Д.* Электромагнитное излучение из цилиндрических систем [Текст] / Д. Уэйт. — М. : Советское радио, 1963. — С. 239. — пер. с англ. Л.И. Брюхатова и Г.В. Кисунько.
149. *Веселов, Г.* Слоистые металлодиэлектрические волноводы [Текст] / Г. Веселов, С. Раевский. — М. : Радио и связь, 1988. — С. 248.
150. *Егоров, Ю.* Частично заполненные прямоугольные волноводы [Текст] / Ю. Егоров. — М. : Советское радио, 1967. — С. 216.
151. *Вагин, В.* Особенности поведения гибридных волн в круглом волноводе, частично заполненном анизотропным диэлектриком [Текст] / В. Вагин, В. Котов, М. Офицеров // Радиотехника и электроника. — 1967. — № 1. — С. 51—55.
152. *Раевский, С.* Комплексные волны в двухслойном круглом экранированном волноводе [Текст] / С. Раевский // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 1972. — Т. 15, № 1. — С. 112—116.

153. *Сморгонский, В.* Анализ многомодового режима двухслойного круглого волновода [Текст] / В. Сморгонский, Ю. Илларионов // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 1977. — Т. 20, № 3. — С. 433—443.
154. *Карташёв, В.* Распространение основной волны в коаксиальной линии с неоднородным диэлектрическим заполнением [Текст] / В. Карташёв // Радиотехника и электроника. — 1965. — № 6. — С. 1057—1064.
155. *Панченко, Б.* Излучение кольцевой антенны на цилиндре со слоем диэлектрика [Текст] / Б. Панченко, С. Дайлис, С. Шабунин // Известия вузов СССР. Радиофизика. — 1986. — С. 971—974.
156. *Shabunin, S.* Waveguide and Radiation Properties of Cylindrical Dielectric Structures [Текст] / S. Shabunin, S. Dajlis, Y. Mitelman // Связьпром 2005: научные труды международной научно-практической конференции. — Екатеринбург, 2005. — Р. 268—276.
157. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1978. — С. 831. — пер. с англ.
158. Справочник по волноводам [Текст] / под ред. Я. Фельд. — М. : Советское радио, 1952. — С. 432.
159. *Wiscombe, W. J.* Improved Mie scattering algorithms [Текст] / W. J. Wiscombe // Applied Optics. — 1980. — Vol. 19, no. 9. — Р. 1505—1509. — Источник эмпирической формулы порядка усечения ряда Ми $N_W = x + 4x^{1/3} + 2$, использованной в внутренних регрессионных тестах библиотеки GreenTensor.
160. *Stutzman, W. L.* Antenna Theory and Design [Текст] / W. L. Stutzman, G. A. Thiele. — 3rd ed. — Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, 2012.
161. *Сморгонский, В.* Критические условия в круглом волноводе с диэлектрической втулкой [Текст] / В. Сморгонский, А. Ковшов // Радиотехника и электроника. — 1965. — № 4. — С. 752—754.
162. *Калмык, В.* Симметричная Е-волна в двухслойном круглом волноводе с резистивной плёнкой между слоями [Текст] / В. Калмык, С. Маркова, С. Раевский // Радиотехника и электроника. — 1975. — № 7. — С. 1496—1498.
163. *Раевский, А.* Волны HE и EH круглого диэлектрического волновода [Текст] / А. Раевский // Радиотехника и электроника. — 1999. — Т. 44, № 5. — С. 517—519.
164. *Пчерняев, В.* Собственные функции частично заполненного круглого волновода [Текст] / В. Пчерняев // Радиоэлектроника. — 2002. — № 5. — С. 76—80.
165. *Зернов, Н.* Излучение электромагнитных волн источником через слой изотропного диэлектрика [Текст] / Н. Зернов, А. Сташкевич // Прикладная электродинамика. Т. 2. — М. : Высшая школа, 1978. — С. 145—173.

166. *Bohren, C. F.* Absorption and Scattering of Light by Small Particles [Текст] / C. F. Bohren, D. R. Huffman. — New York : Wiley-Interscience, 1983. — 530 p.
167. *Панченко, Б. А.* Рассеяние электромагнитных волн многослойной линзой Люнеберга [Текст] / Б. А. Панченко, М. Г. Гизатуллин, Е. В. Лебедева // Антенны. — 2009. — № 1. — С. 30—33.
168. *Исимару, А.* Распространение и рассеяние волн в случайных неоднородных средах [Текст] / А. Исимару. — М. : Мир., 1981. — 280 с.
169. *Денисов, Д. В.* Примеры использования библиотеки GreenTensor. Диаграммы рассеяния на линзе Люнеберга [Текст] / Д. В. Денисов. — 2025. — URL: <https://github.com/Den1sovDm1triy/GreenTensor/tree/main/examples> (дата обр. 28.04.2025) ; Для просмотра примера откройте папку: *Example 2 - Luneburg Lens Scattering Diagram*.
170. *Денисов, Д. В.* Примеры использования библиотеки GreenTensor. Би-статический ЭПР [Текст] / Д. В. Денисов. — 2025. — URL: <https://github.com/Den1sovDm1triy/GreenTensor/tree/main/examples> (дата обр. 28.04.2025) ; Для просмотра примера откройте папку: *Example 1 - Luneburg Lens Bistatic RCS*.
171. *Rozenfeld, P.* The electromagnetic theory of three-dimensional inhomogeneous lenses [Текст] / P. Rozenfeld // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1976. — Vol. 24, no. 3. — P. 365—370.
172. Characteristics of Radiation from a Microstrip Antenna on a Substrate Made of a Chiral Metamaterial [Текст] / D. S. Klyuev [и др.] // Radiophysics and Quantum Electronics. — 2018. — Т. 61, № 6. — С. 445—455.
173. *Потехин, А.* Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн [Текст] / А. Потехин. — М. : Советское радио, 1948. — С. 135.
174. *Иванов, Е.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах [Текст] / Е. Иванов. — Минск : Наука и техника, 1968. — С. 584.
175. *Кинг, Р.* Рассеяние и дифракция электромагнитных волн [Текст] / Р. Кинг, Ч.-Т. Тай. — М. : Издательство иностранной литературы, 1962. — С. 193. — пер. с англ.
176. *Кисель, В.* Дифракция электромагнитной волны на идеально проводящем цилиндре с неоднородным магнитодиэлектрическим покрытием [Текст] / В. Кисель, А. Фёдоренко // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 1991. — Т. 34, № 5. — С. 590—594.
177. *Котляр, В.* Анализ дифракции электромагнитной волны на бесконечном круглом цилиндре с несколькими однородными слоями [Текст] / В. Котляр, М. Личманов // Компьютерная оптика. — Самара, 2002. — № 24. — С. 26—32. — ИСОИ РАН.
178. *Панченко, Б. А.* Антенные характеристики линзы Люнеберга при круговой поляризации поля [Текст] / Б. А. Панченко, Д. В. Денисов // Антенны. — 2013. — № 12. — С. 026—030.

179. *Murata, T.* MOGA: multi-objective genetic algorithms [Текст] / Т. Murata, Н. Ishibuchi // Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Evolutionary Computation. Vol. 1. — 1995. — P. 289—.
180. *Денисов, Д. В.* Антенные и дифракционные характеристики линз Люнеберга при облучении полем круговой поляризации [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.12.07 / Денисов Дмитрий Вадимович. — Н. Новгород : Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р. Е. Алексеева, 2015. — 184 с. — URL: <https://www.dissercat.com/content/antennye-i-difraktsionnye-kharakteristiki-linz-lyuneberga-pri-obluchenii-polem-krugovoi-poly>.
181. *Denisov, D. V.* Modeling of a Lunenburg lens antenna with the inner metallic sphere [Текст] / D. V. Denisov, V. Y. Noskov, D. V. Kusaykin // T-Comm. — 2022. — 16 (11). — P. 44—49.
182. *Панченко, Б.* Микрополосковые антенны [Текст] / Б. Панченко, Е. Нефёдов. — М. : Радио и связь, 1986. — С. 144.
183. *Панченко, Б.* Характеристики полосковых антенн и антенных решёток, выполненных на диэлектрической подложке с воздушным зазором [Текст] / Б. Панченко, С. Князев, Ф. Сабирзянов // Радиотехника и электроника. — 1987. — № 7. — С. 1397—1402.
184. *Филиппов, В.* Антенны и устройства СВЧ. Проектирование фазированных антенных решёток: учеб. пособие для вузов [Текст] / В. Филиппов, Л. Пономарев, А. Гринев ; под ред. Д. Воскресенский. — М. : Радио и связь, 1994. — С. 592.
185. *Филиппов, В.* Характеристики печатных излучателей в плоских ФАР [Текст] / В. Филиппов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 1981. — Т. 24, № 2. — С. 41—48.
186. *Чаплин, А.* Об учёте влияния диэлектрического укрытия на «ослепление» ФАР [Текст] / А. Чаплин, А. Хзмалян // Радиотехника и электроника. — 1978. — Т. 23, № 12. — С. 2632—2634.
187. *Чебышёв, В.* Алгоритм расчёта полоскового вибратора в слоисто-однородной среде [Текст] / В. Чебышёв // Известия вузов СССР. Радиоэлектроника. — 1981. — Т. 24, № 9. — С. 5—9.
188. *Бодров, В.* Внешние собственные и взаимные проводимости щелей в бесконечном плоском экране, покрытом слоем диэлектрика [Текст] / В. Бодров, В. Гриднев // Известия вузов. Радиофизика. — 1982. — № 5. — С. 554—561.
189. *Ильинский, А.* Исследование электродинамических характеристик резонаторно-щелевого излучателя с источниками возбуждения в плоскости щели [Текст] / А. Ильинский, А. Гринёв, Ю. Котов // Радиотехника и электроника. — 1978. — № 5. — С. 922—930.
190. *Панченко, Б.* Эффективность излучения щели в проводящем экране, покрытом слоем диэлектрика [Текст] / Б. Панченко, С. Шабунин // Радиотехника и электроника. — 1983. — № 5. — С. 871—875.

191. *Панченко, Б.* Излучение полосковой линии [Текст] / Б. Панченко, С. Шабунин // Известия вузов СССР. Радиоэлектроника. — 1981. — № 9. — С. 32—37.
192. *Панченко, Б.* Характеристики излучения полосковых вибраторов [Текст] / Б. Панченко, С. Шабунин // Радиотехника и электроника. — 1981. — № 6. — С. 1132—1137.
193. *Денисов, Д. В.* Исследование характеристик антенной системы на основе линзы Люнеберга при смещении первичного облучателя из фокуса [Текст] / Д. В. Денисов, А. А. Тангамян // Российская научно-техническая конференция «Обработка информации и математическое моделирование» : сборник трудов. — Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2021. — С. 528—534. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=47147457>.
194. *Weily, A. R.* Dual-polarized planar feed for low-profile hemispherical Luneburg lens antennas [Текст] / A. R. Weily, N. Nikolic // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2011. — Vol. 60, no. 1. — P. 402—407.
195. *Кусайкин, Д. В.* Прогнозирование параметров линзы Люнеберга нейросетевым методом [Текст] / Д. В. Кусайкин, Д. В. Денисов, А. Е. Каменсков // Тенденции развития науки и образования. — 2023. — № 103—8. — С. 239—242. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=58908283>.
196. *Каменсков, А. Е.* Прогнозирование характеристик многолучевой линзовой антенны с помощью искусственных нейронных сетей [Текст] / А. Е. Каменсков, Д. В. Кусайкин, Д. В. Денисов // Тенденции развития науки и образования : научный журнал. — 2023. — С. 83—86. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=53929073>.
197. Reconfigurable Hemispherical Dielectric Lens Antennas in MM-Waves [Текст] / R. A. Santos [et al.] // 2018 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA). — 2018. — P. 456—459.
198. *Peeler, G. D. M.* A Two-Dimensional Microwave Luneberg Lens [Текст] / G. D. M. Peeler, D. H. Archer // IRE Transactions on Antennas and Propagation. — 1953. — Vol. 1, no. 1. — P. 12—23.
199. *Bor, J.* Conception et réalisation d'une antenne lentille de Luneberg toroïdale [Текст] : PhD thesis / Bor Jonathan. — Rennes, France : Université de Rennes 1, 2014.
200. *Веселаго, В. Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ [Текст] / В. Г. Веселаго // Успехи физических наук. — М., 1967. — Т. 92, № 3. — С. 517—526.
201. *Pendry, J. B.* Negative refraction makes a perfect lens [Текст] / J. B. Pendry // Physical Review Letters. — 2000. — Vol. 85, no. 18. — P. 3966—3969.
202. *Панченко, Б. А.* Дифракция электромагнитных волн на сферических телах из материала с отрицательным коэффициентом рефракции [Текст] /

- Б. А. Панченко // Радиотехника и электроника. — 2007. — Т. 52, № 11. — С. 1366.
203. *ОАО ЗиК*. Радиопоглощающие материалы ZIK 51-2190 и ZIK 51-2191. Технические условия [Текст] / ОАО ЗиК ; Заречный комбинат, г. Заречный (Свердловская область). — 2010. — Параметры комплексной диэлектрической и магнитной проницаемостей материалов получены экспериментально на сетке частот 3; 5,5; 7,5 и 10 ГГц.
 204. *Skolnik, M. I.* Radar Handbook [Текст] / M. I. Skolnik. — 3rd ed. — New York : McGraw-Hill, 2008.
 205. *Маленьких, Е. С.* Модернизация индикатора малых высот для летательного аппарата [Текст] / Е. С. Маленьких, Ю. Е. Мительман // ИНТЕР: Информационные технологии и радиоэлектроника. — 2024. — С. 30—33.
 206. *Moore, D. T.* Gradient-index optics: a review [Текст] / D. T. Moore // Applied Optics. — 1980. — Vol. 19, no. 7. — P. 1035—1038.
 207. Thin metamaterial Luneburg lens for surface waves [Текст] / J. A. Dockrey [et al.] // Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics. — 2013. — Vol. 87, no. 12. — P. 125137.
 208. Compact metamaterial-based substrate-integrated Luneburg lens antenna [Текст] / A. Dhouibi [et al.] // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. — 2012. — Vol. 11. — P. 1504—1507.
 209. *Baev, S.* Lüneburg Lenses as CommuniCation antennas [Текст] / S. Baev, B. Hadjistamov, P. Dankov // Annuaire de l'Universite de Sofia "St. Kliment Ohridski". — 2009. — Vol. 102, no. 1. — P. 64—67.
 210. *Baker-Jarvis, J.* Transmission/reflection and short-circuit line permittivity measurements [Текст] / J. Baker-Jarvis // NASA STI/Recon Technical Report N. — 1990. — Vol. 91. — P. 28482.
 211. *Рытов, С. М.* Электромагнитные свойства мелкослоистой среды [Текст] / С. М. Рытов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1955. — Т. 29, 2(8). — С. 605—616.
 212. *Deffenbaugh, P. I.* Broadband Microwave Frequency Characterization of 3-D Printed Materials [Текст] / P. I. Deffenbaugh, R. C. Rumpf, K. H. Church // IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology. — 2013. — Vol. 3, no. 12. — P. 2147—2155.
 213. 3D-Printed Omnidirectional Luneburg Lens Retroreflectors for Low-Cost mm-Wave Positioning [Текст] / R. A. Bahr [et al.] // 2020 IEEE International Conference on RFID (RFID). — 2020. — P. 1—7.
 214. Исследование сферической линзы Люнеберга, состоящей из набора диэлектрических перфорированных дисков с отверстиями разного диаметра [Текст] / Ю. Г. Пастернак [и др.] // Антенны. — 2021. — № 6. — С. 13—22.
 215. Сферическая линза Люнеберга на основе печатных плат с электрически малыми рассеивателями [Текст] / К. А. Быков [и др.] // Вестник Воро-

- нежского государственного технического университета. — 2019. — Т. 15, № 1.
216. An X-band Luneburg Lens antenna fabricated by rapid prototyping technology [Текст] / M. Liang [et al.] // 2011 IEEE MTT-S International Microwave Symposium. — 2011. — P. 1—4.
 217. Кусайкин, Д. В. 3D-печать сферической линзовой антенны в форме многогранника Голдберга [Текст] / Д. В. Кусайкин, Д. В. Денисов // Прикладная физика, информационные технологии и инженерия : сборник трудов VI Всероссийской научно-практической конференции. — Омский научно-исследовательский институт приборостроения, 2023. — С. 108—110. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=59994538>.
 218. Денисов, Д. В. Линза Люнеберга с конструкцией сферического многогранника [Текст] / Д. В. Денисов, Д. В. Кусайкин // Прикладная физика, информационные технологии и инженерия : сборник трудов VI Всероссийской научно-практической конференции. — Омский научно-исследовательский институт приборостроения, 2023. — С. 83—85. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=59994507>.
 219. Knyazev, N. S. Dielectric permittivity and permeability measurement system [Текст] / N. S. Knyazev, A. I. Malkin // CEUR Workshop Proceedings, Yekaterinburg, 9 December 2017. — 2017. — P. 45—51.
 220. Wang, C. A 3-D-Printed Wideband Circularly Polarized Parallel-Plate Luneburg Lens Antenna [Текст] / C. Wang, J. Wu, Y.-X. Guo // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2020. — Vol. 68, no. 6. — P. 4944—4949.
 221. Broadband 3-D Luneburg Lenses Based on Metamaterials of Radially Diverging Dielectric Rods [Текст] / A. Sayanskiy [et al.] // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. — 2017. — Vol. 16. — P. 1520—1523.
 222. Schell, H. W. Luneberg linsen Antennen fur Nachrichtensatelliten [Текст] / H. W. Schell // Raumfahrtforschung. — 1970. — Vol. 14, no. 3. — P. 96.
 223. Optimal design dielectric layer of Lunberg-lens antenna [Текст] / H. Xiong [et al.] // 2009 5th Asia-pacific conference on Environmental Electromagnetics. — IEEE. 2009. — P. 172—175.
 224. Numerical optimization of 2-D Luneburg lens antenna by distorting the permittivity estimation to improve the beam radiation [Текст] / H.-T. Chou [et al.] // 2019 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). — IEEE. 2019. — P. 1—4.
 225. Maxwell Garnett, J. C. Colours in Metal Glasses and in Metallic Films [Текст] / J. C. Maxwell Garnett // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. — 1904. — Vol. 203. — P. 385—420.
 226. Zhou, P. Computation Electromagnetic Scattering in an Anisotropic Dielectric Cylinder by the DDM/FEM/BEM Method [Текст] / P. Zhou, Q. Li // 2010 Second International Conference on Computer Modeling and Simulation, Sanya, China. — 2010. — P. 412—415.

227. *Мительман, Ю. Е.* Проектирование антенных систем в Ansoft HFSS [Текст] / Ю. Е. Мительман. — Екатеринбург : Кафедра высокочастотных средств радиосвязи и телевидения, 2012. — Научный редактор: д. т. н., проф. С. Н. Шабунин. Учебное электронное текстовое издание : методические указания к лабораторным работам для студентов всех форм обучения направления 210400 «Радиотехника».
228. *Денисов, Д. В.* Анализ электромагнитной совместимости многоантенных систем в среде Ansys EMIT [Текст] / Д. В. Денисов, И. Р. Зарипова // Материалы международной научно-технической конференции. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, 2019.
229. *Денисов, Д. В.* Возможности программных продуктов ANSYS для проектирования устройств Интернета вещей (IoT): связка HFSS–EMIT–SAVANT [Текст] / Д. В. Денисов // Ural Radio Engineering Journal. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, 2019.
230. *Lambert, P.* State-of-Technology Update On GRIN/Luneburg Dielectric Lenses/Antennas for Microwave/mmWave Applications [Текст] / P. Lambert // Microwave Journal. — 2022. — Feb. — URL: <https://www.microwavejournal.com/articles/37538-state-of-technology-update-on-grinluneburg-dielectric-lensesantennas-for-microwavemmwave-applications> ; Отраслевой обзор.
231. Additively-Manufactured Broadband Metamaterial-Based Luneburg Lens for Flexible Beam Scanning [Текст] / X. Li [et al.] // Materials. — 2024. — Vol. 17, no. 12. — P. 2847.

Список рисунков

1.1	Траектория лучей в линзе Люнеберга	49
1.2	Изображение хода лучей в линзах Люнеберга и Максвелла	50
1.3	Геометрия задачи с падением плоской электромагнитной волны на ЛЛ	54
1.4	Модель линзы Люнеберга в HFSS	56
1.5	Поля и диаграммы рассеяния для ЛЛ диаметром до 1λ	59
1.6	Поля и диаграммы рассеяния ЛЛ для $D = 2\lambda, 4\lambda, 6\lambda, 12\lambda$	59
1.7	Усиление ЭМ поля линзой в направлении $E_\theta = 0$ для различного электрического диаметра и количества слоёв ЛЛ	60
1.8	Многолучевая базовая станция с линзой Люнеберга	62
1.9	Линза Люнеберга как радиолокационный отражатель на летательных аппаратах	66
1.10	Размещение линзы Люнеберга в носовой части ракеты-мишени . . .	67
1.11	Схема прохождения лучей через линзу Люнеберга с отражающей поверхностью в фокальной точке	68
2.1	Дифференциальная геометрия луча	94
2.2	Поперечное сечение сферически симметричной линзы	94
2.3	Функция $\rho(\tau)$ при $\tau = \ln r' = -T(\rho)$	95
2.4	Радиальное распределение изменения диэлектрической проницаемости, соответствующее закону (2.6)	97
2.5	Фокусировка в дальней зоне линзы Люнеберга	97
2.6	Диэлектрическая структура с произвольным числом слоёв	106
2.7	Зоны поля излучающей сферической линзы	111
2.8	Расположение дипольных облучателей над проводящей сферой с укрытием	113
2.9	Диаграммы рассеяния на проводящей сфере с диэлектрическим укрытием	114
2.10	Сечения рассеяния 8-слойной оптимизированной ЛЛ vs k_0a	116
2.11	Расширенный набор сечений рассеяния 8-слойной оптимизированной ЛЛ	118
2.12	Бистатическое сечение восьмислойной ЛЛ vs однородной сферы при $k_0a = 4\pi$	121
2.13	Угловой портрет кросс-поляризации 8-слойной ЛЛ vs однородной сферы при $k_0a = 4\pi$	124

2.14	Диаграммы рассеяния на ЛЛ, облучаемой элементом Гюйгенса . . .	126
2.15	Диаграммы направленности ЛЛ при облучении вибратором с рефлектором	129
2.16	Диаграммы направленности ЛЛ при облучении апертурным излучателем	129
2.17	Диаграммы направленности ЛЛ при облучении апертурным излучателем	130
2.18	КНД ЛЛ при облучении точечными источниками	133
2.19	Геометрия задачи дифракции на многослойной сфере	137
2.20	Диаграммы рассеянного поля на металлическом шаре для $k_0a = 3$ (слева) и $k_0a = 5$ (справа)	138
2.21	Диаграммы рассеянного поля на ЛЛ в Ansys Electronics Desktop (HFSS Design)	139
2.22	Диаграммы рассеяния четырёхслойной ЛЛ: $k_0a = 6\pi$ и 2π	140
2.23	Дифракция на ЛЛ, пример расчёта библиотекой GreenTensor	141
2.24	Бистатистический ЭПР сферической ЛЛ (сравнение с Greenwood–Jin 1999)	144
2.25	Бистатистический ЭПР сферической ЛЛ при $k_0a = 5$ (сравнение с GreenTensor)	145
2.26	Модифицированный угловой порядок ν_E	147
2.27	Эффективности рассеяния анизотропной сферы	150
2.28	Угловые характеристики анизотропной сферы	151
3.1	Диаграммы рассеянного поля многослойной ЛЛ при $k_0a = 2\pi$	160
3.2	Диаграммы рассеяния линзы по on и kn при $k_0a = 8\pi$	161
3.3	Коэффициенты рассеяния ЛЛ при различных диаметрах линзы . . .	162
3.4	Потери энергии на образование kn при круговой поляризации	165
4.1	Равношаговое разбиение профиля линзы Люнеберга на четыре и восемь слоёв	170
4.2	Пример оптимизированного равношагового разбиения профиля линзы Люнеберга	171
4.3	Диаграмма рассеяния линзы при $D = 6\lambda$ при разных способах аппроксимации закона Люнеберга	173
4.4	Представление оптимизированного равношагового разбиения профиля линзы Люнеберга на 2...10 слоёв	175

4.5	Усиление ЭМ поля в направлении $E_\theta = 0$ ЛЛ различного электрического диаметра и количества слоёв	176
4.6	Профили показателя преломления линз-дефлекторов	182
4.7	Лучевая трассировка линзы-дефлектора $\alpha = 90^\circ$	186
4.8	Диаграмма направленности линзы-дефлектора $\alpha = 90^\circ$	187
5.1	Прямоугольный волновод — первичный облучатель линзы	202
5.2	ЛЛ с первичным облучателем — прямоугольным волноводом	202
5.3	ЛЛ с двенадцатью первичными облучателями	203
5.4	Пример ДН специального типа, формируемая ЛЛ с системой облучателей (режим работы задан в таблице 38)	204
5.5	ММО-ЛЛ, установленная на светофор: модель в HFSS с оценкой качества покрытия	205
5.6	ЛЛ с двенадцатью первичными облучателями	206
6.1	Изображение хода лучей в линзах Люнеберга и Максвелла	208
6.2	Диаграммы направленностей (ДН) ЛЛ от облучателей 1, 2 (сплошная и штриховая линии соответственно). Пересечение диаграмм в точке А (–3 дБ, 4,7 град); расположение облучателя 1 в точке $\theta = 0$ град, облучатель 2 сдвинут на угол $\theta = 9,4$ град.	209
6.3	Суммарная и разностная ДН от облучателей 1, 2	209
6.4	Диаграммы направленностей (ДН) ЛЛ от облучателей 3, 4 (сплошная и штриховая линии соответственно). Пересечение диаграмм в точке Б (–5 дБ, –7 град); расположение облучателя 3 в точке $\varphi = 0$ град, облучатель 4 сдвинут на угол $\varphi = -14$ град.	210
6.5	Суммарная (а) и разностная (б) диаграммы направленностей от облучателей 3, 4	210
6.6	Зависимость периода решётки от радиуса ЛЛ, сплошная линия — расстояние между облучателями 1, 2, штриховая — между облучателями 3, 4	211
7.1	Схема полусферической линзы Люнеберга	221
7.2	Модель полусферической ЛЛ в HFSS	221
7.3	Диаграмма направленности оптимизированной шестислойной полусферической ЛЛ	222
7.4	Косекансная диаграмма направленности самолётного радиолокатора	223

7.5	Диаграмма направленности (ДН) полусферической ЛЛ на идеально проводящей плоскости	224
7.6	Схема размещения полусферической ЛЛ с облучателем на фюзеляже летательного аппарата	226
7.7	Схема формирования косекансной ДН сферической ЛЛ с управляемой системой облучателей	227
7.8	ДН полусферической ЛЛ с различной толщиной подложки h из материала <i>фторопласт-4</i>	228
7.9	ДН полусферической ЛЛ с различной толщиной подложки h из материала <i>стеклотекстолит</i>	230
7.10	Профили проницаемостей: диэлектрическая vs магнетодиэлектрическая ЛЛ	239
7.11	Сравнение сечений рассеяния: диэлектрическая vs магнетодиэлектрическая ЛЛ	240
7.12	Сечения рассеяния сферических метаматериалов	243
7.13	Локализация ближнего поля в ЛН-сфере: эффект Пендри в сферической геометрии	246
7.14	Электродинамические параметры РПМ ZIK 51-2190 и ZIK 51-2191	248
7.15	Эффективность РПМ-покрытий ZIK на проводящей сфере $R = 100$ мм	249
7.16	Поперечное сечение многослойной ЛЛ с центральным металлическим стержнем [70]	251
7.17	Геометрия линзы Люнеберга с металлической сферой в центре	252
7.18	Сравнение точности равношаговой, оптимизированной и MOGA-аппроксимаций профиля Люнеберга	255
7.19	Фронт Парето MOGA-стратификации при $N = 8$	256
7.20	Расчётная модель ЛЛ с металлическим включением в Ansys HFSS	257
7.21	Диаграммы направленности ЛЛ с металлической сферой при $k_0 a = 4\pi$, $N = 6$	259
7.22	Обратное сечение рассеяния ЛЛ как функция радиуса металлического ядра	260
8.1	ЛЛ из пенопласта с базовыми элементами сложной формы	274
8.2	ЛЛ из концентрических перфорированных слоёв	274
8.3	Моделирование TR метода линии передачи в HFSS	276

8.4	Конструкция ЛЛ с перфорацией кубическими отверстиями	277
8.5	Геометрия линзы с перфорацией в виде кубов	279
8.6	Модель ЛЛ в форме многогранника Голдберга	282
8.7	Образцы <i>PETG</i> и их эффективная диэлектрическая проницаемость	284
8.8	Линза Люнеберга с перфорацией	285
8.9	Измерительная установка для определения характеристик напечатанной ЛЛ из материала <i>PETG</i>	286
8.10	Сравнение расчётных и экспериментальных зависимостей диаграммы рассеяния ЛЛ от угла в азимутальной плоскости для частоты 10 ГГц	288
8.11	Модель ЛЛ (слева) и результат её изготовления средствами 3D-печати (по центру и справа)	290
8.12	Размещение нескольких переотражателей по периметру объекта: (а) двух — вдоль ребра, (б) трёх — в вершинах треугольника, (в) четырёх — по сторонам квадрата. Круг — линза Люнеберга, дуга — металлический экран, сектор — зона переотражения (раскрыв $\approx 120^\circ$); в зонах перекрытия секторов ЭПР складывается .	292
8.13	Диаграмма рассеяния, полученная с помощью библиотеки <i>GreenTensor</i>	293
8.14	Геометрия линзы с перфорацией кубической геометрией	294
8.15	Сравнение диаграмм рассеяния на синтезированной сфере с кубическими пустотами (синяя сплошная линия) и твердотельной конструкции из сплошного материала (красная пунктирная линия) .	296
8.16	Наложение электромагнитного поля на синтезированную геометрию ЛЛ	297
8.17	Трёхмерная модель HIPS-ЛЛ с кубической перфорацией	298
8.18	Геометрия кубической ячейки слоя	300
8.19	Пошаговая верификация параметров кубических пустот HIPS-ЛЛ в <i>Ansys HFSS</i>	304
8.20	Кубические калибровочные образцы для FDM-печати с управляемой пористостью	306
8.21	Конструктивное исполнение линзы с радиально-симметричными пустотами	307
8.22	Процесс изготовления линзы на FDM-принтере	311
8.23	Моностатический ЭПР ЛЛ с экраном диаметром 200 мм	313

8.24	Пенопласт переменной плотности для изготовления ЛЛ	315
8.25	Модель ЛЛ с пенопластовым экраном в Ansys HFSS, диаграммы ЭПР и распределение поля	316
9.1	Геометрия плоской многослойной магнитодиэлектрической структуры. Каждому слою сопоставлен направленный волновой импеданс Z_l^{TM} ; рекуррентный пересчёт ведётся от $z = +\infty$ к $z = z_0$.	321
9.2	Геометрия задачи сшивания плоскость $\leftrightarrow$ сфера. Сферическая многослойная подобласть Ω_S радиуса a с центром в точке $\vec{r}_0 = (0,0,h_0)$ и локальной сферической системой координат (r,θ,φ) ; плоская многослойная подобласть Ω_P с глобальной декартовой системой (x,y,z) и поверхностью $z = 0$; интерфейс Γ_{PS} — плоскость $z = z_*$, $0 < z_* < h_0 - a$. Поля в смежных под областях разлагаются по различным модальным базисам, согласуемым на интерфейсе Γ_{PS} через теорему сложения Релея–Гордона (9.19)	332
9.3	Линза над проводящей плоскостью: решение связанной задачи . . .	357
10.1	Архитектура библиотеки GreenTensor v0.2.0	362
10.2	Результат параметрического свипа в <i>GreenTensor</i>	367
10.3	Суррогат <i>GreenTensor</i> : предсказание против расчёта	370
10.4	Диаграмма рассеяния на металлической сфере в вакууме	373
10.5	Диаграммы рассеяния в вакууме: линза Люнеберга и металлическая сфера	374
10.6	Бистатическая ЭПР линзы Люнеберга при $k_0a = 5$	378
10.7	Бистатическая ЭПР линзы Люнеберга при $k_0a = 10$	378
10.8	Регрессионные тесты 1, 2 библиотеки <i>GreenTensor</i> : энергобаланс и парадокс экстинкции	380
10.9	Регрессионный тест 3: сходимость ряда Ми и формула Уискомба . .	381
10.10	Модель четырёхслойной линзы Люнеберга, реализованная в Ansys Electronics Desktop (HFSS Design)	383
10.11	Диаграммы рассеяния на четырёхслойной ЛЛ, сравнение методов ФЕМ и ТФГ	401
10.12	Формирование косекансной ДН в веб-движке GreenTensor Studio . .	402
Б.1	Зависимость КНД от числа слоёв линзы Люнеберга	463

Б.2	КНД линзы Люнеберга при точечном облучателе (расчёт <i>GreenTensor</i>)	464
Б.3	Патентный ландшафт линз Люнеберга	470
Д.1	Главная страница интерактивного расчётного движка на сайте <i>greentensor.ru</i>	481
Д.2	Область визуализации результатов расчёта в веб-калькуляторе <i>greentensor.ru</i>	483

Список таблиц

1	Соответствие положений, выносимых на защиту, паспорту научной специальности 2.2.14	38
2	Зависимость затрат вычислительных ресурсов от D ЛЛ	57
3	Параметры слоёв ЛЛ при равношаговой аппроксимации	58
4	Параметры слоёв при равношаговой аппроксимации профиля ЛЛ . .	61
5	Параметры слоёв при оптимизированной аппроксимации профиля линзы Люнеберга	61
6	Модели антенн сотовой связи на базе ЛЛ и их характеристики . . .	63
7	Характеристики линз Люнеберга QinetiQ для ракеты-мишени Banshee	69
8	Классические градиентные сферические структуры как частные случаи отображения $\chi(b)$	75
9	Основные аппараты электродинамического анализа	90
10	Расширенный набор интегральных характеристик 8-слойной оптимизированной ЛЛ при $k_0a \in \{2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi\}$	117
11	Влияние диэлектрических потерь на интегральные характеристики восьмислойной оптимизированной ЛЛ при $k_0a = 4\pi$	119
12	Численные значения $Q_{\text{bist}}(\theta)$ для 8-слойной ЛЛ и однородной сферы $\epsilon = 2$ при $k_0a = 4\pi$ в опорных точках угла рассеяния	122
13	Численные значения $Q_p(\theta)$ для 8-слойной ЛЛ и однородной сферы $\epsilon = 2$ при $k_0a = 4\pi$ в опорных точках угла рассеяния	124
14	ЛЛ с апертурным излучателем	130
15	ЛЛ с крестообразным вибратором с рефлектором	130
16	Уровень кросс-поляризации в направлении главного лепестка для апертурного (элемент Гюйгенса) и крестообразного облучателей при $k_0a \in [0,01; 12\pi]$ (восьмислойная оптимизированная ЛЛ)	131
17	КНД и КУ ЛЛ с апертурным излучателем	135
18	КНД и КУ ЛЛ с крестообразным облучателем и рефлектором	135
19	Скорость расчётов в HFSS и методом ТФГ на языке Python	140
20	Характеристики рассеяния радиально-анизотропной сферы	152
21	Геометрооптический синтез (школа ИРЭ РАН) и полноволновой анализ ТФГ	154

22	Вторичные характеристики ЛЛ в режиме дифракции для различных размеров	161
23	Попутный и радиолокационный коэффициенты ЛЛ	163
24	Влияние омических потерь на коэффициенты рассеяния ЛЛ	164
25	Коэффициент поляризационных потерь α для многослойной линзы Люнеберга при различных электрических радиусах $k_0 a$ и числе слоёв L	166
26	Выбор параметров слоёв для оптимизированной равношаговой аппроксимации	171
27	Параметры слоёв четырехслойной ЛЛ для различных способов аппроксимации	173
28	Равношаговая оптимизированная аппроксимация	174
29	Параметры многослойных линз Люнеберга для старта оптимизационных расчетов	175
30	Расчет ориентированных сопротивлений четырехслойной ЛЛ	178
31	Профили $n(r/a)$ линзы-дефлектора для различных углов отклонения α , рассчитанные по (4.9) (нормировка $n(a) = 1$)	183
32	Четырёхслойная аппроксимация линзы-дефлектора на $\alpha = 90^\circ$	184
33	Сходимость многослойной аппроксимации профиля $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ к непрерывному закону (оптимизированная равношаговая схема)	189
34	Сходимость MOGA-стратификации профиля $\varepsilon(r) = 2 - (r/a)^2$ к непрерывному закону: совместная оптимизация радиусов и проницаемостей слоёв по постановке (4.1)	189
35	Электродинамическая сходимость двух равношаговых схем заполнения слоёв при $k_0 a = 8\pi$: полное сечение рассеяния σ_s и его отклонение от непрерывного профиля (эталон $L = 256$, расчёт средствами <i>GreenTensor</i>)	191
36	Электродинамическое сравнение схем стратификации при $L = 8$: отклонение характеристик рассеяния от непрерывного профиля	192
37	Характеристики диаграммы направленности ЛЛ в режиме круговой поляризации	197
38	Режимы работы первичных облучателей ММО ЛЛ	203

39	Параметры направленности антенны в вертикальной и горизонтальной плоскостях	211
40	Параметры трёхслойной ЛЛ для линейной решётки $N = 3$	213
41	Влияние размеров проводящего экрана на характеристики антенны .	224
42	Влияние толщины подложки h (фторопласт), $\theta = 30^\circ$	229
43	Влияние толщины подложки h (фторопласт), $\theta = 45^\circ$	229
44	Влияние толщины подложки h (фторопласт), $\theta = 90^\circ$	229
45	Влияние толщины подложки h (стеклотекстолит), $\theta = 30^\circ$	231
46	Влияние толщины подложки h (стеклотекстолит), $\theta = 45^\circ$	231
47	Влияние толщины подложки h (стеклотекстолит), $\theta = 90^\circ$	231
48	Погрешность многослойной аппроксимации профиля $\varepsilon(\tilde{r}) = 2 - (\tilde{r}/a)^2$ тороидной ЛЛ	234
49	Параметры восьмислойной ФДМ-реализации тороидной ЛЛ, $k_0a = 4\pi$	234
50	Масса и время печати тороидной ЛЛ ($k_0a = 4\pi$, $f = 10$ ГГц, $N = 8$, скорость ФДМ $20 \text{ см}^3/\text{ч}$)	235
51	Параметры диаграммы направленности и число фидеров тороидной ЛЛ при $f = 10$ ГГц, эффективности апертуры $\eta = 0,7$	236
52	Сравнение трёх конфигураций линзы Люнеберга при $k_0a = 4\pi$, $f = 10$ ГГц, $N = 8$	237
53	Сечения рассеяния однородных сферических метаматериалов в опорных точках k_0a	242
54	Параметры локализации ближнего поля на оси для четырёх конфигураций при $k_0a = 4\pi$	245
55	Равношаговая аппроксимация профиля ЛЛ при $N = 1-8$ слоях . . .	252
56	Оптимизированная аппроксимация профиля ЛЛ при $N = 1-8$ слоях [26]	253
57	Среднеквадратическая погрешность $\text{RMSE}(\varepsilon^{(N)})$ ступенчатой аппроксимации профиля Люнеберга для равношаговой, оптимизированной (Fuchs) и MOGA-схем при $N = 1-8$ слоях; в двух последних столбцах — снижение погрешности MOGA-стратификации относительно равношаговой и Fuchs-схем . .	254

58	Параметры MOGA-стратификации профиля ЛЛ при $N = 8$ слоях: внешние радиусы слоёв r_l/a , проницаемости ϵ_l и коэффициенты заполнения FDM-печати α_l по логарифмической формуле Лихтенекера для HIPS ($\epsilon_{\max} = 2,4$); область $r > r_8$ — согласующий воздушный слой $\epsilon = 1$	254
59	Сравнение ТФГ и Ansys HFSS для ЛЛ с металлической сферой, $k_0a = 4\pi$, $N = 6$, $f = 10$ ГГц	258
60	Управление обратным сечением рассеяния ЛЛ центральным металлическим ядром, $k_0a = 4\pi$, $N = 6$	260
61	Прикладные сценарии использования линз-дефлекторов	263
62	Оценка ϵ материала методом <i>линии передачи</i>	276
63	Пример заполнения исходного материала <i>PLA</i>	280
64	Характеристики слоёв ЛЛ	285
65	Целевые параметры ЭПР для ЛЛ с металлическим экраном и рост суммарной ЭПР при нескольких переотражателях	291
66	Параметры слоёв ЛЛ из пенопласта переменной плотности: относительные (a , ϵ) и реальные (диаметр, k_0a)	292
67	Параметры заполнения слоёв ЛЛ пустотами	295
68	Расчётные параметры кубических пустот для трёхслойной ЛЛ из HIPS ($D = 73$ мм, $f = 10$ ГГц, $\epsilon_m = 2,4$)	303
69	Параметры заполнения слоёв ЛЛ пустотами	312
70	Конструкция ЛЛ с экраном из пенопласта переменной плотности	315
71	Триада «плоскость — цилиндр — сфера»: соответствие элементов аппарата ТФГ	325
72	Wronskian-комбинации C, C', S, S' в формуле (9.12) по геометриям	326
73	Сводка элементов трёх типов сшивания полей в декомпозиционном методе	341
74	Линза над проводящей плоскостью: точность решения и вклад внедиагональных блоков глобальной СЛАУ	357
75	Состав репозитория GreenTensor и связь с разделами	363
76	Эталонные задачи в файле <code>examples.json</code>	366
77	Точность нейросетевого суррогата <i>GreenTensor</i> на отложенной выборке	369

78	Дорожная карта развития библиотеки GreenTensor	371
79	Параметры задачи для <i>металлической сферы в вакууме</i>	372
80	Линза Люнеберга в вакууме	373
81	Металлическая сфера с диэлектрическим покрытием в вакууме . . .	374
82	Параметры задачи для линзы Люнеберга в вакууме	377
83	Состав папки Example 2 репозитория GreenTensor	382
84	Сопоставление вычислительных затрат: библиотека GreenTensor (ТФГ) и Ansys HFSS (FEM)	392
85	Масштабируемость ТФГ-расчёта восьмислойной линзы Люнеберга: порядок усечения по Уискомбу, время одиночного расчёта диаграммы (одно ядро, без распараллеливания) и нормированное полное сечение в зависимости от электрического размера	393
86	Сопоставление методов электродинамического анализа для многослойных сферических структур	396
87	Единицы измерения в электродинамике	413
88	Параметры стратифицированного профиля линзы Люнеберга для различных уровней аппроксимации	457
89	Коэффициенты сред, Mn , Nn — определяют свойства материалов через сопротивления и проводимости материалов. В них же определяется тип первичного источника излучения электромагнитного поля.	460
90	Антенные характеристики линзы Люнеберга с элементарным облучателем	462
91	Публикации по теме ЛЛ на сайте <i>ieeexplore.ieee.org</i>	465
92	Количество патентов в базах, связанных с линзами Люнеберга . . .	468
93	Научно-популярные материалы автора на портале «Клуб пользователей САЕ»	475

Приложение А

Примеры программного кода

А.1 Пример расчёта слоёв линзы Максвелла на языке Python

Линза Максвелла — это тип градиентной линзы, в которой показатель преломления плавно изменяется в зависимости от расстояния до центра, что обеспечивает фокусировку электромагнитных волн по особым траекториям. Конструкция этой линзы основывается на решениях уравнений Максвелла и является примером устройства с градиентной оптикой, где показатель преломления $n(r)$ меняется в зависимости от радиуса r .

В случае цилиндрической линзы Максвелла параметры высоты h , диаметра d и диэлектрической проницаемости ϵ_r изменяются по определённым законам в зависимости от слоя. Линза Максвелла имеет градиентное распределение показателя преломления, что может быть описано следующей формулой для изменения показателя преломления n в зависимости от радиуса r :

$$n(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}}, \quad (\text{A.1})$$

где: r - расстояние до центра сферы;

R - радиус сферы.

Для линзы Максвелла диэлектрическая проницаемость ϵ_r связана с показателем преломления n следующим образом:

$$\epsilon_r = n^2, \quad (\text{A.2})$$

таким образом параметры h , d , ϵ_r варьируются в зависимости от слоя. Пример кода на Python для вычисления этих параметров А.1.

Аналогичный расчёт параметров линзы Максвелла на языке MATLAB (с построением графиков $n(r)$ и $\epsilon_r(r)$) входит в состав исходных кодов диссертации (`listings/maxwellmatlab.m`).

Расчет диаграммы рассеяния для дифракционной задачи при облучении линзы Люнеберга полем линейной поляризации производится на языке *MATLAB*; начальный фрагмент скрипта с постановкой задачи и основным

Листинг A.1: Пример расчёта параметров для линзы Максвелла на языке Python

```

import numpy as np

# Задаем радиус линзы Максвелла и количество слоев
R = 6.36 # максимальный радиус линзы (мм)
5 layers = 6

# Функция для вычисления показателя преломления и диэлектрической проницаемости
def calculate_parameters(layer, total_layers, max_radius):
# Определяем радиус слоя (линейное распределение радиусов)
10 r = (layer / total_layers) * max_radius
# Рассчитываем показатель преломления
n = 1 / np.sqrt(1 + (r / max_radius)**2)
# Рассчитываем диэлектрическую проницаемость
eps_r = n**2
15 # Вычисляем высоту и диаметр слоя
h = 0.22 + (layer - 1) * 0.2 # условное увеличение на 0.2 мм для приме
ра
d = 2.08 + (layer - 1) * 1.46 # условное увеличение на 1.46 мм для при
мера
return h, d, eps_r

20 # Выводим результаты для всех слоев
for layer in range(1, layers + 1):
h, d, eps_r = calculate_parameters(layer, layers, R)
print(f"Layer {layer}: h = {h:.2f} mm, d = {d:.2f} mm, \\varepsilon_r =
{eps_r:.2f}")

```

циклом по модам приведён в A.2, полный текст (исторический MATLAB-аналог Python-реализации ТФГ) размещён в составе исходных кодов диссертации (listings/LLdifractionLinPolar.m).

Листинг A.2: Дифракция поля линейной поляризации на ЛЛ, MATLAB (начальный фрагмент)

```

\begin{lstlisting}[language=Matlab]
%clear;
Start = cputime;
toch=16;
5 k0=4*pi;

eps=[50.08 - 1.391i, 1];
miy=[1, 1];
a=[0.5, 1];

```

```

10 | teta=0.01:pi/180:2*pi;
    |
    | for i=1:toch
    |
15 |     M=legendre(i,cos(teta));
    |
    |     Lm0=M(1,:);
    |     Lm1=M(2,:);
    |         if i<2
    |
20 |     Lm2=0;
    |         else
    |     Lm2=M(3,:);
    |         end
    |
    |     for z=1:length(teta)
    |         if teta(z) > 0 & teta(z) < pi
    |             pii(i,z)=((1)*Lm1(z))./sin(teta(z));
    |         elseif teta(z) > pi & teta(z) < 2*pi
    |             pii(i,z)=((-1)*Lm1(z))./sin(teta(z));
    |
30 |         end
    |     end
    |
    |     for z=1:length(teta)
    |         if i<2
35 |     Lm2(z)=0;
    |         end
    |         tay(i,z)=(1/2)*(Lm2(z)-i*(i+1)*Lm0(z));
    |     end
    |
40 | end
    |
    | for m=1:length(eps);
    |     alfa(m)=atan(imag(eps(m))./real(eps(m)));
45 | end

```

А.2 Исходный код Python-модуля decomposition (метод декомпозиции произвольных структур)

Python-модуль `decomposition`, реализующий метод декомпозиции произвольных кусочно-координатных электродинамических структур (глава 9, положение 1, выносимое на защиту), размещён в составе исходных кодов диссертации в директории `_dissSource/codeSource/python_calc/decomposition/` и в открытом репозитории библиотеки *GreenTensor* [46] (документация и онлайн-версия — на сайте greentensor.ru). Модуль организован вокруг трёх клас-

сов канонических подобластей (`PlanarTGF`, `CylindricalTGF`, `SphericalTGF`) с единой сигнатурой рекуррентного пересчёта направленных импедансов и адмитансов, общего класса `coupling` для сшивания тангенциальных компонент электромагнитного поля на интерфейсах разной координатной симметрии (плоск. $\leftrightarrow$ сфера, сфера $\leftrightarrow$ цил., цил. $\leftrightarrow$ плоск.) и демонстрационного скрипта `aircraft_example.py` с примером расчёта декомпозиции для геометрии летательного аппарата. Корректность реализации диагональных блоков СЛАУ проверена на формулах Френеля одиночной границы с точностью $3,9 \cdot 10^{-16}$, на классическом ряду Ми однородной сферы со сходимостью хвоста до $\sim 10^{-18}$ и на многослойной аппроксимации линзы Люнеберга со сходимостью до $\sim 10^{-22}$.

Ниже приведены ключевые фрагменты, демонстрирующие архитектуру модуля; полные исходные тексты всех модулей (`planar_tgf.py`, `cylindrical_tgf.py`, `spherical_tgf.py`, `coupling.py`, `decomposition.py`, `aircraft_example.py`) доступны по указанным выше адресам. Листинг А.3 показывает интерфейс класса сферической ТФГ-подобласти — три остальных класса (`PlanarTGF`, `CylindricalTGF`) построены по той же сигнатуре, отличаясь лишь набором специальных функций (тангенсы плоских волн, цилиндрические функции Бесселя–Ханкеля). Листинг А.4 показывает сигнатуру аппарата сшивания модальных базисов.

Листинг А.3: Интерфейс класса сферической ТФГ-подобласти (`spherical_tgf.py`, единая сигнатура для всех трёх типов подобластей)

```

class SphericalTGF:
    """Multilayer spherical TGF.

    Parameters
    -----
    eps : sequence of complex, length L+1
        Relative permittivity in each region: [layer_0_inner, ..., layer_{L-1},
50         outer_medium].
    mu : sequence of complex, length L+1
        Relative permeability of each region.
    a : sequence of float, length L
        Outer radii of each layer (m).
55
    n_max : int
        Maximum order of the spherical multipole expansion.
    """
    eps: Sequence[complex]
    mu: Sequence[complex]
65
    a: Sequence[float]
    n_max: int = 30

```

Листинг А.4: Сигнатура аппарата сшивания модальных базисов на плоско-сферическом интерфейсе (`coupling.py`); аналогично определены сферо-цилиндрическое и цилиндро-плоское ядра

```

def rayleigh_plane_to_sphere(E0: np.ndarray, k_inc: np.ndarray,
                             n_max: int) -> tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
    """Rayleigh expansion of a plane wave in spherical vector harmonics.

    Given an incident plane wave  $E(r) = E0 * \exp(-j k\_inc \cdot r)$ , returns
    the expansion coefficients  $(\alpha_n, \beta_n)$  such that

        
$$E(r) = \sum_{\{n,m\}} [\alpha_{\{n,m\}} M_{\{n,m\}}^{\{(1)\}}(r) + \beta_{\{n,m\}} N_{\{n,m\}}^{\{(1)\}}(r)],$$


    where  $M, N$  are the regular spherical vector harmonics with the
    Riccati-Bessel  $j_n$  radial dependence.

```

Демонстрационный скрипт декомпозиционного расчёта на геометрии летательного аппарата (А.5) — приведён начальный фрагмент с постановкой задачи; полный текст — в репозитории.

Листинг А.5: Демонстрационный пример декомпозиционного расчёта на геометрии летательного аппарата (`aircraft_example.py`, начальный фрагмент)

```

"""Worked example: decomposition method on an axisymmetric aircraft-like
body.

Geometry:

    <-- incident plane wave (along +z, polarised x)

                                tail
o=====|=====|
^         ^                     ^         ^
nose      body cylinder          ring      plane
disk
sphere    radius R_b, height H_b      (interface)
radius R_n
(hemisphere, axis along z)

The structure is decomposed into three canonical subdomains:

Omega_S : spherical nose (radius R_n)      -> SphericalTGF
Omega_C : cylindrical body                  -> CylindricalTGF
Omega_P : flat tail disk + half-space behind -> PlanarTGF

with two interdomain interfaces:

Gamma_SC : sphere-to-cylinder, at z = R_n      (radius rho = R_b)
Gamma_CP : cylinder-to-plane, at z = R_n+H_b (rho <= R_b)

```

```

25 | For axisymmetric incidence (plane wave along the axis, x-polarization) the
    | problem decouples drastically: only  $m = \pm 1$  spherical modes contribute,
    | only
    |  $m = 0, 1$  cylindrical modes are excited, and the plane wave reaching the tail
    | is essentially the original plane wave plus a forward-scattered correction
    | from the body. This script computes the three subdomain "diagonal-block"
30 | quantities -- it does NOT close the three-way matching loop; that is part
    | of the planned GreenTensor extension. What it does demonstrate is that
    | each subdomain contribution is well-defined, finite, computable in
    | fractions
    | of a second, and consistent with classical limits.

35 | Units: SI throughout. Frequency 10 GHz,  $\lambda_0 = 30$  mm.
    | """
    | from __future__ import annotations
    | import json
    | import sys
40 | from pathlib import Path

```

Приложение Б

Терминология, параметры слоёв и стратификации линзы Люнеберга

Б.1 Соглашение о терминологии

В отечественной научной литературе, посвященной линзовым антеннам Люнеберга, можно встретить написание фамилии немецкого автора R.K. Lüneburg на русском языке как Люнебург. В ряде англоязычных научных статей также встречается двойное написание этой фамилии, а именно Luneburg и Luneberg. Например, в цифровой библиотеке *IEEE Xplore* соотношение между этими написаниями примерно одинаково. Оба написания следует считать допустимыми. В настоящей работе написание фамилии **не унифицируется**: при упоминании конкретных исследований оно сохраняется таким, как его используют авторы цитируемых источников, а при нейтральном (не привязанном к источнику) упоминании применяется традиционное написание **Люнеберг**, принятое в ряде классических отечественных учебников [7]. Такой подход оправдан тем, что в современной литературе оба варианта встречаются примерно поровну. При выборе нейтрального варианта учитывается также то, что приставка «берг» в русском языке свойственна написанию окончаний фамилий, а «бург» – названий городов, хотя встречаются и исключения. Например, Люнебург (Lüneburg) – ганзейский немецкий город в Нижней Саксонии, в 50 км к юго-востоку от Гамбурга. Через город Люнебург протекает река Ильменау, приток Эльбы. Пример в качестве исключения – Илья Григорьевич Эренбург, известный писатель, поэт, публицист, журналист.

В большинстве публикаций автор диссертации также придерживается немецкой транскрипции в написании фамилии ученого R.K. Люнеберга. Однако, среди работ автора можно встретить и расхождение в написании фамилии Люнеберга. Этот факт зачастую был связан с рекомендациями внешних рецензентов придерживаться англоязычной транскрипции. Автор убежден, что обе точки зрения имеют право на существование, поэтому в настоящей работе оба написания сосуществуют по описанному выше принципу: нейтральные упоминания — в немецкой транскрипции (**Люнеберг**), а привязанные к конкретным источникам — в написании соответствующих авторов.

Б.2 Параметры слоёв линзы Люнеберга

В настоящем приложении приведена расширенная таблица параметров слоёв линзы Люнеберга для двух схем стратификации профиля — равношаговой и оптимизированной. Для каждой конфигурации указаны нормированные радиусы слоёв a и соответствующие значения диэлектрической проницаемости ϵ , а также подготовленные векторные представления этих параметров, непосредственно совместимые с форматом входных данных расчётной библиотеки *GreenTensor*.

Полный набор параметров сведён в таблице 88. Приведённый набор данных служит справочным материалом для инженера-разработчика при численном моделировании линзовых структур, параметрических исследованиях и оптимизационных расчётах. Таблица позволяет быстро сопоставить различные уровни дискретизации $L = 2 \dots 10$ и выбрать подходящую аппроксимацию исходного непрерывного профиля для конкретной задачи, а также служит готовым шаблоном при проектировании градиентно-диэлектрических структур и подготовке входных данных для САД-пакетов электродинамического моделирования.¹

Таблица 88 — Параметры стратифицированного профиля линзы Люнеберга для различных уровней аппроксимации

L, слои	a	ϵ	Вектор-представление для <i>GreenTensor</i>
Равношаговая стратификация профиля линзы			
1	0,5	0,75	$a = [0.5, 1]; \epsilon = [0.75, 1]; \mu = [1, 1] \ (n = 2)$
2	0,333; 0,667	1,889; 1,556	$a = [0.333, 0.667, 1]; \epsilon = [1.889, 1.556, 1]; \mu = [1, 1, 1] \ (n = 3)$
3	0,25; 0,5; 0,75	1,938; 1,75; 1,438	$a = [0.25, 0.5, 0.75, 1]; \epsilon = [1.938, 1.75, 1.438, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1] \ (n = 4)$
4	0,2; 0,4; 0,6; 0,8	1,96; 1,84; 1,64; 1,36	$a = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]; \epsilon = [1.96, 1.84, 1.64, 1.36, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1] \ (n = 5)$

¹О записи десятичных дробей. В основном тексте работы, включая колонки a и ϵ настоящей таблицы, десятичным разделителем служит *запятая* согласно ГОСТ 8.417-2002. В последней колонке — «Вектор-представление» — намеренно сохранена *точка*: эти строки являются готовыми входными данными и рассчитаны на копирование в библиотеку *GreenTensor* (списки **a**, **eps**, **miu** конструктора) и в командную строку *Ansys HFSS* без ручной правки разделителя. То же соглашение действует далее везде, где приводятся строки, предназначенные для непосредственной вставки в САПР.

Продолжение таблицы 88

L, слои	a	ε	Вектор-представление для <i>GreenTensor</i>
5	0,167; 0,333; 0,5; 0,667; 0,833	1,972; 1,889; 1,75; 1,556; 1,306	$a = [0.167, 0.333, 0.5, 0.667, 0.833, 1]; \varepsilon = [1.972, 1.889, 1.75, 1.556, 1.306, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 6)$
6	0,143; 0,286; 0,429; 0,571; 0,714; 0,857	1,98; 1,918; 1,816; 1,673; 1,49; 1,265	$a = [0.143, 0.286, 0.429, 0.571, 0.714, 0.857, 1]; \varepsilon = [1.98, 1.918, 1.816, 1.673, 1.49, 1.265, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 7)$
7	0,125; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875	1,984; 1,938; 1,859; 1,75; 1,609; 1,438; 1,234	$a = [0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1]; \varepsilon = [1.984, 1.938, 1.859, 1.75, 1.609, 1.438, 1.234, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 8)$
8	0,111; 0,222; 0,333; 0,444; 0,556; 0,667; 0,778; 0,889	1,988; 1,951; 1,889; 1,802; 1,691; 1,556; 1,395; 1,21	$a = [0.111, 0.222, 0.333, 0.444, 0.556, 0.667, 0.778, 0.889, 1]; \varepsilon = [1.988, 1.951, 1.889, 1.802, 1.691, 1.556, 1.395, 1.21, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 9)$
Оптимизированная стратификация профиля линзы			
1	0,82	1,67	$a = [0.82, 1]; \varepsilon = [1.67, 1]; \mu = [1, 1] (n = 2)$
2	0,63; 0,89	1,8; 1,4	$a = [0.63, 0.89, 1]; \varepsilon = [1.8, 1.4, 1]; \mu = [1, 1, 1] (n = 3)$
3	0,53; 0,75; 0,93	1,86; 1,57; 1,28	$a = [0.53, 0.75, 0.93, 1]; \varepsilon = [1.86, 1.57, 1.28, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1] (n = 4)$
4	0,47; 0,67; 0,82; 0,94	1,88; 1,67; 1,44; 1,22	$a = [0.47, 0.67, 0.82, 0.94, 1]; \varepsilon = [1.88, 1.67, 1.44, 1.22, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1] (n = 5)$
5	0,43; 0,60; 0,74; 0,85; 0,95	1,91; 1,73; 1,55; 1,36; 1,18	$a = [0.43, 0.60, 0.74, 0.85, 0.95, 1]; \varepsilon = [1.91, 1.73, 1.55, 1.36, 1.18, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 6)$
6	0,39; 0,56; 0,68; 0,78; 0,88; 0,96	1,93; 1,77; 1,61; 1,46; 1,31; 1,16	$a = [0.39, 0.56, 0.68, 0.78, 0.88, 0.96, 1]; \varepsilon = [1.93, 1.77, 1.61, 1.46, 1.31, 1.16, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 7)$
7	0,37; 0,52; 0,63; 0,73; 0,82; 0,89; 0,97	1,93; 1,80; 1,67; 1,53; 1,40; 1,27; 1,13	$a = [0.37, 0.52, 0.63, 0.73, 0.82, 0.89, 0.97, 1]; \varepsilon = [1.93, 1.80, 1.67, 1.53, 1.40, 1.27, 1.13, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 8)$
8	0,34; 0,49; 0,59; 0,69; 0,77; 0,84; 0,91; 0,97	1,94; 1,82; 1,71; 1,59; 1,47; 1,35; 1,24; 1,12	$a = [0.34, 0.49, 0.59, 0.69, 0.77, 0.84, 0.91, 0.97, 1]; \varepsilon = [1.94, 1.82, 1.71, 1.59, 1.47, 1.35, 1.24, 1.12, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 9)$
Параметры ЛЛ для старта оптимизационных расчётов [77]			
4	0,5; 0,75; 0,88	1,92; 1,61; 1,23	$a = [0.5, 0.75, 0.88, 1]; \varepsilon = [1.92, 1.61, 1.23, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1] (n = 4)$

Продолжение таблицы 88

L, слои	a	ε	Вектор-представление для <i>GreenTensor</i>
5	0,4; 0,6; 0,8; 0,9	1,93; 1,75; 1,51; 1,19;	$a = [0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1]; \varepsilon = [1.93, 1.75, 1.51, 1.19, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1] (n = 5)$
6	0,33; 0,5; 0,67; 0,83; 0,92	1,96; 1,83; 1,66; 1,44; 1,15	$a = [0.33, 0.5, 0.67, 0.83, 0.92, 1]; \varepsilon = [1.96, 1.83, 1.66, 1.44, 1.15, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 6)$
7	0,37; 0,5; 0,62; 0,75; 0,87; 0,94	1,93; 1,81; 1,69; 1,53; 1,35; 1,12	$a = [0.37, 0.5, 0.62, 0.75, 0.87, 0.94, 1]; \varepsilon = [1.93, 1.81, 1.69, 1.53, 1.35, 1.12, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 7)$
8	0,33; 0,44; 0,56; 0,67; 0,78; 0,89; 0,95	1,94; 1,82; 1,71; 1,56; 1,39; 1,19; 1,1	$a = [0.33, 0.44, 0.56, 0.67, 0.78, 0.89, 0.95, 1]; \varepsilon = [1.94, 1.82, 1.71, 1.56, 1.39, 1.19, 1.1, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 8)$
9	0,22; 0,33; 0,44; 0,56; 0,67; 0,78; 0,89; 0,95	2, 1,94; 1,87; 1,77; 1,64; 1,48; 1,29; 1,1;	$a = [0.22, 0.33, 0.44, 0.56, 0.67, 0.78, 0.89, 0.95, 1]; \varepsilon = [2, 1.94, 1.87, 1.77, 1.64, 1.48, 1.29, 1.1, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 9)$
10	0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,95	1,98; 1,94; 1,88; 1,8; 1,7; 1,58; 1,44; 1,28; 1,1	$a = [0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 1]; \varepsilon = [1.98, 1.94, 1.88, 1.8, 1.7, 1.58, 1.44, 1.28, 1.1, 1]; \mu = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] (n = 10)$

Б.3 Использование коэффициентов сред в *Tensor Green Function*

В таблице 89 собраны коэффициенты сред M_n, N_n , которые одновременно задают электрофизические параметры слоистой структуры (через ориентированные импедансы $\overleftarrow{Z}_n(a)$ и адмитансы $\overleftarrow{Y}_n(a)$, рассчитываемые рекуррентным пересчётом по слоям) и тип первичного облучателя. Форма коэффициентов зависит как от типа источника, так и от постановки задачи. В *дифракционной* задаче (рассеяние, источник в дальней зоне $r' \rightarrow \infty$ либо на поверхности $r = a$) знаменатель содержит множитель $j\overleftarrow{Z}(a)h_n(k_0a)$. В *антенной* задаче (точечный облучатель круговой поляризации на поверхности линзы) знаменатель принимает вид $j\overleftarrow{Z}_n(a)h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)$, а сам коэффициент раскладывается на синфазную и квадратурную составляющие $M_n = M'_n + jM''_n$ (штрих — основное плечо на радиусе a , два штриха — вклад рефлектора на радиусе a_r).

Таблица 89 — Коэффициенты сред, Mn, Nn — определяют свойства материалов через сопротивления и проводимости материалов. В них же определяется тип первичного источника излучения электромагнитного поля.

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
Диполь Герца	Дифракц. задача, $r' \rightarrow \infty$	$M_n = \frac{j\overleftarrow{Z}(a)}{j\overleftarrow{Z}(a) \cdot h_n(k_0a)}$ $N_n = \frac{j}{j\overleftarrow{Y}(a) \cdot h_n(k_0a)}$
Элемент Гюйгенса	Дифракц. задача; источник на $r = a$	$M_n = \frac{\overleftarrow{Z}(a) - j}{j\overleftarrow{Z}(a) \cdot h_n(k_0a)}$ $N_n = \frac{\overleftarrow{Y}(a) - j}{j\overleftarrow{Y}(a) \cdot h_n(k_0a)}$
Кресто- образный вибратор с рефлектором	Антенная задача, КП; a_r — рефлектор	$M'_n = \frac{j\overleftarrow{Z}_n(a)}{j\overleftarrow{Z}_n(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)}$ $N'_n = \frac{1}{j\overleftarrow{Y}_n(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)}$ $M''_n = \frac{j\overleftarrow{Z}_n(a_r)}{j\overleftarrow{Z}_n(a_r) \cdot h_n(k_0a_r) - h'_n(k_0a_r)}$ $N''_n = \frac{1}{j\overleftarrow{Y}_n(a_r) \cdot h_n(k_0a_r) - h'_n(k_0a_r)}$

продолжение следует

Продолжение таблицы 89

Имя	Стартовый диапазон параметров	Функция
Апертурный излучатель (рупор, открытый конец волновода)	Антенная задача; однонаправл. излучение	$M'_n = \frac{j\overset{\leftarrow}{Z}_n(a) - i}{j\overset{\leftarrow}{Z}_n(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)}$ $N'_n = \frac{j\overset{\leftarrow}{Y}_n(a) - i}{j\overset{\leftarrow}{Z}_n(a) \cdot h_n(k_0a) - h'_n(k_0a)}$ $M''_n = 0, \quad N''_n = 0$

Приведённые в таблице выражения выведены в главе 6: для диполя Герца — (2.38), для элемента Гюйгенса — (2.47), для крестообразного вибратора с рефлектором — (2.49), для апертурного излучателя — (2.50). Все четыре формы получены в единой нотации ориентированных импедансов и адмитансов и численно проверены в исходных расчётных программах автора (MATLAB/MATNCAD), где они использовались как взаимозаменяемые модели возбудителя при сравнении диаграмм направленности и рассеяния.

Турникетный (двухкрестовый) облучатель круговой поляризации в таблице отдельной строкой не выносится: его коэффициенты получаются *суперпозицией* двух крестообразных вибраторов, повернутых друг относительно друга на $\pi/4$ и возбуждаемых со сдвигом фаз $\pi/2$, то есть линейной комбинацией строк «крестообразный вибратор с рефлектором» с соответствующими азимутальными множителями. Подробное обсуждение выбора первичного облучателя линзы Люнеберга в режиме круговой поляризации, включая турникетную схему, приведено в монографии автора [61].

Б.4 Влияние стратификации на характеристики линзы Люнеберга

С увеличением количества слоёв линзы Люнеберга закон изменения диэлектрической проницаемости с большей степенью точности удовлетворяет условиям закона Люнеберга (1.1). Многослойная стратификация является при-

ближённным подходом. С возрастанием количества слоёв происходит увеличение точности приближения к указанному закону. Однако при этом существенно возрастают затраты машинного времени на расчёт характеристик антенны.

Кроме того, многослойная аппроксимация при умеренных значениях диэлектрической проницаемости материала усложняет инженерную реализацию линзы. Тем не менее, для создания оптимального уровня стратификации необходимо показать влияние этого фактора на основные антенные характеристики устройства [59; 75].

Для того чтобы оценить влияние уровня стратификации линзы Люнеберга на её антенные характеристики, был произведён расчёт многослойной модели линзы Люнеберга с электрическими размерами $k_0 a = 2\pi, 6\pi, 8\pi$. Переменным параметром являлось количество слоёв (от 1 до 20). В качестве облучателя рассматривался источник однонаправленного излучения круговой поляризации в виде апертурного излучателя.

Также в качестве примера нами была численно исследована модель однородного диэлектрического шара с соответствующими электрофизическими параметрами. В таблице 90 представлены основные антенные характеристики линзовой антенны при различном количестве слоёв. Указанные в таблице параметры могут выступать в качестве ориентировочных *нижних* возможных значений эффективности линзы.

Таблица 90 — Антенные характеристики линзы Люнеберга с элементарным облучателем

	L	$2\Delta\theta_{-3\text{dB}}^\circ$	$2\Delta\theta_{-10\text{dB}}^\circ$	η_1 , дБ	$E_{\text{КП}}^{\text{макс}}$, дБ	$D(\pi)$, дБ	G, дБ
2π	1	20	36	-5,3	-15,76	6,87	7,2
2π	3	19,4	32,4	-10,4	-29,14	9,87	10,1
2π	6	19,4	31,8	-10,5	-28,46	10,78	11,1
2π	8	18,8	31,8	-10,57	-27,91	11,02	11,2

В таблице 90:

- L — количество слоёв ЛЛ,
- $2\Delta\theta_{-3\text{dB}}$ — ширина диаграммы направленности по уровню -3 дБ,
- $2\Delta\theta_{-10\text{dB}}$ — ширина диаграммы направленности по уровню -10 дБ,
- η_1 — уровень первого бокового лепестка,
- $E_{\text{КП}}^{\text{макс}}$, дБ — максимальный уровень кросс — поляризационной состав-

ляющей поля, определяется по отношению к уровню максимального излучения по ОП,

- D , дБ - КНД,
- G , дБ - КУ.

Для того, чтобы более наглядно можно было проследить зависимость коэффициента направленного действия ЛЛ от уровня стратификации, на рисунке Б.1 приведены графики КНД $D = f(L)$ где L – количество слоёв линзы. Графики приведены для равношаговой аппроксимации профиля линзы, так как это позволяет исследоваться большие значения числа разбиения чем при оптимизированной.

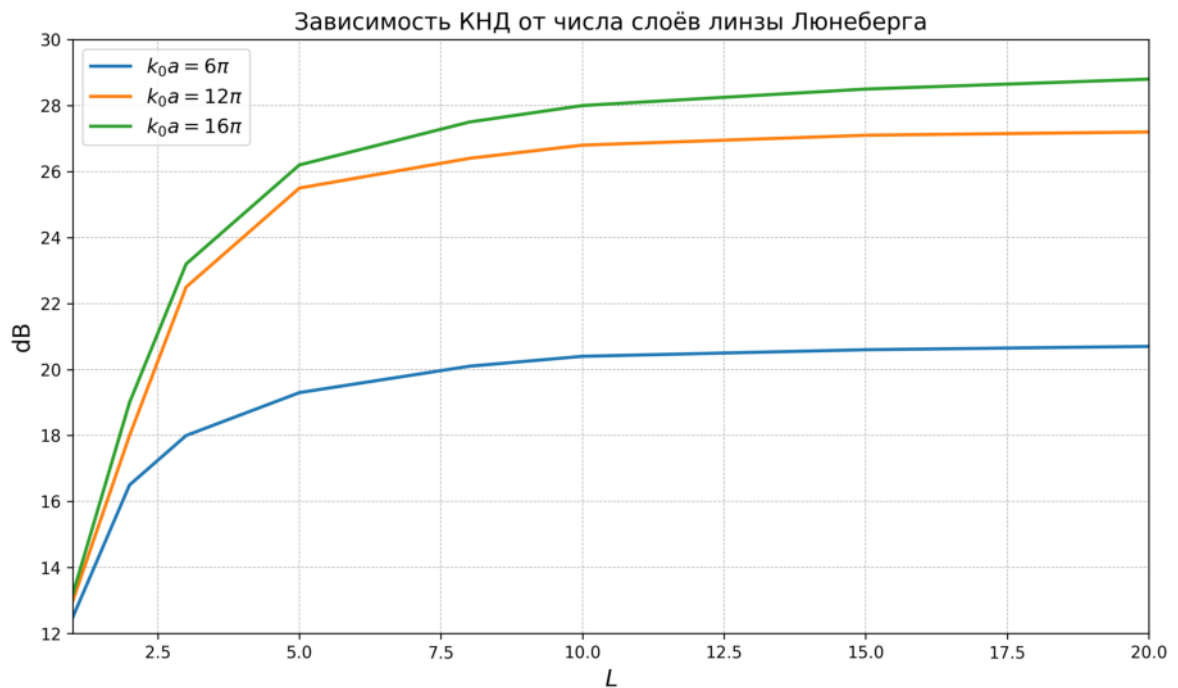


Рисунок Б.1 — Зависимость КНД от числа слоёв линзы Люнеберга

Приведённая зависимость получена для трёх значений электрического размера. Расширенный набор кривых, рассчитанный библиотекой *GreenTensor* в антенном режиме (`problem="antenna"`), приведён на рисунке Б.2 для девяти значений k_0a и для обеих поляризаций возбуждения.

Модель облучателя при этом предельно упрощена: источник *точечный*, единичной амплитуды, расположен на поверхности линзы. Такой источник не обладает собственной направленностью и облучает раскрыв неэффективно — значительная доля мощности уходит мимо линзы. Поэтому получаемые значения КНД следует трактовать как *нижнюю границу*: реальный облучатель

(открытый конец волновода, рупор, печатный излучатель), формирующий направленное освещение раскрыва, даёт КНД заметно выше при той же геометрии линзы. Верхняя граница задаётся пределом Харрингтона $D_{\max} = (k_0 a)^2 + 2k_0 a$ (см. (1.14)) и нанесена на рисунок пунктиром для каждого $k_0 a$; ни одна из рассчитанных кривых её не превышает, что служит независимой проверкой корректности расчёта.

Характер насыщения одинаков для обеих поляризаций: основной прирост КНД приходится на первые 5...8 слоёв, далее кривые выходят на пологий участок с остаточной рябью 0,1...0,4 дБ, обусловленной интерференцией отражений от границ слоёв. Круговая поляризация систематически даёт КНД на 1,5...1,7 дБ ниже линейной за счёт перекачки части мощности в кросс-поляризационную составляющую. Расчётный модуль — `b2_directivity_vs_layers.py` в `_dissSource/codeSource/python_calc/regression_tests/`, численные значения сохранены в одноимённом CSV-файле.

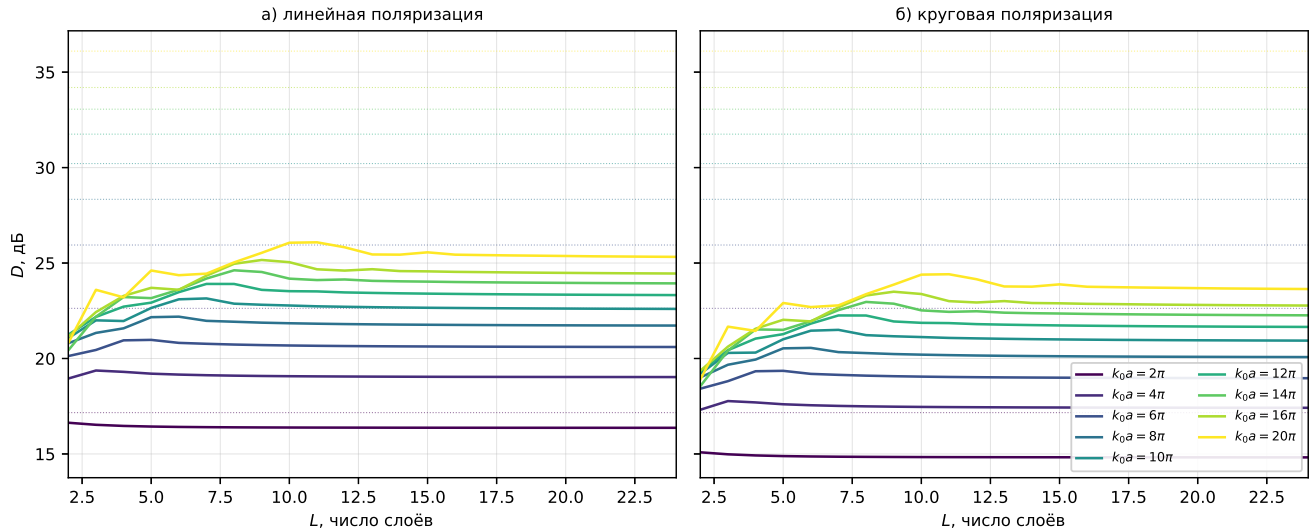


Рисунок Б.2 — Зависимость КНД линзы Люнеберга от числа слоёв равношаговой стратификации при возбуждении точечным источником единичной амплитуды: *а)* линейная поляризация, *б)* круговая поляризация. Пунктиром — предел Харрингтона для соответствующего $k_0 a$. Расчёт библиотекой *GreenTensor*, антенный режим

Б.5 Историко-библиометрический обзор линз Люнеберга

В настоящем приложении приведены статистические данные о публикационной и патентной активности по тематике линз Люнеберга в период 1944–2024 гг., выгруженные из открытых баз *IEEE Xplore*, *patents.google.com* и *worldwide.espacenet.com*. Содержательная часть истории создания линзы Люнеберга и предшествующих сферических линз (Дж. К. Максвелл, 1854; J. Brown и A. S. Gutman, 1954; S. P. Morgan, 1958, 1959; W. Stettler, 1955; Г. Т. Марков, 1960) приведена в основной части главы 1, раздел 1.2; в настоящем приложении она дополняется библиометрической оценкой темпов и географии исследовательского интереса.

Публикационная активность по данным IEEE Xplore

Распределение публикаций IEEE Xplore, индексируемых по ключевым словам *Luneburg Lens* и *Luneberg Lens* (учтены оба варианта транскрипции фамилии, см. приложение Б.1), приведено в таблице 91. Статистика выгружена 30.04.2026; общее число публикаций по обоим вариантам написания за период 1944–2024 составляет $1781 + 325 = 2106$ записей.

Таблица 91 — Публикации по теме ЛЛ на сайте *ieeexplore.ieee.org*

Год	Luneburg	Luneberg	Тематика исследований
1944–1949	-	-	С 1944 года, момента описания свойств диэлектрической линзы Р. К. Люнебергом, до 1951 года включительно встречается описание металлических линз для задержки электромагнитных волн и их преобразования в волноводах (по ключевым словам <i>Lens Antenna</i> и <i>Microwave Lens</i>)
1950–1959	17	-	Описание линзы Люнеберга в качестве системы сканирования, описание характеристик рассеяния. Описание возможности ступенчатой реализации, описание работы, конструкции и дизайна ЛЛ. До 1952 года материалы с ключевыми словами <i>Luneberg Lens</i> не встречаются

Продолжение таблицы 91

Год	Luneburg	Luneberg	Тематика исследований
1960–1969	10	14	Описание работы линзовой антенны в радиодиапазоне, получение картин прохождения лучей в линзе, попытки создать линзу Люнеберга из доступных на тот момент материалов (например, из проводящей сетки). До 1961 года материалы с ключевыми словами <i>Luneburg Lens</i> не встречаются
1970–1989	10	6	Продолжение работ по расчёту характеристик ЛЛ, разработка новых подходов к реализации линзы из однородных диэлектрических слоёв, публикации по применению ЛЛ в радиолокационных отражателях и системах связи
1990–1999	11	9	Рассмотрение подходов к проектированию на основе генетических алгоритмов, расчёт антенных и электродинамических характеристик, получение полей для различных вариантов работы (при различной поляризации)
2000–2004	14	1	Разработка и улучшение методов изготовления и материалов для линз с целью улучшения их производительности в высокочастотных применениях, таких как антенны и системы микроволновой связи. Акцент сделан на достижение лучшей фокусировки и минимизации потерь при передаче сигналов. Кроме того, изучены новые композитные материалы и методы производства, позволяющие создавать линзы с градиентным показателем преломления
2005–2009	23	10	Исследования сосредоточились на улучшении характеристик ЛЛ, интеграции в антенны и радары для повышения направленности и чувствительности, а также на оптимизации конструкции и материалов, включая метаматериалы и композиты, для создания более эффективных и долговечных линз

Продолжение таблицы 91

Год	Luneburg	Luneberg	Тематика исследований
2010–2014	80	11	Активные исследования по использованию метаматериалов для улучшения характеристик линз Люнеберга: коэффициента усиления и уменьшение потерь сигнала. Усовершенствование методов производства, включая 3D-печать, позволяет создавать более сложные и точные структуры линз Люнеберга. Интеграция ЛЛ в различные системы антенн и радаров
2015–2019	173	86	Исследования сосредоточены на улучшении характеристик антенн и радаров, применении метаматериалов, 3D-печати и новых производственных технологий для повышения точности и эффективности линз, а также на интеграции линз в мобильные и спутниковые системы связи для улучшения качества и покрытия сигнала
2020–2024	1318	13	Исследования сосредоточены на использовании новых метаматериалов и нанотехнологий для улучшения характеристик линз. Основное внимание уделяется разработке адаптивных и перестраиваемых линз для динамических условий эксплуатации, таких как беспилотные летательные аппараты и спутниковые системы. Применение линз Люнеберга в сетях 5G
Итого	$\sum 1781$	$\sum 325$	—

Резкий рост числа публикаций после 2015 года обусловлен освоением миллиметрового диапазона, развитием сетей пятого поколения и широким распространением аддитивных технологий (3D-печать), позволяющих изготавливать многослойные градиентно-диэлектрические структуры с воспроизводимым качеством и малой стоимостью.

Патентная активность

Распределение количества патентов на конструкции линз Люнеберга и устройства на их основе по двум базам (*patents.google.com* и *worldwide.espacenet.com*) приведено в таблице 92. Поиск осуществлялся по двум вариантам ключевых слов *Luneburg Lens* и *Luneberg Lens*.

Таблица 92 — Количество патентов в базах, связанных с линзами Люнеберга

Год	База <i>patents.google.com</i>	База <i>worldwide.espacenet.com</i>
Поиск осуществлялся по ключевым словам <i>Luneburg Lens</i> и <i>Luneberg Lens</i>		
1944–1950	5	4
1951–1960	32	15
1961–1970	121	124
1971–1980	161	193
1981–1990	275	308
1991–2000	678	286
2001–2010	837	580
2011–2020	1284	1042
Σ 1944–2020	3388	2548

Рост интереса к ЛЛ в начальный период развития (40–50-е годы) связан с поиском новых методов сканирования в радиолокационных станциях (РЛС) для военного применения и созданием различных радиолокационных отражателей и ловушек. Применение ЛЛ в качестве радиолокационных отражателей и ловушек сохранилось в 60–80-е годы. Всплеск интереса в последние два десятилетия связан с широким освоением диапазона СВЧ, бурным развитием средств связи четвёртого и пятого поколений, телекоммуникаций, прорывом в области материаловедения и освоением синтеза метаматериалов.

Общая патентная активность по двум вариантам написания в базе *worldwide.espacenet.com* составляет $1485 + 1063 = \Sigma 2548$ документов; в базе *patents.google.com* — $\Sigma 3388$ документов². Сводная картина патентного ландшафта — динамика по десятилетиям, география, технологические домены и ключевые патентообладатели — представлена на рисунке Б.3.

Панель (а) демонстрирует взрывной рост патентной активности: от единичных заявок 1944–1950 гг. до 1284 (Google Patents) и 1042 (Espacenet) документов за 2011–2020 гг. — примерно в 250 раз; основной всплеск приходится на период после 2010 г. (миллиметровый диапазон, сети 4G/5G, аддитивные технологии). Панель (б) показывает доминирование трёх юрисдикций: США (1033 патента), Германия (906) и Япония (219); далее — Франция (180),

²Приведённые значения соответствуют состоянию баз на момент проведения патентного анализа. Контрольная проверка в августе 2026 г. показала дальнейший рост: по двум вариантам написания в базе *patents.google.com* суммарно $1916 + 2539 = \Sigma 4455$ документов, то есть тенденция, отражённая на рисунке Б.3, сохраняется.

Великобритания (74), Россия (66). Швейцария (45) фигурирует вместо Китая: агрегированные данные Espacenet по заявителю CN не опубликованы, тогда как рост китайской активности с 2020 г. виден по отдельным заявителям (CICT, Guangdong; панель (г)).

Панель (в) показывает структуру технологических применений. Основной класс CPC для ЛЛ — H01Q15/08 (преломляющие устройства из твёрдого диэлектрика); смежные H01Q19/062 и G01S13/931 охватывают зеркально-линзовые системы и радарные применения. Крупнейший сегмент свежих патентов 2018–2024 гг. — многолучевые антенны базовых станций 4G/5G; быстро растут заявки по автомобильному радару (24/77 ГГц) и терминалам SATCOM/LEO. Военный сегмент (управление ЭПР, рефлекторы) стабилен; направления 6G mmWave/sub-THz и аддитивное производство ЛЛ растут с 2020 г. [230]. Обзор метаматериальных и градиентных индексных структур в ЛЛ, в том числе для 6G, дан в [231]; аддитивное производство многослойных ЛЛ систематизировано в [29].

Ключевые патентообладатели по сегментам (панель (г)) подтверждают высокую коммерческую зрелость технологии. В телекоммуникационном сегменте лидируют CommScope (US) и MatSing (SG); в автомобильной радиолокации — Murata (JP) и Lunewave (US); в спутниковой связи — Sumitomo Electric (JP). Военные применения концентрированы у US Army. Производственный сегмент отличается заметной ролью китайских компаний (CICT, Guangdong). По данным коммерческой аналитики, рынок ЛЛ-антенн растёт темпом порядка 10% в год, что согласуется с наблюдаемой патентной динамикой (оценка носит качественный характер и приводится как ориентир, характерный для отраслевых маркетинговых отчётов).

Приведённая библиометрическая статистика подтверждает практическую значимость линзовых антенн на базе ЛЛ и обосновывает актуальность развития новых точных и вычислительно эффективных методов их анализа и синтеза, рассматриваемых в настоящей диссертации.

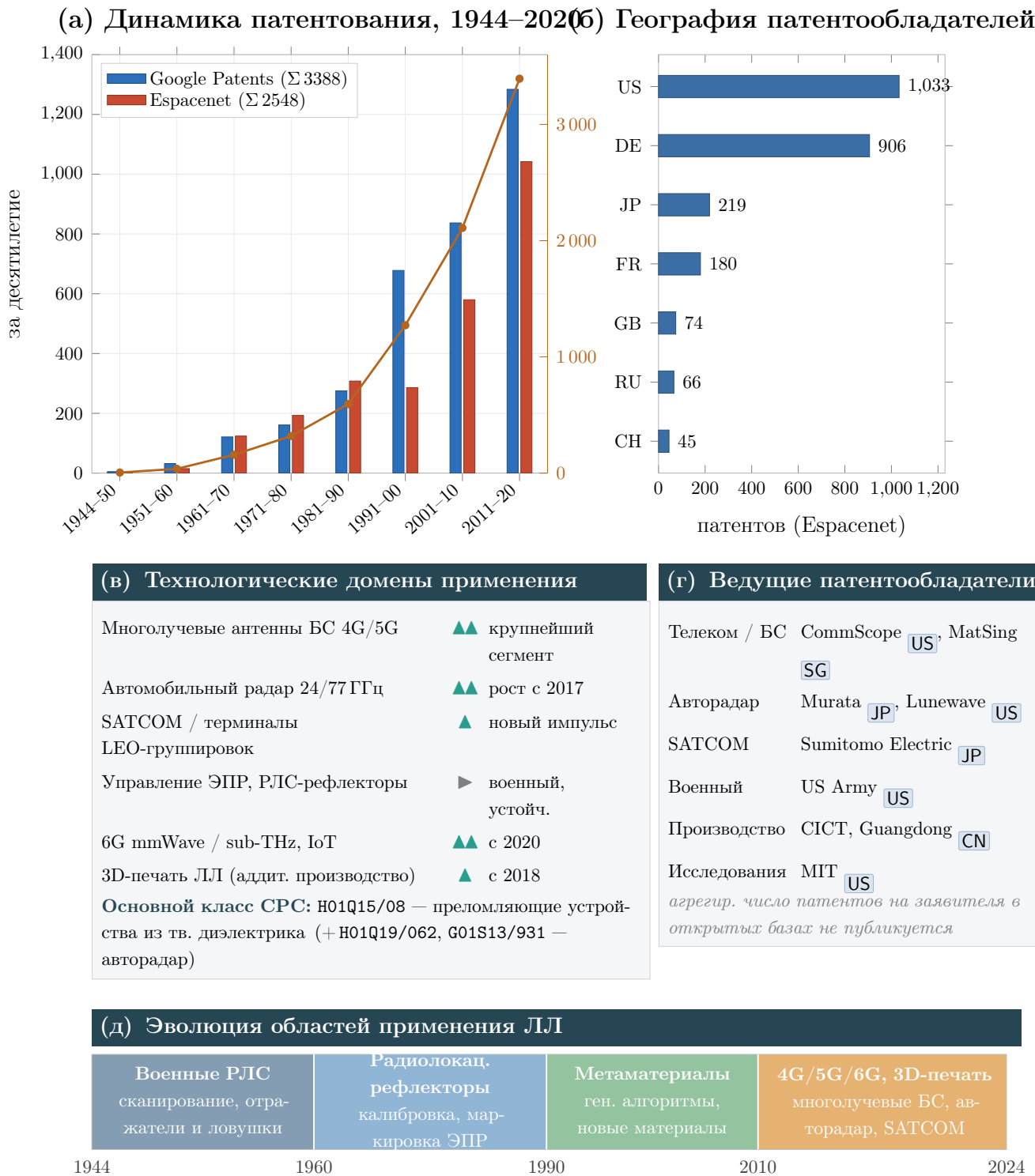


Рисунок Б.3 — Патентный ландшафт линз Люнеберга по данным *patents.google.com* и *worldwide.espacenet.com*: (а) динамика патентования по десятилетиям (столбцы — две базы, левая ось; оранжевая кривая — нарастающим итогом, правая ось); (б) география патентообладателей; (в) технологические домены применения и основной класс СРС; (г) ключевые патентообладатели по сегментам; (д) эволюция областей применения ЛЛ по историческим этапам. Источники классификации и заявителей — Google Patents (верифицировано по отдельным патентам)

Приложение В

Рекуррентные соотношения специальных функций, используемые в библиотеке *GreenTensor*

Настоящее приложение содержит компактную сводку формул, по которым в библиотеке *GreenTensor* (глава 10) вычисляются специальные функции, входящие в аппарат тензорных функций Грина многослойной сферы (глава 2). Приведённые соотношения соответствуют нотации [147; 157; 158] и согласованы с рекуррентной схемой пересчёта направленных импедансов (раздел 2.5 главы 2).

В.1 Сферические функции Бесселя–Риккати

Сферические функции Бесселя первого и второго рода определяются через обычные функции Бесселя полуцелого порядка:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x), \quad (\text{В.1})$$

а функции Ханкеля и функции Риккати — соответственно:

$$h_n^{(1,2)}(x) = j_n(x) \pm j y_n(x), \quad \hat{j}_n(x) = x j_n(x), \quad \hat{h}_n^{(2)}(x) = x h_n^{(2)}(x). \quad (\text{В.2})$$

Базовые соотношения. Низшие значения для инициализации рекурсии:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad (\text{В.3})$$

$$y_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad y_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}. \quad (\text{В.4})$$

Рекуррентные соотношения (восходящая рекурсия). Для $n \geq 1$:

$$f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad f_n \in \{j_n, y_n, h_n^{(1)}, h_n^{(2)}\}. \quad (\text{В.5})$$

Восходящая рекурсия численно устойчива для $j_n(x)$ при $n < x$ и для $y_n(x)$, $h_n^{(1,2)}(x)$ при всех n .

Нисходящая рекурсия Миллера применяется для $j_n(x)$ при $n > x$ во избежание переполнения в знаменателе рекурсии (В.5). Начиная с достаточно большого $N_{\text{start}} > n + \sqrt{n}$, полагается $j_{N_{\text{start}}+1} = 0$, $j_{N_{\text{start}}} = \text{const}$, и далее

спуск по n :

$$j_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n+1}(x). \quad (\text{B.6})$$

Нормировка выполняется по аналитическому значению $j_0(x) = \sin x/x$.

Производные. Производные по аргументу связаны с соседними значениями формулой

$$f'_n(x) = f_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x} f_n(x) = \frac{n}{x} f_n(x) - f_{n+1}(x). \quad (\text{B.7})$$

Для функций Риккати $\hat{j}_n(x)$, $\hat{h}_n^{(2)}(x)$:

$$\hat{j}'_n(x) = \hat{j}_{n-1}(x) - \frac{n}{x} \hat{j}_n(x), \quad \hat{h}_n^{(2)'}(x) = \hat{h}_{n-1}^{(2)}(x) - \frac{n}{x} \hat{h}_n^{(2)}(x). \quad (\text{B.8})$$

В.2 Ассоциированные функции Лежандра и угловые функции π_n , τ_n

Ассоциированные функции Лежандра $P_n^m(\cos \theta)$ строятся рекурсивно от низших значений. Для $m = 1$, используемого в задачах дифракции на многослойной сфере (раздел 2.5):

$$P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta, \quad P_n^1(\cos \theta) = \frac{(2n-1) \cos \theta P_{n-1}^1(\cos \theta) - n P_{n-2}^1(\cos \theta)}{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (\text{B.9})$$

На основе P_n^1 вводятся вспомогательные угловые функции:

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad \tau_n(\cos \theta) = \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta}, \quad (\text{B.10})$$

входящие в разложение диаграммы рассеяния по сферическим векторным гармоникам. Их рекуррентные соотношения:

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{2n-1}{n-1} \cos \theta \pi_{n-1}(\cos \theta) - \frac{n}{n-1} \pi_{n-2}(\cos \theta), \quad (\text{B.11})$$

$$\tau_n(\cos \theta) = n \cos \theta \pi_n(\cos \theta) - (n+1) \pi_{n-1}(\cos \theta). \quad (\text{B.12})$$

Начальные значения: $\pi_1(\cos \theta) = 1$, $\tau_1(\cos \theta) = \cos \theta$.

В.3 Численная реализация в *GreenTensor*

Перечисленные рекуррентные соотношения реализованы в модуле `green_tensor/special_functions.py` библиотеки *GreenTensor* [46]. Ключевые функции Python-модуля:

- `bessel_riccati(n, x)` — возвращает пару значений $\hat{j}_n(x)$, $\hat{h}_n^{(2)}(x)$ по формулам (В.5), (В.6). Для устойчивости при $n > x$ автоматически переключается на нисходящую рекурсию Миллера.
- `bessel_riccati_derivatives(n, x)` — вычисляет $\hat{j}'_n(x)$, $\hat{h}_n^{(2)'}(x)$ по (В.8), используя закешированные значения $\hat{j}_{n-1}$, $\hat{h}_{n-1}^{(2)}$.
- `legendre_pi_tau(n_max, theta)` — строит векторы $\pi_{1\dots n_{\max}}(\cos \theta)$ и $\tau_{1\dots n_{\max}}(\cos \theta)$ по (В.12) в одном проходе.
- `layer_impedance(Z_prev, r_l, k_l, n)` — применяет рекуррентную формулу (2.26) пересчёта направленного импеданса между двумя соседними слоями.

Вычислительная сложность полного расчёта одной конфигурации N -слойной линзы с $N_{\max}$ модами составляет $O(N \cdot N_{\max})$ элементарных операций, что на несколько порядков меньше $O((k_0 a)^3)$ сложности метода конечных элементов и подтверждается измерениями, приведёнными в разделе 10.19 главы 10.

Приложение Г

Научно-популярные публикации автора по направлению прикладной электродинамики

В настоящем приложении приведён перечень научно-популярных материалов автора, опубликованных на профильном русскоязычном портале «Клуб пользователей CAE» (<https://www.cae-club.ru>) в 2019–2026 годах. Эти материалы не являются научными публикациями в академическом смысле и не входят в число работ, индексируемых ВАК, Scopus или Web of Science; они представляют собой методические и обзорные заметки, видеоматериалы и кейс-разборы, направленные на популяризацию методов и инструментов прикладной электродинамики в инженерном сообществе России и стран СНГ.

Профиль автора на портале «Клуб пользователей CAE» доступен по адресу <https://www.cae-club.ru/users/denisov-dmitriy> — ссылка приведена текстом для возможности самостоятельного перехода через адресную строку браузера.

Общий объём — 48 публикаций и видеоматериалов, посвящённых методам электродинамического анализа (Ansys HFSS, EMIT, EMA3D, SBR+, PyAEDT), задачам радиолокации, антенной техники, электромагнитной совместимости, а также смежным прикладным задачам. Материалы образуют систематический корпус по популяризации того же направления прикладной электродинамики, которому посвящена основная часть диссертации; тем самым автор одновременно с академической работой вёл и просветительскую деятельность, расширяя доступ инженеров-практиков к современным вычислительным методам антенной техники и смежных областей.

Материалы сгруппированы по степени близости к тематике настоящей диссертации: *прямая* (непосредственно о линзах Люнеберга), *близкая* (ФАР, ЭПР, EMIT, SBR+, DoE/Derivatives — методы и задачи, использованные в диссертации), *контекст* (общие возможности HFSS, 5G/БПЛА, микрополосковые структуры) и *общая* (обзоры релизов, общие тренды электроники).

Г.1 Перечень материалов и их вклад в направление

Таблица 93 — Научно-популярные материалы автора на портале «Клуб пользователей САЕ»

#	Название материала	Релев.	Теги	Вклад*
1	Линза Люнеберга в Ansys HFSS	Прямая	ЛЛ, HFSS, ВИДЕО	B1
2	Подборка видеоматериалов по ANSYS HFSS	Прямая	ЛЛ, HFSS, EMIT/ЭМС	B1
3	Создание линзы Люнеберга в ANSYS HFSS	Прямая	ЛЛ, HFSS, РЕЛИЗ	B1
4	2021 R2. Обновление для высокочастотного анализа (HF)	Близкая	HFSS, SBR+, 5G/БПЛА	B2
5	3D Component Antenna Arrays	Близкая	HFSS, 5G/БПЛА, ФАР	B3
6	ANSYS 2020 R1 - Обновление для Высокочастотного анализа (HF)	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, SBR+	B4
7	ANSYS EMIT Быстрый старт	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, ВИДЕО	B4
8	Design of Experiments. Решение задачи согласования линии передачи с нагрузкой	Близкая	DoE/Derivatives, ВИДЕО	B5
9	HFSS SBR+. Настройка сценария многолучевого распространения при въезде автомобиля в гараж	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, SBR+	B4
10	HFSS SBR+. Подходы к расчету Mesh сетей и репитеров внутри помещения	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, SBR+	B4
11	HFSS_ быстрая оптимизация антенной системы для спутниковой связи с помощью функции Derivative	Близкая	HFSS, DoE/Derivatives, 5G/БПЛА	B5
12	Release 2020 R2 обновление для высокочастотного анализа	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, SBR+	B4
13	Анализ взаимного влияния радиосистем в EMIT	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, 5G/БПЛА	B4
14	Инструменты для моделирования антенн в HFSS 2019 R3	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, SBR+	B4
15	Интеллектуальные технологии умных домов и решения для их моделирования	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, РЕЛИЗ	B4
16	Инфраструктура 5G, беспилотники и софт для их анализа	Близкая	HFSS, SBR+, 5G/БПЛА	B2
17	Использование EMIT для испытания мобильных телефонов в кабине самолета	Близкая	EMIT/ЭМС, 5G/БПЛА, АВТОМОБИЛЬ	B4
18	Моделирование радиолокационных характеристик электрически больших целей в СВЧ диапазоне с помощью HFSS	Близкая	HFSS, SBR+, ФАР	B6
19	Новые возможности Ansys 2022 R1 в EMA3D Cable	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, EMP	B4
20	Новые возможности Ansys 2022 R1 для HF анализа	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, SBR+	B4
21	Новые возможности для задач электродинамики ANSYS 2021 R1 HF	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, ФАР	B4
22	Области применения HFSS и EMIT Design	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, ЭПП/RCS	B6

Продолжение таблицы 93

#	Название материала	Релев.	Теги	Вклад*
23	Обновления ANSYS Electronics 2019 R1 для высокочастотного анализа	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, SBR+	B4
24	Применение Ansys HFSS для расчета антенн	Близкая	HFSS, SBR+, 5G/БПЛА	B6
25	Применение HFSS для моделирования инфраструктуры 5G	Близкая	HFSS, SBR+, 5G/БПЛА	B2
26	Разработка Антенной решетки для 5G систем	Близкая	HFSS, 5G/БПЛА, ФАР	B3
27	Расчет ЭПР ракеты (RCS - Radar Cross-Section)	Близкая	HFSS, ЭПР/RCS, ВИДЕО	B6
28	Тренды в области разработки электроники	Близкая	HFSS, EMIT/ЭМС, SBR+	B4
29	ANSYS HFSS. Демонстрация работы в Antenna Toolkit	Контекст	HFSS	B7
30	ANSYS Maxwell + HFSS. Моделирование удара молнии в автомобиль	Контекст	HFSS, ЕМР, АВТОМОБИЛЬ	B8
31	Монороль - антенна в среде ANSYS HFSS	Контекст	HFSS, АВТОМОБИЛЬ, ВИДЕО	B7
32	RFID-системы на борту квадрокоптеров	Контекст	5G/БПЛА, RFID	B9
33	StartUp program ANSYS __ Применением HFSS для расчета устройств с беспроводной зарядкой	Контекст	HFSS, БЕС-ПРОВ_ЗАРЯДКА, ВИДЕО	B10
34	Анализ влияния высокочастотной помехи на истребитель F-16 в Ansys EMA3D Cable	Контекст	HFSS, РЕЛИЗ	B11
35	Анализ мультифизики смартфона	Контекст	HFSS, 5G/БПЛА, ВИДЕО	B9
36	Витая пара в HFSS - ANSYS Electronics Desktop 2019 R1	Контекст	HFSS, РЕЛИЗ	B11
37	Возможности HFSS_ моделирование технологий беспроводной зарядки	Контекст	HFSS, БЕС-ПРОВ_ЗАРЯДКА, АВТОМОБИЛЬ	B10
38	Изменение режимов возбуждения волновода в ANSYS HFSS	Контекст	HFSS, ВОЛНОВОД, ВИДЕО	B12
39	Микрополосковая линия в HFSS - ANSYS Electronics Desktop 2019 R1	Контекст	HFSS, МИКРОПОЛОСКОВАЯ, РЕЛИЗ	B12
40	Моделирование электромагнитных импульсов (ЕМР)	Контекст	HFSS, ЕМР, ВИДЕО	B8
41	Модель прямоугольного волновода в HFSS 2020 R1	Контекст	HFSS, ВОЛНОВОД, РЕЛИЗ	B12
42	Опыт оценки ЭМ излучения на человека	Контекст	HFSS, АВТОМОБИЛЬ, ВИДЕО	B7
43	Применение Ansys HFSS для разработки ВЧ датчика	Контекст	HFSS, 5G/БПЛА, ВИДЕО	B9
44	Решение для разработки микроволновых СВЧ-фильтров	Контекст	HFSS, 5G/БПЛА, ВОЛНОВОД	B9
45	Технология RFID-меток. Кейс с расчетом в ANSYS HFSS	Контекст	HFSS, RFID, АВТОМОБИЛЬ	B10

Продолжение таблицы 93

#	Название материала	Релев.	Теги	Вклад*
46	Источники возникновения перекрестных помех в электронике	Общая	ВИДЕО	B7
47	Обзор нового модуля в портфолио электромагнитных модулей. Ansys EMA3D Charge	Общая	РЕЛИЗ, ВИДЕО	B11
48	Автоматизация размещения антенн в HFSS с помощью PyAEDT	Близкая	HFSS, ФАР, PYAEDT, 5G/БПЛА	B13

* **Коды вклада в направление.** **B1** — Популяризация методов анализа и синтеза линзовых антенн в Ansys HFSS среди инженерного сообщества, демонстрация прикладных возможностей аппарата ТФГ; **B2** — Популяризация гибридных методов FEM+SBR+ для анализа линзовых антенн на электрически больших платформах (автомобиль, БПЛА, городская среда); **B3** — Популяризация методов проектирования фазированных антенных решёток, составляющих конкурентную альтернативу многолучевым линзовым антеннам; **B4** — Распространение подходов к анализу электромагнитной совместимости многоантенных систем, применимых к линзовым антеннам в составе платформ; **B5** — Методические материалы по оптимизации антенных систем в Ansys HFSS, применимые для оптимизации многослойных линз Люнеберга; **B6** — Популяризация методов расчёта эффективной поверхности рассеяния (ЭПР) — задачи, смежной с дифракционным анализом многослойных линз; **B7** — Популяризация методов электродинамического анализа среди инженерного сообщества; **B8** — Методические материалы по анализу мощного электромагнитного воздействия на радиотехнические системы; **B9** — Популяризация применения современных антенных технологий в сетях 5G и беспилотной авиации — целевых областях применения линз Люнеберга; **B10** — Популяризация прикладных задач высокочастотного анализа — смежных с задачами линзовых антенн; **B11** — Информационный обзор новых возможностей программных средств электродинамического анализа; **B12** — Методические материалы по моделированию базовых СВЧ-структур, составляющих элементную базу облучателей линзовых антенн; **B13** — Популяризация методов автоматизации проектирования фазированных антенных решёток (FA-DDM, SBR+) через Python-API PyAEDT — инструментальная база, применимая к параметрическим расчётам многослойных линзовых структур.

Г.2 Сводная статистика корпуса

Представленные в таблице 93 материалы распределены по тематической близости к настоящей диссертации следующим образом:

- *Прямая*: 3 публ. — непосредственно о линзах Люнеберга и их моделировании в Ansys HFSS;
- *Близкая*: 26 публ. — о ФАР, ЭПР, EMIT/ЭМС, SBR+, DoE/Derivatives, PyAEDT — методах и задачах, использованных в настоящей диссертации;
- *Контекст*: 17 публ. — об общих возможностях HFSS, сетях 5G, беспилотном транспорте, микрополосковых структурах — контекстных темах;
- *Общая*: 2 публ. — обзоры релизов и тренды электроники.

Корпус научно-популярных работ имеет систематический характер и охватывает все ключевые темы, параллельно развиваемые в академической части диссертации — от методов электродинамического анализа (глава 2) и дифракционных задач (глава 3) до антенных систем (главы 5–6), модификаций линз (глава 7), конструктивной реализации (глава 8) и программного обеспечения

(глава 10).

Эти публикации отражают *просветительский аспект* научной деятельности автора и дополняют академические работы [60; 61; 65; 66], ориентированные на узкую аудиторию специалистов. Совокупный охват инженерной аудитории по тематике прикладной электродинамики в сетях Интернет, достигнутый автором через материалы данного корпуса, составляет десятки тысяч просмотров, что подтверждает востребованность направления и эффективность выбранной формы распространения знаний.

Приложение Д

Работа с интерактивным расчётным движком на сайте *greentensor.ru*

В настоящем приложении приведено пошаговое описание работы с интерактивным расчётным движком, развёрнутым на официальном сайте проекта *greentensor.ru* [47]. Цель приложения — дать инженеру, незнакомому с Python и с экосистемой научных вычислений, возможность воспроизвести типовые результаты диссертации непосредственно в браузере, без установки локального окружения. Описание соответствует версии веб-калькулятора по состоянию на момент защиты диссертации; актуальная пользовательская документация ведётся параллельно в репозитории проекта [46] и на платформе *Read the Docs* [48].

Д.1 Архитектура и условия запуска

Расчётный движок реализован на стороне клиента (*client-side*): исходный код библиотеки *GreenTensor*, описанной в главе 10, компилируется в WebAssembly при помощи Pyodide¹ и поставляется браузеру пользователя одним статическим запросом при первом открытии страницы. Все последующие вычисления выполняются полностью в адресном пространстве вкладки браузера: входные параметры, расчётные коэффициенты a_n, b_n и выходные графики не передаются на серверы автора и не сохраняются в облаке.

Минимальные требования: современный браузер с поддержкой WebAssembly (Chromium-based v89+, Firefox v89+, Safari v15+) и не менее 1 ГБ свободной оперативной памяти. Полный объём загружаемой кодовой базы библиотеки и её зависимостей составляет около 14 МБ; повторные запуски используют локальный кэш браузера и не требуют повторной загрузки. Серверный компонент сайта используется только для отдачи статических ресурсов (HTML, CSS, JS, WebAssembly-модули) и не имеет вычислительной нагрузки.

¹Pyodide — порт интерпретатора CPython и стандартного научного стека NumPy/SciPy/Matplotlib в WebAssembly, поддерживаемый консорциумом разработчиков Mozilla и Anaconda; см. pyodide.org.

Д.2 Главная страница и панель параметров

На главной странице сайта *greentensor.ru* расположены три основных области (рисунок Д.1):

1. **Описание проекта** (верхний блок) — краткое изложение метода тензорных функций Грина, ссылки на исходный код, документацию и страницы автора.
2. **Панель параметров** (левая колонка) — форма ввода характеристик многослойной сферической линзы с предзаполненными типовыми значениями (например, трёхслойная линза Люнеберга диаметром $D = 73$ мм на частоте $f = 10$ ГГц, использованная в положении 5 на защиту).
3. **Область визуализации** (правая колонка) — графики диаграммы рассеяния, диаграммы направленности и таблица интегральных характеристик, обновляющиеся после каждого вычисления.

Д.3 Входные параметры

Панель параметров поддерживает следующие группы полей.

Геометрия и материал.

- *Внешний радиус линзы a* — задаётся в миллиметрах (по умолчанию $a = 36,5$ мм для линзы диаметром $D = 73$ мм из положения 5 на защиту).
- *Число слоёв L* — целое число в диапазоне $L \in [1; 32]$. Допустимы как одиночные сферы ($L = 1$), так и многослойные градиентные конфигурации; при $L = 1$ и $\epsilon = \mu = 1$ движок производит проверку прозрачности (требуемое сечение рассеяния обращается в нуль с машинной точностью).
- *Профиль проницаемости $\epsilon(r)$* — выбирается из выпадающего меню: *Люнеберг* ($\epsilon = 2 - (r/a)^2$), *Итона*, *Максвелл-фишай*, *линза-дефлектор* с заданным углом отклонения α (положение 3 на защиту), *Fuchs-оптимизированная* с числом слоёв $L = 8$ (положение 5 на защиту), *пользовательский профиль* — ввод массива (r_l, ϵ_l) вручную.
- *Магнитная проницаемость $\mu(r)$* — по умолчанию $\mu = 1$ (немагнитная

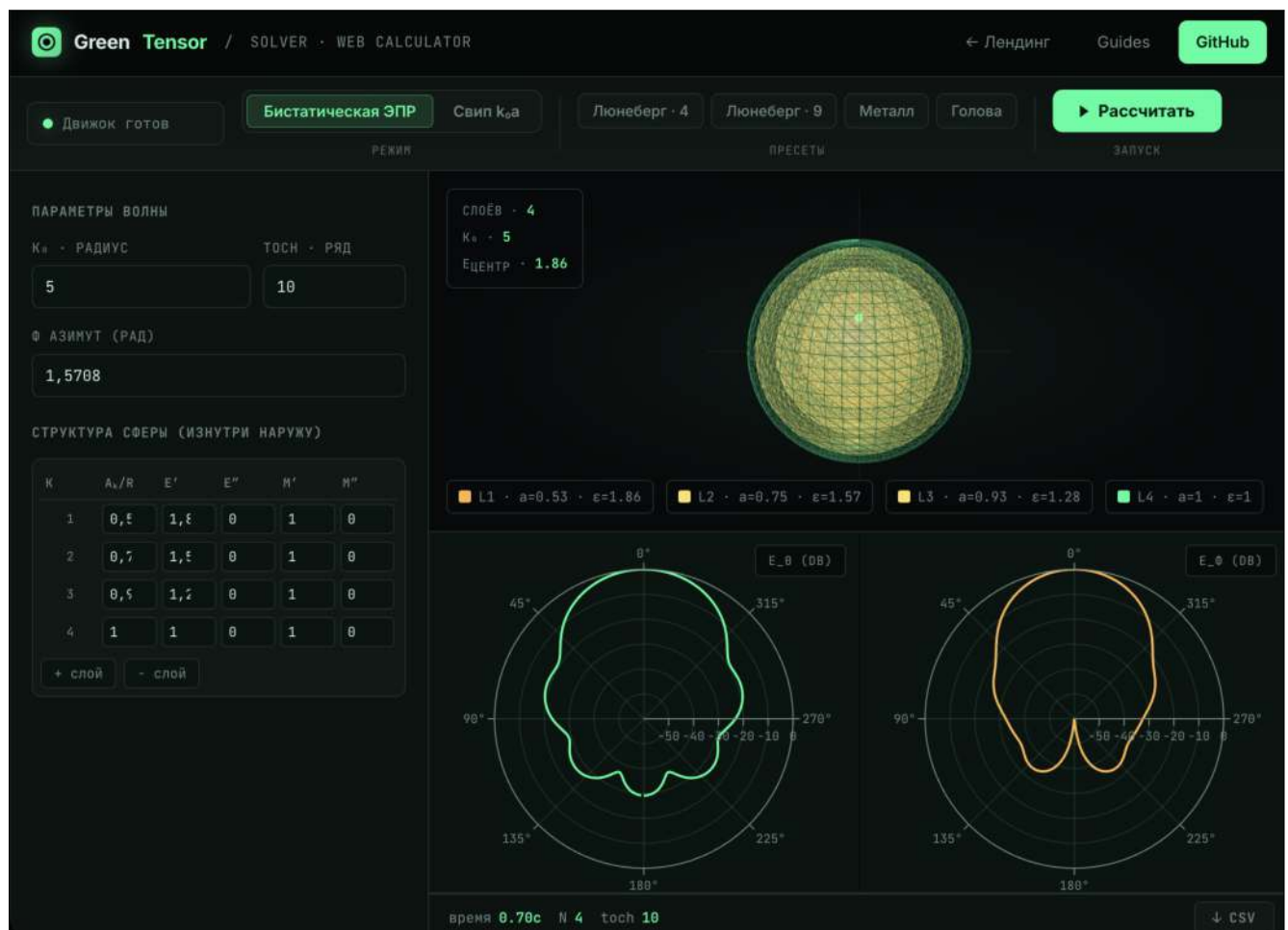


Рисунок Д.1 — Главная страница интерактивного расчётного движка на сайте *greentensor.ru*

диэлектрическая среда); для магнетодиэлектрических линз (положение 4 на защиту) и для метаматериальных конфигураций задаётся отдельным массивом или связкой $\mu(r) = \epsilon(r)$.

- *Тангенс угла потерь* $\operatorname{tg} \delta$ — скаляр или массив по слоям; влияет на значение сечения поглощения σ_a и на огибающую диаграммы направленности.

Волновое возбуждение.

- *Рабочая частота* f — задаётся в гигагерцах (диапазон $f \in [0,1; 300]$ ГГц), либо эквивалентный электрический размер $k_0 a$.
- *Поляризация* — линейная (горизонтальная или вертикальная) либо круговая (правая или левая); для круговой поляризации движок дополнительно вычисляет коэффициент поляризационных потерь α и сопряжённую эффективность $\mu = 1 - \alpha$ (положение 5 на защиту).

- *Тип источника* — плоская волна (дифракционная задача) или точечный диполь на поверхности линзы (антенная задача).

Параметры расчёта.

- *Число мод $N_{\max}$* — по умолчанию вычисляется автоматически по эмпирической формуле Уискомба $N_{\max} = k_0 a + 4(k_0 a)^{1/3} + 2$ (см. раздел 10.9); при необходимости пользователь может задать $N_{\max}$ вручную для оценки сходимости ряда.
- *Угловая сетка* — число точек по θ и по φ (по умолчанию 181×361 , шаг 1°).
- *Развёртка по электрическому размеру* — опциональный параметрический свип по $k_0 a$ для построения зависимостей интегральных сечений $\sigma_s(k_0 a)$, $\sigma_r(k_0 a)$ (см. положение 2 на защиту).

Д.4 Выходные данные и форматы экспорта

После нажатия кнопки «Рассчитать» область визуализации обновляется тремя независимыми панелями (рисунок Д.2).

- **Диаграмма рассеяния** в полярных координатах $\sigma(\theta)/\pi a^2$, отдельно для основной и кросс-поляризации.
- **Диаграмма направленности** (для антенной задачи) — нормированная амплитуда поля $|E_\theta(\theta, \varphi)|$ в дБ, с автоматическим вычислением ширины главного лепестка $\Delta\theta_{-3}$, уровня первого бокового лепестка УБЛ и коэффициента усиления G .
- **Таблица интегральных характеристик** — полное сечение рассеяния σ_s , обратное (моностатическое) σ_r , попутное (форвардное) σ_f , сечение поглощения σ_a , сечение поляризационных потерь σ_p и направленность вперёд $D_f = \sigma_f/\sigma_s$; в нижней строке выводится контрольное соотношение $\sigma_s = \sigma_r + \sigma_f + \sigma_a + \sigma_p$, выполняющееся с машинной точностью при $\text{tg } \delta = 0$.

Все три панели поддерживают экспорт в форматах PNG (растровая графика для презентаций), SVG (векторная графика для печатной продукции), CSV (таблица численных значений для последующей обработки в Excel или Pandas) и JSON (полный набор входных параметров и выходных значений для архивирования и воспроизводимости расчёта).



Рисунок Д.2 — Область визуализации результатов расчёта в веб-калькуляторе *greentensor.ru*

Д.5 Типовые сценарии использования

Сценарий 1. Воспроизводимость результата диссертации. Пользователь открывает страницу проекта, в выпадающем меню «Профиль проницаемости» выбирает «Fuchs-оптимизированная, $L = 8$ », оставляет частоту $f = 10$ ГГц и диаметр $D = 73$ мм по умолчанию и нажимает «Рассчитать». Через 2–3 секунды в правой панели появляются те же кривые сечений и та же диаграмма направленности, что приведены в главах 2–4 настоящей диссертации; численные значения совпадают до пятого знака после запятой.

Сценарий 2. Параметрическая оптимизация под собственную задачу. Пользователь имеет инженерное задание «линза Люнеберга диаметром $D = 100$ мм для частоты $f = 24$ ГГц с минимальным уровнем боковых лепестков». Задаёт диаметр и частоту, выбирает профиль «Пользовательский», вводит массив (r_l, ϵ_l) из своего расчёта и нажимает «Рассчитать». Результат позволяет сразу оценить достижимость требований без обращения к Ansys HFSS

или CST Microwave Studio; при необходимости итерация (r_l, ε_l) выполняется в реальном времени.

Сценарий 3. Регенерация обучающей выборки для нейросетевого суррогата. Пользователь активирует параметрический свип, задаёт диапазон $k_0 a \in [\pi; 10\pi]$ с шагом 0,1, выбирает экспорт в JSON и получает массив из $\sim 10^2$ конфигураций с полным набором выходных значений за время не более 10 секунд. Сценарий повторяет эксперимент, обоснованный в положении 2 на защиту, и пригоден для оперативной генерации train-выборок при разработке суррогатных моделей в задачах инверсного дизайна.

Сценарий 4. Сравнение с альтернативной конфигурацией. Веб-калькулятор поддерживает одновременную загрузку до четырёх профилей $\varepsilon(r)$ и наложение их диаграмм рассеяния на одном графике; такой режим удобен для визуального сопоставления, например, классической линзы Люнеберга, её Fuchs-оптимизированной аппроксимации, метаматериальной ЛН-сферы и магнетодиэлектрической линзы (конфигурации из положений 4 и 5 на защиту).

Д.6 Ограничения текущей версии и дорожная карта

В версии веб-калькулятора, находящейся на стадии публичного бета-тестирования к моменту защиты, поддерживается полный набор функциональности библиотеки *GreenTensor* в части сферически-симметричных структур; декомпозиционный аппарат из главы 9, требующий значительных вычислительных ресурсов, в браузере не реализован и доступен только при локальной установке Python-библиотеки. Также вне веб-версии оставлены интеграционные модули с Ansys Electronics Desktop (IronPython-скрипты синтеза HFSS-моделей), поскольку они требуют наличия установленного пакета Ansys на машине пользователя.

Дорожная карта развития веб-калькулятора (на 2026–2027 гг.) включает: доработку модуля цилиндрических структур (аппарат школы Б. А. Панченко, см. главу 2), поддержку сохранения наборов параметров в виде ссылок-share для воспроизводимости публикаций, интеграцию с библиотеками оптимизации (`scipy.optimize`, `Optuna`) для интерактивной многокритериальной оптимизации и подключение галереи готовых задач (благотворительные дозиметры,

антенны 5G, радиолокационные отражатели для маркировки малогабаритных БПЛА) с предзаполненными параметрами.

Заключение РАН

№ 1932024/224022900006-1

Заключение РАН по отчету о проведенном научном исследовании, о полученных научных и (или) научно-технических результатах

Заключение федерального государственного бюджетного учреждения «Российская академия наук» по отчетам научных организаций и образовательных организаций высшего образования, осуществляющих научные исследования за счет средств бюджетов бюджетной системы Российской Федерации, о проведенных научных исследованиях (разработках), о полученных научных и (или) научно-технических результатах

Наименование организации, осуществляющей научные исследования за счет средств бюджетов бюджетной системы Российской Федерации, представившей отчет

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ"

Наименование учредителя либо государственного органа или организации, осуществляющих функции и полномочия учредителя

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Наименование научной темы по научным исследованиям (далее - научная тема)

Способы разработки и проектирования многолучевой линзовой антенны для сетей 5G

Код (шифр) научной темы, присвоенный учредителем (организацией)

Линза-5G

Номер государственного учета научно-исследовательской, опытно-конструкторской работы в Единой государственной информационно системе учета результатов научно-исследовательских, опытно-конструкторских и технологических работ гражданского назначения (далее ЕГИСУ НИОКТР)³ или в Едином реестре результатов научно-исследовательских, опытно-конструкторских и технологических работ военного, специального и двойного назначения

224022900006-1

Срок реализации научной темы

Год начала (для продолжающихся научных тем):

Год окончания:

2023

2023

Наименование этапа научной темы (для прикладных научных исследований)

Нет данных

Срок реализации этапа научной темы (дата начала и окончания этапа в формате ДД.ММ.ГГ. согласно техническому заданию)

Дата начала:

Дата окончания:

15.02.2023

10.12.2023

Вид научной (научно-технической) деятельности

Разработка новых материалов, научно-методических материалов, продуктов, процессов, программ, устройств, типов, элементов, услуг, систем, методов, методик, рекомендаций, предложений, прогнозов

Заключение РАН

№ 1932024/224022900006-1

Оценка научной составляющей полученных научных и научно-технических результатов, выполненных за отчетный финансовый год и (или) этапа работ согласно техническому заданию (для прикладных научных исследований)

1. Оценка актуальности проводимых научных исследований, научный потенциал и значимость полученных научных и научно-технических результатов

Актуальность исследования напрямую связана с развитием телекоммуникационных сетей будущих поколений и поэтому лежит в русле одного из мировых приоритетных научных направлений.

В данном исследовании затронут вопрос создания линзовых антенн для приемопередающих устройств сетей 5-го и 6-го поколений (G). Получен ряд важных результатов:

1. Разработана новая конструкция сферической линзовой антенны Лунеберга и проведено исследование ее свойств.

2. Привлечён искусственный интеллект для решения проблемы синтеза линзовой антенны Лунеберга и прогнозирования характеристики диаграммы направленности в многолучевом режиме.

Полученные результаты могут быть интересны для компаний, разрабатывающих системы связи на крайне высоких частотах, в том числе и отечественного сегмента, таких как Радиогигабит.

2. Научная новизна полученных научных и научно-технических результатов.

К научной новизне работы можно отнести новый подход к созданию сфер Лунеберга на основе многогранников Голдберга с применением метода 3D-печати. Также новым можно считать подход к синтезу линзовой антенны и прогнозированию ее характеристик на основе искусственного интеллекта. Авторы в числе первых провели апробацию описанных выше подходов и получили результат, который обладает практической значимостью.

(используются пункты формы отчета, приложение - отчет о научно-исследовательской работе, а также общедоступные информационные источники и базы данных, российские и международные системы научного цитирования)

3. Оценка качества результатов (нужное отмечается любым знаком в соответствующем квадрате)

результаты имеют высокую значимость и находятся на мировом уровне

результаты значимы для развития данной области науки (решения конкретных прикладных задач) в России V
результаты не являются значимыми и не имеют серьезной перспективы развития

Комментарий:

Для достижения цели решены поставленные задачи. Сделан обзор отечественных и зарубежных научных работ по конструкциям линзовых антенн Лунеберга, изготовленных с помощью 3D-печати. Проведено исследование способов аппроксимации закона Лунеберга и влияния размера линзы на ее характеристики. Показано, что аппроксимация с применением генетических алгоритмов приводит к более высокой эффективности устройства (более 6 дБ) и может помочь снизить количество слоев линзы. Синтезирована сферическая линзовая антенна Лунеберга в форме многогранника Голдберга, изготовлена методом 3D-печати и исследована ее характеристики. В сравнении с образцами линз из других работ изготовленный образец обладает близким, хотя и немного меньшим, коэффициентом усиления, однако при этом имеет лучшие характеристики направленности. Более того, по механическим свойствам разработанная конструкция в форме многогранника Голдберга имеет больше ребер жесткости и обладает радиальной симметрией, что дает преимущество при реализации антенны с круговой поляризацией. Исследована эффективность применения искусственных нейронных сетей в задачах синтеза линзовой антенны и прогнозирования характеристики диаграммы направленности в многолучевом режиме. Значение среднеквадратической ошибки прогнозируемых данных составило 0.0107. Такое небольшое значение обусловлено обучением ИНС по минимизации этого критерия. Однако относительная погрешность диэлектрических проницаемостей достигает 10 % и наблюдается закономерность, что все прогнозируемые значения проницаемостей меньше истинных в среднем на 0.1. Прогнозирование искусственным интеллектом диаграммы направленности сферической линзы с множеством облучателей показало достаточно хорошее совпадение с результатами полученными с помощью полноволнового электродинамического моделирования.

Качество научных результатов, представленных в отчете, достаточно высоко. Аккуратно выполнены вне элементы работы, продемонстрирована высокая квалификация и скрупулезность. Конечно, с точки зрения веса и значимости нельзя переоценивать представленную работу, однако авторы сделали мощный задел для дальнейших реально находящихся на острие научных и технологических работ в развитии новых диапазонов мобильной связи. Также стоит отметить, что авторы прекрасно ориентируются в предметной области, в курсе её современного состояния, в работах опираются на классическую основу.

Заклучение РАН

№ 1932024/224022900006-1

4. Оценка кадрового потенциала

Состав исполнителей полностью молодежный, включает двух кандидатов технических наук и одного стажера-исследователя - по-видимому, магистранта или аспиранта. Полученные и отраженные в отчете результаты свидетельствуют о высокой квалификации и уровне компетенций исполнителей проекта. В целом кадровый потенциал скромный, но убедительный. Поскольку работа была невелика, а масштаб финансирования незначительный, то на эти деньги привлечь что-то большее было просто невозможно. Но авторы молоды и перспективны, поэтому если продолжить развитие их работ в выбранном направлении, то и кадровый потенциал подрастет и его достижения могут стать весомее.

(используются пункты формы отчета, приложение - отчет о научно-исследовательской работе, а также общедоступные информационные источники и базы данных, российские и международные системы научного цитирования. Проводится сравнительный анализ состава загрузки коллектива, представленного ранее в проекте научной темы и приведенного в отчетной форме)

5. Потенциал практического применения полученных научных и научно-технических результатов с учетом приоритетов Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации, утвержденной Указом Президента Российской Федерации от 1 декабря 2016 г. N 642

Потенциал практического применения результатов высокий и в полной мере отвечает приоритету "а" СТНР РФ.

6. Уровень научного и научно-технического сотрудничества, в том числе международного в рамках выполнения научной исследований (участие в международных и российских исследовательских программах, проектах, научных коллаборациях и консорциумах физических лиц и организаций, а также иные формы сотрудничества) (заполняется при наличии)

Сотрудничество не предусмотрено. Однако авторы опираются на лучший мировой опыт.

(используются пункты формы отчета: «Научное и научно-техническое сотрудничество, в том числе международное»)

7. Вывод о целесообразности (нецелесообразности) финансирования проекта научной темы за счет средств бюджетов бюджетной системы Российской Федерации

Рекомендуется принять отчет по завершившейся научной теме.

V

Не рекомендуется принять отчет по завершившейся научной теме.

Комментарий:

Отчет представлен небольшой командой в составе трех человек, из которых два кандидата технических наук и стажер-исследователь. Объем отчета, составляющий 132 страницы без приложений, вполне может соперничать с отчетами более крупных проектов. Стоит отметить, что и объем научной работы, выполненный в рамках данного проекта, видится весьма большим для такого небольшого состава исполнителей. Несмотря на то, что в области проектирования антенн для сетей 5G трудно придумать что-то новое, авторы проекта сумели предложить оригинальное решение, что, несомненно, вызывает высокую оценку. В будущем объем работ и финансирование данного научного коллектива должны быть на порядок больше.

Разочаровывает уровень научных изданий, которые выбраны авторами для публикации научных результатов, полученных в рамках выполнения работы в 2023 году. - они вполне достойны журналов первого и второго квартилей, как, например, IEEE Transactions on Antennas and Propagation. Из отечественных изданий следует обратить внимание на журналы "Радиотехника и электроника", "Известия вузов: Радиофизика", "Автометрия".

Настоящим подтверждаю, что при проведении экспертизы отчета исключен конфликт интересов и сохранена конфиденциальность рассматриваемых материалов.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

СВЕДЕНИЯ О СЕРТИФИКАТЕ ЭП

Сертификат: 01DA001DC5EBC770000C5048B00060002

Подписант: Калмыков Степан Николаевич

Подписан: 4 апреля 2024 г., 16:10

Действителен: с 2023-10-16 по 2024-10-16

Должность:Вице-президент



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023688035

«Расчёт параметров линзы Лиеберга в среде Ansys HFSS»

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ) (RU)**

Авторы: **Денисов Дмитрий Вадимович (RU), Кусайкин Дмитрий Вячеславович (RU)**

Заявка № 2023681224

Дата поступления 12 октября 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 20 декабря 2023 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю. С. Зубов

Директор-полномочный
по интеллектуальной собственности
С. И. ...



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2017616708

Дата регистрации: 16.06.2017

Номер и дата поступления заявки:
2017614007 27.04.2017

Дата публикации: 16.06.2017

Контактные реквизиты:
vektor@vektor.ru

Авторы:
Денисов Дмитрий Вадимович (RU),
Паченко Борис Алексеевич (RU),
Пономарев Олег Павлович (RU)

Правообладатель:
Акционерное общество «Уральское производственное
предприятие «Вектор» (АО УПП «Вектор») (RU)

Название программы для ЭВМ:

«Расчет диаграмм рассеяния на неоднородных сферических телах»

Реферат:

Программа предназначена для получения диаграмм рассеяния на сферических телах для калибровки безэховой камеры. Область применения: контроль изготовления радиоэлектронной аппаратуры. Функциональные возможности программы для ЭВМ: методом тензорных функций Грина рассчитывают диаграммы рассеяния на неоднородных сферических телах: металлических сферах (может быть полезна для калибровки безэховых камер), металлических сферах с диэлектрическим укрытием, а также антенн на базе линз Лиеберга. Из полученных диаграмм может быть выражен попутный и радиолокационный коэффициенты рассеяния, а также коэффициент потерь. Входные данные: электрический радиус сферы; количество слоев многослойного сферического образования; радиусы слоев многослойного сферического образования; электрофизические параметры каждого слоя: диэлектрическая и магнитная проницаемости; точность расчетов. Выходные данные: диаграммы рассеяния.

Тип реализующей ЭВМ: IBM PC - совмест. ПК

Язык программирования: MATLAB

Вид и версия операционной системы: Windows (x64), Linux (x64), Mac OS (x64)

Объем программы для ЭВМ: 10,1 Кб



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2016616168

Дата регистрации: 07.06.2016

Номер и дата поступления заявки:
2016611044 11.02.2016

Дата публикации: 20.07.2016

Контактные реквизиты:
peleng@k66.ru

Авторы:
Денисов Дмитрий Вадимович (RU),
Пономарев Олег Павлович (RU),
Махалов Павел Сергеевич (RU),
Перминов Иван Николаевич (RU)

Правообладатель:
Акционерное общество «Особое конструкторское бюро
«Пеленг» (АО «ОКБ «Пеленг») (RU)

Название программы для ЭВМ:

«Расчет антенных и дифракционных характеристик линзы Лиеберга в режиме круговой поляризации»

Реферат:

Программа методом тензорных функций Грина рассчитывает антенные характеристики линзы Лиеберга (диаграммы направленности по основной и кросс-поляризации, коэффициент направленного действия), дифракционные характеристики линзы Лиеберга (диаграммы рассеяния, коэффициенты рассеяния по основной и кросс-поляризации, в том числе попутный и радиолокационный), а также коэффициент потерь. Входные данные: тип облучателя: вибратор с рефлектором или слабонаправленный облучатель для антенной задачи и крестообразный вибратор для дифракционной задачи; электрический радиус линзы; положение облучателя относительно тела линзы; способ стратификации тела линзы: равношаговая, оптимизированная; количество слоев линзы Лиеберга. Выходные данные: диаграммы направленности, диаграммы рассеяния; параметры слоев линзы (диэлектрическая и магнитная проницаемости); коэффициент направленного действия линзы Лиеберга; коэффициенты рассеяния, в том числе попутный и радиолокационный; коэффициент потерь в материале линзы.

Тип реализующей ЭВМ: ПК на базе процессора Pentium 4 и выше

Язык программирования: MATLAB

Вид и версия операционной системы: Windows, Linux, Mac OS

Объем программы для ЭВМ: 88 Кб



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2815559

СПОСОБ ФИКСАЦИИ МОМЕНТА ОТДЕЛЕНИЯ
ОТЦЕПА ОТ СОСТАВА И РАДИОЛОКАЦИОННЫЙ
ДАТЧИК ЕГО РЕАЛИЗУЮЩИЙ (ВАРИАНТЫ)

Патентообладатель: **Акционерное общество «Научно-производственное предприятие «Радиосвязь» (RU)**

Авторы: **Носков Владислав Яковлевич (RU), Галеев Ринат Гайсеевич (RU), Изнатков Кирилл Александрович (RU), Денисов Дмитрий Вадимович (RU)**

Заявка № 2023124930

Приоритет изобретения 28 сентября 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Государственном реестре изобретений

Российской Федерации 18 марта 2024 г.

Срок действия исключительного права

на изобретение истекает 28 сентября 2043 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю. С. Зубов

Директор-полномочный
по интеллектуальной собственности
С. И. ...

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2792315

СПОСОБ РАДИОЛОКАЦИОННОГО КОНТРОЛЯ СОСТОЯНИЯ СТРЕЛОЧНОГО ПЕРЕВОДА СОРТИРОВОЧНОЙ ГОРКИ И ДАТЧИК ЕГО РЕАЛИЗУЮЩИЙ

Патентообладатель: *Акционерное общество "Научно-производственное предприятие "Радиосвязь" (RU)*

Авторы: *Носков Владислав Яковлевич (RU), Галеев Ринат Гайсеевич (RU), Богатырев Евгений Владимирович (RU), Денисов Дмитрий Вадимович (RU), Шайдуров Кирилл Дмитриевич (RU)*

Заявка № 2022126622

Приоритет изобретения 12 октября 2022 г.

Дата государственной регистрации
в Государственном реестре изобретений
Российской Федерации 21 марта 2023 г.

Срок действия исключительного права
на изобретение истекает 12 октября 2042 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 68b8b077e14e40f0a9f4edbd24145d5c7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 26.05.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов





АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы

Денисова Дмитрия Вадимовича

«Методы анализа, синтеза и реализации градиентных сферических линзовых структур в задачах управления электромагнитным полем»

представленной на соискание учёной степени доктора технических наук по специальности
2.2.14 — Антенны, СВЧ-устройства и их технологии

Настоящим актом удостоверяется, что результаты диссертационной работы Денисова Дмитрия Вадимовича использованы в инженерно-технической деятельности ООО «Искратех» при решении задач электродинамического моделирования антенных и СВЧ-устройств.

Внедрены следующие результаты:

- строгий электродинамический аппарат тензорных функций Грина и многослойного разложения Ми для расчёта полей и характеристик рассеяния сферических линзовых структур с произвольным радиальным профилем ϵ и μ ;
- методики синтеза радиально-неоднородных профилей показателя преломления и анализа диаграмм направленности линзовых антенн (косекансных $\csc^2\theta$, многолучевых, с управляемой обратной составляющей);
- открытая Python-библиотека GreenTensor, реализующая указанный аппарат и применяемая в качестве расширения коммерческих САПР (CST Studio Suite, Ansys HFSS).

Использование результатов позволило:

- сократить вычислительные затраты по сравнению с методом конечных элементов (CST Studio Suite, Ansys HFSS) и повысить точность относительно метода SBR+ на сопоставимых классах задач;
- обеспечить независимый расчётный контроль и валидацию моделей многослойных структур, диаграмм направленности и ЭПР объектов;
- расширить инструментарий проектирования за счёт отечественной программной разработки в рамках политики импортозамещения.

Настоящий акт не содержит сведений, составляющих государственную или коммерческую тайну, и может быть представлен в диссертационный совет.

Генеральный директор

М.П.



/ Т. Ю. Райкова /

АКТ**о внедрении результатов диссертационной работы****Денисова Дмитрия Вадимовича**

Настоящий акт составлен о том, что результаты диссертационной работы Денисова Д.В. применяются в научной и инженерной деятельности компании, применяются партнерами и заказчиками. Результаты численного электродинамического моделирования с использованием библиотеки тензорных функций Грина служат валидационной базой для анализа многослойных структур, диаграмм направленности, расчета ЭПР объектов и т. д.

Решение автора диссертационной работы позволяет получать результаты анализа электродинамических моделей:

- с меньшими затратами вычислительных ресурсов по сравнению с методом конечных элементов (реализованного в Microwave CST Studio Suite, Ansys Electronics Desktop (HFSS Design));

- с более высокой точностью по сравнению с методом SBR+ (реализованного в Ansys Electronics Desktop (HFSS Design));

Разработанная Денисовым Д.В. библиотека электродинамического моделирования используется в качестве расширения для существующих систем автоматизированного проектирования (САПР) для численного электродинамического моделирования. Полученные результаты имеют важное практическое значение для развития отечественных программных продуктов в рамках существующей политики импортозамещения.

Генеральный директор**А. А. Подшивалов**



Общество с ограниченной ответственностью «Твинтех»

ОГРН 1196658059190 ИНН 6658527936

ул. Рябинина, дом 29, оф. 119, Екатеринбург, 620149

E-mail: info@twintech.pro

АКТ о внедрении результатов диссертационной работы

Денисова Дмитрия Вадимовича

Настоящий акт составлен о том, что результаты диссертационной работы Денисова Д.В. применяются в научной и инженерной деятельности компании. Полученные результаты разработки и расчета линз Люнеберга, а также методов их анализа, интегрируются в процессы моделирования и проектирования оптических систем и электродинамических структур.

Решение автора диссертационной работы позволяет:

- Эффективно рассчитывать параметры линз Люнеберга, состоящих из многослойных и неоднородных материалов, с применением методов численного моделирования на основе тензорных функций Грина. Предложенный подход снижает трудозатраты и ускоряет процесс проектирования устройств на основе линз.
- Получать высокоточную информацию о распределении электромагнитных полей и характеристиках дифракционных решеток, что важно для разработки систем с высокой производительностью.
- Использовать методы расчета линз Люнеберга для оптимизации электродинамических моделей, что значительно уменьшает требования к вычислительным ресурсам, по сравнению с более традиционными подходами.

Разработанные методы расчета и проектирования линз Люнеберга внедрены в процесс производства компаний партнеров, специализирующихся на изготовлении объемных сферических линз способом 3D-печати.

Генеральный директор



С.П. Панков



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

**Институт радиоэлектроники
и информационных
технологий — РТФ**

Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» (УрФУ)

**ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ-РТФ**

ул. Мира, 32, Екатеринбург, Россия, 620002,

тел.: +7 (343) 375-97-00 факс +7 (343) 375-46-39

e-mail: rtf@urfu.ru, www.rtf.urfu.ru, www.urfu.ru

ОКПО 02069208, ОГРН 1026604939855, ИНН/КПП

6660003190/667001001

«УТВЕРЖДАЮ»

и.о. директора ИРИТ-РТФ УрФУ

 Т.И. Алферьева
«___» _____ 2026 г.

АКТ

об использовании результатов докторской диссертационной работы Д.В. Денисова
**«МЕТОДЫ АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И РЕАЛИЗАЦИИ ГРАДИЕНТНЫХ
СФЕРИЧЕСКИХ ЛИНЗОВЫХ СТРУКТУР В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ»**

Настоящим актом подтверждается, что научные и технические результаты диссертационной работы Д.В. Денисова, представленной на соискание учёной степени доктора технических наук по специальности 2.2.14 «Антенны, СВЧ-устройства и их технологии», использованы в учебной и научно-исследовательской деятельности ИРИТ-РТФ УрФУ, а именно:

1. На основе результатов работы разрабатывается электродинамический расчётный аппарат — открытая программная библиотека GreenTensor (greentensor.ru) для моделирования антенно-фидерных устройств, градиентных линзовых структур и СВЧ-устройств. Библиотека применяется в научной работе аспирантов и магистрантов ИРИТ-РТФ при подготовке диссертаций и ВКР: рассчитывает развёртку сечений рассеяния и диаграмм направленности за секунды и позволяет генерировать обучающие выборки для задач инверсного проектирования, обеспечивая подготовку научных кадров высшей квалификации.

2. Развита математическая модель тензорных функций Грина (ТФГ) научной школы кафедры и доведён до полной программной реализации решателя: рекуррентный пересчёт направленных импедансов слоёв обеспечил расчёт многослойных градиентных сферических линз (Люнеберга, Максвелла, Итона–Липмана) с точностью полноволнового моделирования при ускорении на три–четыре порядка и снижении требований к памяти до 200 МБ; подход замыкает триаду «плоскость–цилиндр–сфера». На программную реализацию получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

3. Результаты использованы при производстве (изготовлении) градиентных линзовых структур методом аддитивной FDM-3D-печати: стратегия многокритериальной (MOGA) стратификации профиля проницаемости дала в 2,6 раза более точную аппроксимацию профиля, что подтверждено измерением изготовленного макета линзы (диаметр 73 мм, метод NRW, 10 ГГц, расхождение с расчётом не более 3 %). Решения применимы при проектировании пассивных переизлучателей, систем отклонения луча для устройств связи миллиметрового диапазона.

Заведующий кафедрой радиоэлектроники и
телекоммуникаций ИРИТ-РТФ УрФУ

 д.т.н., профессор
Шабунин С.Н.



АО «Концерн ВКО «Алмаз-Антей»

ЗиК

Публичное акционерное общество
«Машиностроительный завод имени М.И. Калинина, г. Екатеринбург»

ПАО «МЗИК», пр. Космонавтов, стр.18, г. Екатеринбург, 620091
Телефон: +7 [343] 329-55-75. факс: +7 [343] 327-62-62
e-mail: zik@mail.utk.ru, сайт: www.zik.ru
ОКПО 07509511, ОГРН 1026605624451, ИНН/КПП 6663003800/997450001

«УТВЕРЖДАЮ»

Генеральный конструктор -
Заместитель генерального директора
ПАО «МЗИК»

 / Михалёв В.П. /
« ____ » ____ 2026 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы

Денисова Дмитрия Вадимовича

*представленной на соискание учёной степени доктора технических наук по
специальности 2.2.14 — Антенны, СВЧ-устройства и их технологии*

Настоящим актом удостоверяется, что результаты диссертационной работы Денисова Дмитрия Вадимовича, посвящённой методам анализа, синтеза и реализации градиентных сферических линзовых структур в задачах управления электромагнитным полем, использованы в ПАО «Машиностроительный завод имени М.И. Калинина, г. Екатеринбург» (ПАО «МЗИК») при проведении расчётов воздействия электромагнитного излучения на человека и оборудование изделий специального назначения, а так же уровня электромагнитного излучения.

Комиссия в составе:

— председатель комиссии — Генеральный конструктор - Заместитель генерального директора Михалёв Валерий Павлович;

— члены комиссии — начальник отдела расчётов и испытаний Шестаков Игорь Владимирович, начальник бюро расчётов и испытаний Бажуков Александр Сергеевич, ведущий инженер- конструктор Сафин Наиль Рамазанович.

рассмотрев материалы диссертационной работы Д.В. Денисова, установила следующее.

1. Внедрённые результаты

В практике расчётно-теоретических работ ПАО «МЗИК» использованы следующие результаты диссертационной работы Д.В. Денисова, относящиеся к

проведению расчётов воздействия электромагнитного излучения на человека и оборудование:

- строгий электродинамический аппарат тензорных функций Грина и многослойного разложения Ми, обеспечивающий расчёт распределения электромагнитного поля внутри и в ближней/дальней зоне сферических линзовых структур при произвольном характере падающего излучения;

- методики расчёта характеристик рассеяния, позволяющие оценивать воздействие электромагнитного излучения на человека и оборудование;

- методики расчёта эффективности подавления электромагнитного излучения за счёт применения радиопоглощающих материалов;

- программная реализация перечисленных методик в виде Python-библиотеки GreenTensor, верифицированная по внутренним регрессионным тестам (энергобаланс, парадокс экстинкции, сходимость алгоритма Уискомба) и по сравнению с расчётами в коммерческом пакете ANSYS HFSS.

2. Область применения

Перечисленные методики и программные средства применены при проведении расчётов воздействия электромагнитного излучения на оборудование, человека и многослойные защитные покрытия, рассматриваемые в качестве элементов радиотехнических подсистем разрабатываемых на предприятии изделий, а также при оценке электромагнитной совместимости.

3. Эффект от внедрения

Использование результатов работы Д.В. Денисова позволило:

- сократить трудоёмкость и время проведения расчётов влияния электромагнитного излучения на человека и оборудование за счёт замены полноволнового моделирования в коммерческих пакетах строгими полуаналитическими алгоритмами с контролируемой погрешностью;

- обеспечить независимый расчётный контроль результатов, получаемых в коммерческих программных комплексах, в задачах оценки воздействия электромагнитного излучения на изделия специального назначения.

4. Заключение комиссии

Комиссия подтверждает, что научные и практические результаты диссертационной работы Денисова Д.В. имеют существенное значение для расчётно-теоретического обеспечения работ ПАО «МЗиК» по оценке воздействия электромагнитного излучения на радиотехнические подсистемы и фактически

используются в текущей производственной и научно-исследовательской деятельности предприятия.

Председатель комиссии:

Генеральный конструктор –

Заместитель генерального директора

 /Михалёв В.П./

Члены комиссии:

Начальник отдела

расчётов и испытаний

 /Шестаков И.В./

Начальник бюро

расчётов и испытаний

 /Бажуков А.С./

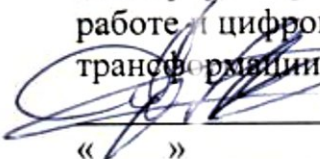
Ведущий инженер-конструктор, к.т.н

 /Сафин Н.Р./



УТВЕРЖДАЮ

И.о. проректора по научной
работе и цифровой
трансформации СибГУТИ

 / А. В. Ефимов /
« » 2026 г.

М.П.

А К Т

о внедрении (использовании) результатов диссертационной работы Денисова Дмитрия Вадимовича

Настоящий акт составлен в том, что результаты диссертационной работы Денисова Дмитрия Вадимовича «Методы анализа, синтеза и реализации градиентных сферических линзовых структур в задачах управления электромагнитным полем», представленной на соискание учёной степени доктора технических наук по специальности 2.2.14 «Антенны, СВЧ-устройства и их технологии», получены, в том числе в период работы автора в Уральском техническом институте связи и информатики (филиале) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» в г. Екатеринбурге в рамках выполнения прикладных научных исследований по государственному заданию № 071-03-2023-001 от 19.01. 2023, тема «Способы разработки и проектирования многолучевой линзовой антенны для сетей 5G» (регистрационный номер карты НИОКТР – 123030900016-7).

Комиссия в составе председателя — и.о. директора института телекоммуникаций И.Е. Шевниной и членов комиссии — и.о. заведующего кафедрой физики В.В. Лубского; заведующего кафедрой цифрового телерадиовещания и систем радиосвязи М.С. Шушнова составила настоящий акт о том, что в СибГУТИ использованы следующие научные и практические результаты диссертационной работы Д. В. Денисова:

- метод анализа и синтеза градиентных сферических линзовых структур на основе аппарата тензорных функций Грина;
- алгоритмы и программная реализация (библиотека GreenTensor) электродинамического расчёта многослойных сферических линз — Люнеберга, Итона—Липмана, Максвелла и их модификаций;
- методики расчёта характеристик рассеяния и формирования диаграммы направленности градиентных сферических структур.

Указанные результаты использованы в научно-исследовательской деятельности Уральского технического института связи и информатики (филиале) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» в г. Екатеринбурге при выполнении прикладных научных исследований. Применение результатов позволило снизить трудозатраты на проектирование и расчёт перспективных мобильных антенных систем, повысить точность электродинамического моделирования и сократить требования к вычислительным ресурсам по сравнению с традиционными подходами.

Настоящий акт не является основанием для предъявления финансовых претензий.

Комиссия:

Председатель

 / И. Е. Шевнина /

Член комиссии

 / В. В. Лубский /

Член комиссии

 / М. С. Шушнов /

«УТВЕРЖДАЮ»
Генеральный директор
ОАО «ЛИИП им. Гризодубовой В. С.»
Г. В. Пономаренко
« ____ » _____ 2026 г.



А К Т

о внедрении результатов диссертационной работы Денисова Дмитрия Вадимовича

представленной на соискание учёной степени доктора технических наук по специальности 2.2.14 — Антенны,
СВЧ-устройства и их технологии

Комиссия в составе: председатель комиссии — Генеральный директор ОАО «ЛИИП им. Гризодубовой В. С.» Г. В. Пономаренко; члены комиссии — главный конструктор И. Н. Еркин, главный специалист А. Н. Глазов, — рассмотрев материалы диссертационной работы Д. В. Денисова, составила настоящий акт о том, что результаты работы использованы в ОАО «Лётные испытания и производство имени Гризодубовой В. С.» (г. Жуковский) при проектировании, изготовлении и расчётном сопровождении пассивных сферических линзовых радиолокационных отражателей (линз Люнеберга), предназначенных для увеличения эффективной поверхности рассеяния (ЭПР) малоразмерных воздушных объектов — многоцветных беспилотных мишеней гражданского применения, разрабатываемых и изготавливаемых предприятием в рамках ОКР «Соната». Мишень имитирует дозвуковые аэродинамические цели (беспилотные летательные аппараты различных классов, малоразмерные летательные аппараты) при испытаниях, отработке и калибровке радиотехнических средств наблюдения воздушного пространства, для чего требуется воспроизведение заданного уровня ЭПР изделия в широком секторе углов наблюдения.

1. Внедрённые результаты. В практике конструкторских, технологических и расчётных работ предприятия по созданию линзовых отражателей для увеличения ЭПР воздушных мишеней использованы следующие результаты диссертационной работы Д. В. Денисова:

- методика синтеза и оптимизации многослойного (стратифицированного) профиля диэлектрической проницаемости сферической линзы Люнеберга, включая обоснованный выбор числа слоёв L и границ слоёв при переходе от непрерывного градиентного профиля к технологически реализуемой многослойной конструкции;
- технология изготовления градиентных линзовых структур методом послойного наплавления (FDM-3D-печати) с управляемой пористостью полимера: установленное соответствие «объёмная доля заполнения α — эффективная диэлектрическая проницаемость слоя» в диапазоне $\alpha = 15,1...77,9\%$, конструкция сопрягаемых оболочек и режимы печати, позволяющие получить требуемый радиальный профиль из одного полимерного материала без прессформ и без применения дефицитных пенодиэлектриков;
- изготовленные по указанной технологии макеты сферических линз Люнеберга, переданные предприятию вместе с трёхмерными цифровыми моделями;
- строгий электродинамический аппарат тензорных функций Грина и многослойного разложения Ми для расчёта поля и характеристик рассеяния многослойных сферических структур — полного, обратного (моностатического) и бистатического сечений рассеяния, — позволивший расчётным путём определить уровень ЭПР отражателя и сектор углов

эффективного переизлучения в передней полусфере изделия в рабочих диапазонах частот радиолокационных средств [диапазоны уточняются предприятием];

— методики расчёта диаграмм направленности и коэффициента направленного действия линзовых антенн с различными типами облучателей, в том числе в многолучевом режиме, использованные при оценке взаимного влияния отражателя и бортовых антенных устройств изделия;

— программная реализация перечисленных методик в виде открытой Python-библиотеки GreenTensor (положение № 2, выносимое на защиту), верифицированной по внутренним регрессионным тестам (энергетический баланс, сходимость по числу гармоник, предельные случаи металлической сферы).

2. Область применения. Перечисленные методики, технология изготовления и программные средства применены при: выборе типа, диаметра и числа слоёв линзового отражателя и углового размера его отражающего сегмента; расчётной оценке уровня ЭПР изделия-мишени, обеспечиваемого отражателем в заданных диапазонах частот и ракурсов наблюдения; разработке трёхмерных цифровых моделей и конструкторской документации макетов; непосредственном изготовлении макетов линз Люнеберга методом FDM-3D-печати и их последующей конструкторской проработке в составе изделия; подготовке исходных данных для измерений характеристик рассеяния и для расчётного сопровождения лётных испытаний.

3. Эффект от внедрения. Использование результатов работы Д. В. Денисова позволило:

— обеспечить требуемый уровень ЭПР малоразмерной воздушной мишени полностью пассивным средством — линзовым отражателем, не требующим бортового электропитания и активных ретрансляторов, что принципиально для малогабаритного многофазового изделия;

— получить широкий сектор углов эффективного переизлучения при стабильном уровне ЭПР, недостижимый для уголкового отражателя сопоставимых габаритов, и уровень обратного рассеяния, существенно превышающий уровень металлической сферы того же диаметра;

— освоить изготовление градиентных линзовых структур собственными силами предприятия на стандартном FDM-оборудовании из доступного полимера, сократив сроки и себестоимость изготовления отражателей и исключив потребность в оснастке для прессования пенициллинов;

— сократить трудоёмкость и сроки электродинамических расчётов линзовых отражателей за счёт замены полноволнового моделирования строгими полуаналитическими алгоритмами с контролируемой погрешностью;

— обеспечить независимый расчётный контроль результатов, получаемых в коммерческих программных комплексах, и сократить объём натурных измерений характеристик рассеяния на этапе отработки изделия.

4. Заключение комиссии. Комиссия подтверждает, что научные, технологические и практические результаты диссертационной работы Денисова Дмитрия Вадимовича имеют практическое значение для деятельности предприятия по тематике средств полигонных измерений и воздушных мишеней гражданского применения и фактически использованы при проектировании и изготовлении линзовых отражателей, увеличивающих эффективную g_{kjpflm} рассеяния изделий. Изготовленные макеты линз Люнеберга и переданные цифровые модели приняты к использованию. Настоящий акт относится к продукции гражданского применения, не содержит сведений, составляющих государственную или коммерческую тайну.

Председатель комиссии:

Генеральный директор

Члены комиссии:

Главный конструктор

Главный специалист

« ____ » _____ 2026 г.

Г. В. Поньмарин

И. Н. Еркин

А. Н. Глазов

М.П.



Сертификат о владении доменом

Reg.ru — хостинг-провайдер и регистратор доменов №1 в России.*

Компания обслуживает более 3 000 000 доменов и предлагает регистрацию в 750+ международных зонах, а также предоставляет услуги хостинга, почты, SSL, облачных VPS, аренды физических серверов и многие другие.

*По данным StatOnline.ru, Reg.ru занимает 1 место по количеству зарегистрированных доменов и размещенных сайтов в национальных зонах .RU и .РФ.

Настоящим подтверждается регистрация домена:

greentensor.ru

Администратор домена:

Денисов Дмитрий Вадимович

Дата регистрации:

28 Апреля 2025 г.

ООО «Регистратор доменных имен Reg.ru»

Аккредитован:



Генеральный директор
Кузьмичев А.Ю.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ДИССЕРТАЦИИ · ИНФОРМАЦИЯ О ПРОЕКТЕ

GreenTensor

open-source Python-библиотека · MIT

Расчёт рассеяния электромагнитных волн на многослойных сферических структурах методом тензорных функций Грина.

ВЛАДЕЛЕЦ ПРОЕКТА

Денисов Дмитрий Вадимович

ОРГАНИЗАЦИЯ

УрФУ им. Б. Н. Ельцина · Екатеринбург

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ ВАК

2.2.14 — Антенны, СВЧ-устройства и их технологии

ДОМЕННОЕ ИМЯ

greentensor.ru

ДАТА РЕГИСТРАЦИИ

28 апреля 2025 г.

ИСХОДНЫЙ КОД

github.com/Den1sovDm1triy/GreenTensor

Документ оформлен для приложения к диссертации на соискание учёной степени доктора технических наук.

Соискатель: Денисов Д. В. · Научный консультант: д.т.н., проф. В. Я. Носков · Екатеринбург, 2026 г.